序　言

同调代数自从本世纪40年代中期被引进以来，现在已发展成为代数学中一个重要的分支，并在代数学的其他分支中越来越体现出它的重要作用。国外已有很好的同调代数专著，例如 H. Cartan 及 S. Eilenberg 的《Homological Algebra》，P. J. Hilton 及U. Stammbach 的《A Course in Homological Algebra》，J. J. Rotman 的《An Introduction to Homological Algebra》等等。所提到的这些专著，内容丰富，各有许多优点，但似不便于初学者阅读。国内同调代数方面的专著则至今尚不多见。本书编写的目的是为初学同调代数的读者提供一本便于阅读的书。

本书是根据编著者 1984 年春以来以 J. J. Rotman 的《An Introduction to Homological Algebra》为基本教材并参考其他专著先后在扬州师范学院、东北师范大学为代数研究生讲课时所写的讲稿修改而成的。若采用本书作为研究生的同调代数教科书，可以每周 4 学时，在一学期内讲完。

本书是在张海权教授的鼓舞下完成的。听课的研究生们提出了很好的意见。对于这些同志，谨在此表示衷心的感谢。

由于编著者水平的限制，书中很可能有不当甚至错误之处，敬请读者批评指正。

林子炳

1987年 9 月

目　录

第一章 模及范畴

模范畴到模范畴的函子 Hom与$\otimes$和它们的导来函子 Ext 及 Tor是同调代数的基本研究对象. 因此，本章将先对模、范畴及函子作一极其初步的介绍.

§1 模

环上模的概念是域上向量空间及 Abel 群这两个概念的共同的自然推广. 它不仅是同调代数中的重要概念，而且也是整个代数学中的重要概念.

本书中所说的环恒是含单位元的结合环，所说的子环恒含原环的单位元，所说的环同态映射恒将单位元映到单位元.

1.1 模的定义

定义1.1 设R是环，$(M, +)$是Abel群. 若有一个映射

$$R\times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto rm$$

满足

(i) $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$, $\quad \forall r\in$, $Rm_1, m_2\in M$;

(ii) $(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$, $\quad \forall r_1, r_2\in R$, $m\in M$;

(iii) $(r_1r_2)m=r_1(r_2m)$, $\quad \forall r_1, r_2\in R$, $m\in M$;

(iv) $1m=m$, $\quad \forall m\in M$,

其中 1 是环R的单位元，则称M是一个左R-模. 有时也用 ${}_RM$表

示M是一个左R-模。

当M是左R-模时，由左R-模的定义知，有

$r0=0$，$\forall r\in R$；其中0是$(M,+)$的零元；

$r(-m)=-rm$，$\forall r\in R$，$m\in M$；

$r(m_1-m_2)=rm_1-rm_2$，$\forall r\in R$，m_1，$m_2\in M$；

$0m=0$，$\forall m\in M$；其中左边的0是环R的零元；

$(-r)m=-rm$，$\forall r\in R$，$m\in M$；

$(r_1-r_2)m=r_1m-r_2m$，$\forall r_1,r_2\in R$，$m\in M$。

当左R-模M只含一个零元时，称M是零模．零模用0来记。

例1.1 设V是域F上向量空间．对于$a\in F$及$x\in V$，定义ax是V构成域F上向量空间时所用的纯量乘法的积，则V是左F-模．反之，若M是左F-模，其中F是一个域，则M恰是域F上向量空间．故域上左模与域上向量空间这两个概念完全一致。

例1.2 设$(M,+)$是Abel群，$\mathbf{Z}$是整数环．对于正整数n及$x\in M$，当$n=1$时，定义$1x=x$，当$n\geqslant 2$时，定义$nx=x+x+\cdots+x$（n个x），并定义$(-n)x=-nx$，$0x=0$，则M是左$\mathbf{Z}$-模．反之，若M是左$\mathbf{Z}$-模，则易知对于正整数n及$x\in M$，当$n=1$时，必有$1x=x$，当$n\geqslant 2$时，必有$nx=x+x+\cdots+x$（n个x），且有$(-n)x=-nx$及$0x=0$。 故整数环上左模与Abel群这两个概念完全一致。

例1.3 设V是域F上向量空间．命R是V的全体线性变换作成的环．这里当$f,g\in R$时，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$\forall x\in V$；$(fg)(x)=f(g(x))$，$\forall x\in V$．现在对于$f\in R$及$x\in V$，定义$fx=f(x)$，则V是左R-模。

例1.4 设R是环，则$(R,+)$是Abel群．再对于$r\in R$及$x\in R$，定义rx就是r及x在环R中的积，则R是左R-模．以后如无特殊声明，凡提到左R-模R时，恒指这种意义下的左R-模。

类似地有右模的概念.

定义1.2 设R是环，$(M,+)$是Abel群．若有一个映射

$$R\times M\longrightarrow M$$
$$(r,m)\longmapsto mr$$

满足

(i) $(m_1+m_2)r=m_1r+m_2r$, $\forall m_1,m_2\in M$, $r\in R$;

(ii) $m(r_1+r_2)=mr_1+mr_2$, $\forall m\in M$, $r_1,r_2\in R$;

(iii) $m(r_1r_2)=(mr_1)r_2$, $\forall m\in M$, $r_1,r_2\in R$;

(iv) $m1=m$, $\forall m\in M$,

其中 1 是环R的单位元，则称M是一个右R-模．有时也用 M_R表示M是一个右R-模．

当M是右R-模时，由右R-模的定义知，有

$0r=0$, $\forall r\in R$; 其中 0 是$(M,+)$的零元;

$(-m)r=-mr$, $\forall r\in R$, $m\in M$;

$(m_1-m_2)r=m_1r-m_2r$, $\forall r\in R$, $m_1,m_2\in M$;

$m0=0$, $\forall m\in M$;

$m(-r)=-mr$, $\forall r\in R$, $m\in M$;

$m(r_1-r_2)=mr_1-mr_2$, $\forall r_1,r_2\in R$, $m\in M$.

容易知道，域上右模与域上向量空间这两个概念也是完全一致的．同样，整数环上右模与Abel群这两个概念也是完全一致的．又，设R是环，对于$r\in R$及$x\in R$，定义xr是x及r在R中的积，则R是右R-模．以后如无特殊声明，凡提到右R-模R时，恒指这种意义下的右R-模．

当R是交换环时，若已给左R-模M，则M可以自然地成为右R-模：对于$r\in R$及$m\in M$，定义$mr=rm$．同样，若已给右R-模M，则M可以自然地成为左R-模：对于$r\in R$及$m\in M$，定义$rm=mr$．因此，当R是交换环时，按以上方式，可以当然地将一个左R-模同时当作右R-模，将一个右R-模同时当作左R-模．在这种意义下，对于交换环上的模，无需区分它是左模还是右模．

模的概念体现了一种表示的思想．设R是环，$(M,+)$是Abel

群。命 End$M$ 是 M 的所有群自同态映射作成的环。这里，当 $f,g\in \mathrm{End}M$时，$(f+g)(m)=f(m)+g(m)$，$\forall\, m\in M$；$(fg)(m)=f(g(m))$，$\forall\, m\in M$。环R到环End$M$的一个环同态映射叫做R到M的一个表示.若φ是R到M的一个表示,可知当定义$rm=\varphi(r)(m)$时,M就成为左R-模.反之，若已给左R-模M,则命$\varphi: R\to \mathrm{End}M$是$r\longmapsto\varphi(r)$，其中$\varphi(r)(m)=rm$，就得到 R 到M的一个表示。对于右模，需要用反表示。环R到环End$M$的一个环反同态映射叫做R到M的一个反表示。若φ是R到M的一个反表示，可知当定义$mr=\varphi(r)(m)$时，M就成为右R-模。反之，若已给右R-模M，则命$\varphi: R\longrightarrow \mathrm{End}M$ 是 $r\longmapsto\varphi(r)$，其中$\varphi(r)(m)=mr$，就得到R到M的一个反表示。

上述表示或反表示的思想有时可以帮助我们作环上的模，或从一个环上的模得到另一个环上的模。

例如，设已给环R及S，并设已给左R-模M，若有一个环同态映射 $\varphi: S\longrightarrow R$，则我们可以容易地使$M$成为左$S$-模。这是因为左$R$-模$M$确定$R$到$M$的一个表示$\psi: R\longrightarrow \mathrm{End}M$,于是$\psi\varphi$就是$S$到$M$的一个表示。因此，当定义$sm=(\psi\varphi)(s)(m)$，也即当定义$sm=\varphi(s)m$时，$M$就成为左$S$-模。

特别，设I是环R的理想，则有环 R/I，并有环自然同态映射φ：$R\longrightarrow R/I$，$r\longmapsto r+I$。因此，若 M 是左R/I-模，则当定义$rm=\varphi(r)m$，也即当定义$rm=(r+I)m$时，M成为左R-模。但若N是左R-模，则当以自然的方式定义$(r+I)x=rx$时，一般未必能使N成为左R/I-模。为了弄清在什么情况下，当定义$(r+I)x=rx$时可以使左R-模N成为左R/I-模，我们先记

$$a_{nn_R}N=\{r\in R\mid rx=0,\quad \forall\, x\in N\},$$

它叫做左R-模N的零化子。容易知道，$a_{nn_R}N$恰是左 R-模 N 确定的R到N的表示ψ的核：$a_{nn_R}N=\ker\psi$。若$I\subseteq a_{nn_R}N$，则命

$$\sigma:\quad R/I\longrightarrow \mathrm{End}N$$

$$r+I\longmapsto\psi(r)$$

时，可知σ是环同态映射，也即σ是R/I到N的一个表示．因此，若$I\subseteq \mathrm{ann}_R N$，则当定义$(r+I)x=\sigma(r+I)(x)$，也即定义$(r+I)x=rx$时，左$R$-模$N$就成为左$R/I$-模．

由左R-模及右R-模的定义知道，左R-模的理论和右R-模的理论是平行的．以后一般我们只就左R-模来进行论述，右R-模的相应结果则认为是自明的．

在模的理论中，双模的概念有着重要的作用．

定义1.3 设R，S是环，$(M,+)$是Abel群．若M既是左R-模，又是右S-模，而且有

$$(rm)s=r(ms),\qquad \forall r\in R,\quad s\in S,\ m\in M,$$

则称M是左R、右S双模，或称M是(R,S)-双模．

有时也用${}_RM_S$表示M是(R,S)-双模．

例如，设V是域F上向量空间，则V是右F-模．命R是V的全体线性变换作成的环，则由例1.3知V是左R-模．因为明显有

$$(fx)a=f(xa),\quad \forall f\in R,\ a\in F,\quad x\in V,$$

故V成为(R,F)-双模．

又容易知道，任意左R-模都是$(R,\mathbf{Z})$-双模，任意右R-模都是$(\mathbf{Z},R)$-双模，对于任何环R，R总是(R,R)-双模．

1.2 子模、商模

定义1.4 设M是左R-模．若M的一个非空子集N既是$(M,+)$的子群，且对任何$r\in R$及$y\in N$，恒有$ry\in N$，则称N是左R-模M的一个子模．

由定义立刻知道，当N是左R-模M的子模时，对于$r\in R$及$y\in N$，定义ry是r及y在M中的积，则N是左R-模．又易知，左R-模M的一个非空子集N是M的子模，当且仅当N对于M的加法封闭，且对任何$r\in R$及$y\in N$，恒有$ry\in N$．

左R-模M的仅由$(M,+)$的零元作成的子集0是M的子模，叫做零子模．可知，对于任何左R-模M，0及M总是M的子模．

例1.5　域F上向量空间V是左F-模。可知左F-模V的子模与域F上向量空间V的子空间一致。

例1.6　左$\mathbf{Z}$-模M的子模与$(M, +)$的子群一致。

例1.7　设V是域F上向量空间，$\mathscr{A}$是V的一个线性变换。命λ是域F上未定元，则有环$F[\lambda]$。对于$f(\lambda)\in F[\lambda]$及$x\in V$，定义$f(\lambda)x=f(\mathscr{A})(x)$，则$V$成为左$F[\lambda]$-模。可知左$F[\lambda]$-模$V$的子模与$V$的对$\mathscr{A}$不变的子空间一致。

例1.8　左R-模R的子模与环R的左理想一致。

若$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$是左R-模M的一集子模，则易知$\bigcap\limits_{\alpha\in J}N_\alpha$是$M$的子模。

现在介绍一种构造子模的普遍方法.设X是左R-模M的一个子集。命$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$是M的所有含X的子模作成的集。于是$\bigcap\limits_{\alpha\in J}N_\alpha$是$M$的子模，它叫做$X$生成的子模，记作$\langle X\rangle$，并称$X$是$\langle X\rangle$的一个生成系。$X$中的每一个元素叫做$\langle X\rangle$的一个生成元。容易知道，$\langle X\rangle$是$M$的含$X$的最小子模，即若$M$的子模$N$含$X$，则$N$必含$\langle X\rangle$。又易知空集$\phi$生成的子模$\langle\phi\rangle$是零子模：$\langle\phi\rangle=0$。当$X=\{x_\beta|\beta\in K\}\neq\phi$时，可知$\langle X\rangle=\{\sum\limits_{\beta\in K}r_\beta x_\beta|r_\beta\in R$，且几乎所有$r_\beta=0\}$，这里所谓"几乎所有$r_\beta=0$"是指"只有有限个$\beta\in K$使$r_\beta\neq 0$"，特别，当然包含"$r_\beta=0$，$\forall\beta\in K$"这种情况。若$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$M$的一个有限子集，则称$\langle X\rangle$是$M$的一个有限生成子模或$f.g.$子模，并记$\langle X\rangle=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$。可知这时$\langle X\rangle=\{\sum\limits_{i=1}^{n}r_ix_i|r_i\in R, i=1, 2\cdots, n\}$。特别，若$X=\{x\}$，则$\langle X\rangle=\langle x\rangle$叫做由$x$生成的循环子模。命$Rx=\{rx|r\in R\}$，则可知$\langle x\rangle=Rx$。若$M=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$，则称$M$是有限生成模或$f.g.$模。若$M=\langle x\rangle$，则$M$叫做由$x$生成的循环模。

若$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$是M的一集子模，则$\langle\bigcup\limits_{\alpha\in J}N_\alpha\rangle$叫做$\{N_\alpha|\alpha\in J\}$

的和，记作$\sum_{\alpha\in J}N_\alpha$。可知$\sum_{\alpha\in J}N_\alpha=\{\sum_{\alpha\in J}x_\alpha \mid x_\alpha\in N_\alpha$，且几乎所有$x_\alpha=0\}$。当$J=\{1,2,\cdots,n\}$是有限集时，$\{N_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$的和记作$\sum_{i=1}^{n}N_i$，或$N_1+N_2+\cdots+N_n$。可知$N_1+N_2+\cdots+N_n=\{x_1+x_2+\cdots+x_n \mid x_i\in N_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$。

于是对于任何左R-模M，总有$M=\sum_{x\in M}Rx$。若$M=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$，则可知$M=\sum_{i=1}^{n}Rx_i$。

设M是左R-模，并设N是M的一个子模。于是有商群M/N。对于$r\in R$及$x+N\in M/N$，定义$r(x+N)=rx+N$，则易知M/N成为左R-模，它叫做M对N的商模。

1.3 模同态映射

定义1.5 设M及N都是左R-模。若映射$\varphi: M\longrightarrow N$满足

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\qquad \forall\, x,y\in M,$$
$$\varphi(rx)=r\varphi(x),\qquad \forall\, r\in R,\quad x\in M,$$

则称φ是M到N的一个左R-模同态映射，简称左R-映射。

容易知道，

$$\begin{aligned}0:\ &M\longrightarrow N\\ &x\longmapsto 0\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}1_M:\ &M\longrightarrow M\\ &x\longmapsto x\end{aligned}$$

都是左R-映射。

设φ及ψ是M到N的两个左R-映射。若$X=\{x_\alpha \mid \alpha\in J\}$是左$R$-模$M$的一个生成系，则容易知道，$\varphi=\psi$，当且仅当$\varphi(x_\alpha)=\psi(x_\alpha)$，$\forall\,\alpha\in J$。

例1.9 设V及W是域F上向量空间，则V及W都是左F-模。

可知V到W的左F-映射与空间V到空间W的线性变换一致。

例1.10 左$\mathbf{Z}$-模M到左$\mathbf{Z}$-模N的左$\mathbf{Z}$-映射与$(M,+)$到$(N,+)$的群同态映射一致。

当$\varphi: M\longrightarrow N$是左$R$-映射时，记

$$\mathrm{im}\varphi=\{\varphi(x)\mid x\in M\},$$

$$\ker\varphi=\{x\in M\mid \varphi(x)=0\},$$

它们分别叫做φ的象及核。易知$\mathrm{im}\varphi$是N的子模，$\ker\varphi$是M的子模．又记

$$\mathrm{Coker}\varphi=N/\mathrm{im}\varphi,$$

它叫做φ的上核。

设A及B是两个集合，$\varphi: A\longrightarrow B$是映射．若$\varphi$是单射，则记作$\varphi: A\rightarrowtail B$；若$\varphi$是满射，则记作$\varphi: A\twoheadrightarrow B$；若$\varphi$既是单射又是满射，则称$\varphi$是双射，并记作$\varphi: A\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$。

易知，

$$\begin{aligned}1_A:\ & A\longrightarrow A\\ & x\longmapsto x\end{aligned}$$

是双射．

若C是集A的一个非空子集，则映射

$$\begin{aligned}\varphi:\ & C\longrightarrow A\\ & x\longmapsto x\end{aligned}$$

叫做包含映射，记作

$$\varphi: C\hookrightarrow A$$

可知包含映射是单射。

设$\varphi: A\longrightarrow B$是映射，$C$是集$A$的一个非空子集，则得到映射

$$\begin{aligned}\varphi|_C:\ & C\longrightarrow B\\ & x\longmapsto \varphi(x).\end{aligned}$$

它叫做φ在C上的限制。

设φ: $A\longrightarrow B$及ψ: $B\longrightarrow C$都是映射，则得到映射

$$\psi\varphi:\ A\longrightarrow C$$

$$x\longmapsto\psi(\varphi(x)),$$

它叫做φ与ψ的积。

易知，对于任何映射f: $A\longrightarrow B$，g: $B\longrightarrow C$及h: $C\longrightarrow D$，恒有

$$(hg)f=h(gf).$$

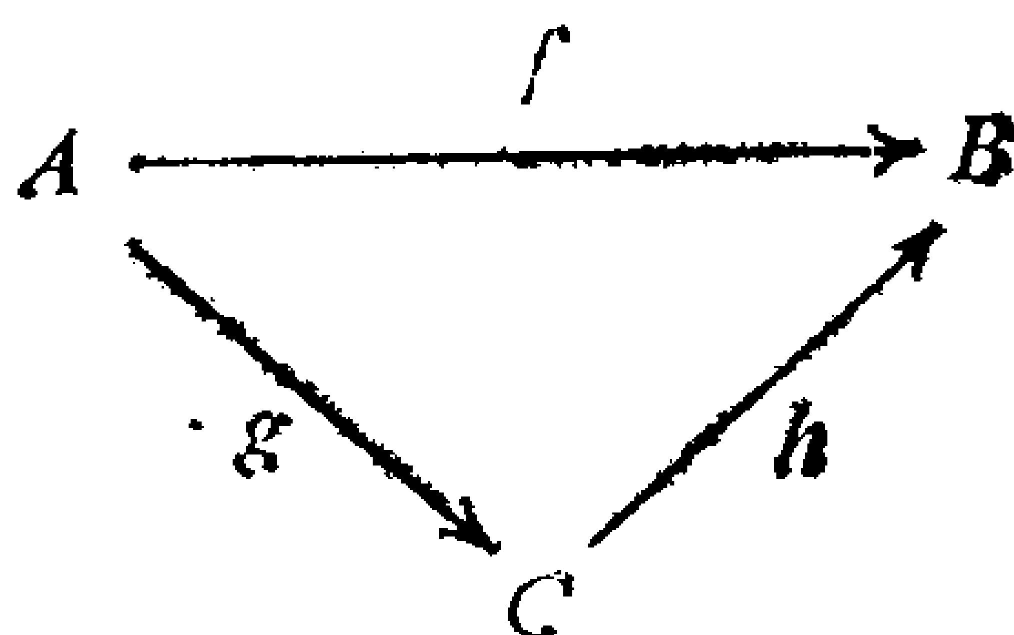
又，对于任何映射f: $A\longrightarrow B$及g: $C\longrightarrow A$，恒有

$$f1_A=f,\qquad 1_Ag=g.$$

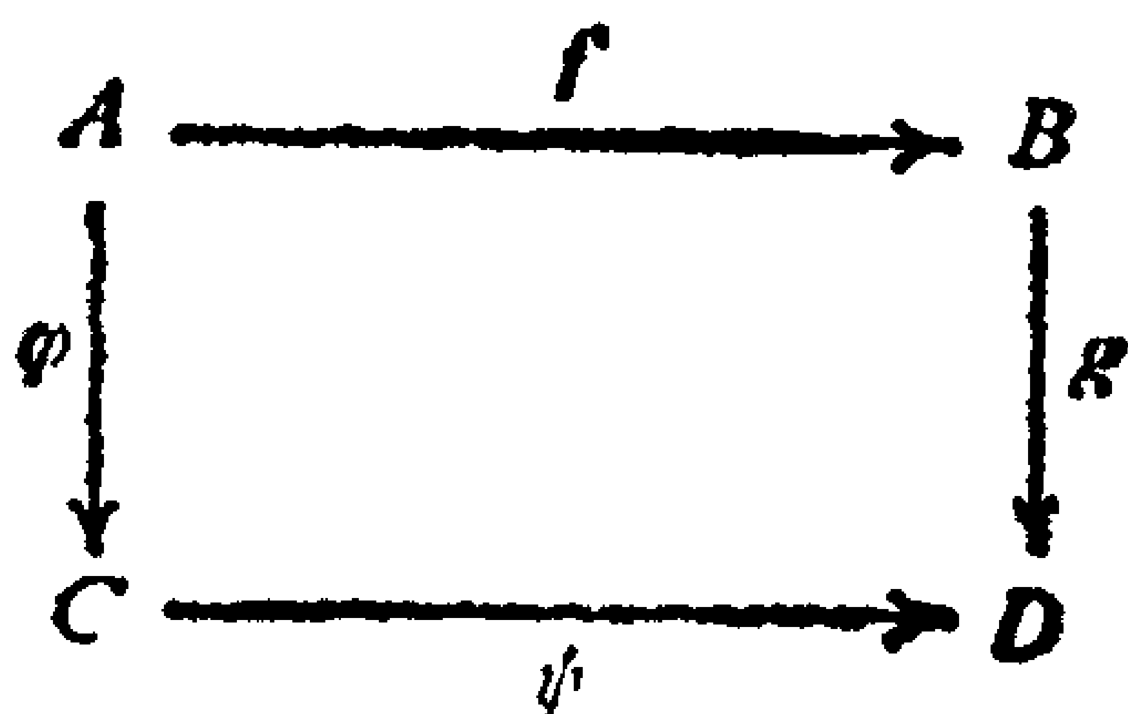
设φ及ψ都是映射，且$\psi\varphi$有意义。若φ及ψ都是单射，则$\psi\varphi$也是单射；若φ及ψ都是满射，则$\psi\varphi$也是满射。又，若$\psi\varphi$是单射，则ψ是单射；若$\psi\psi$是满射，则ψ是满射。

当φ: $M\longrightarrow N$是左R-映射时，若φ是单射，则称φ是左R-单射；若φ是满射，则称φ是左R-满射，并称N是M的一个同态象，记作$M\sim N$或$M\overset{\varphi}{\sim}N$；若$\varphi$是双射，则称$\varphi$是左$R$-同构映射，并称$M$与$N$同构，记作$M\cong N$或$M\overset{\varphi}{\cong}N$。容易知道，左$R$-模的同构具有反身性、对称性及传递性。

交换图的概念在同调代数中起着重要作用。设f: $A\longrightarrow B$，g: $A\longrightarrow C$及h: $C\longrightarrow B$是映射。若在映射图

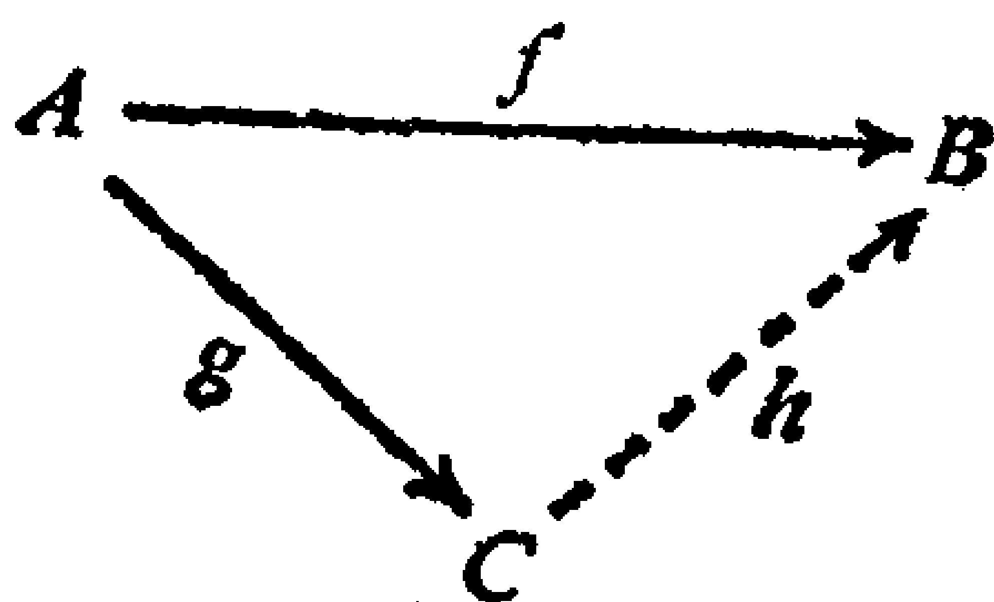


中有$hg=f$，则称此图是交换图。同样，若在映射图



中有$\psi\varphi = gf$，则称此图是交换图。

称可以（唯一地）补成交换图：



是指当映射f及g已给时，存在（唯一的）映射h使上图是交换图。对于正方形图的情形，其意义自明。

关于左R-映射，我们先证明下面三个命题。

命题 I　设φ：$M\longrightarrow N$是左R-映射，则有

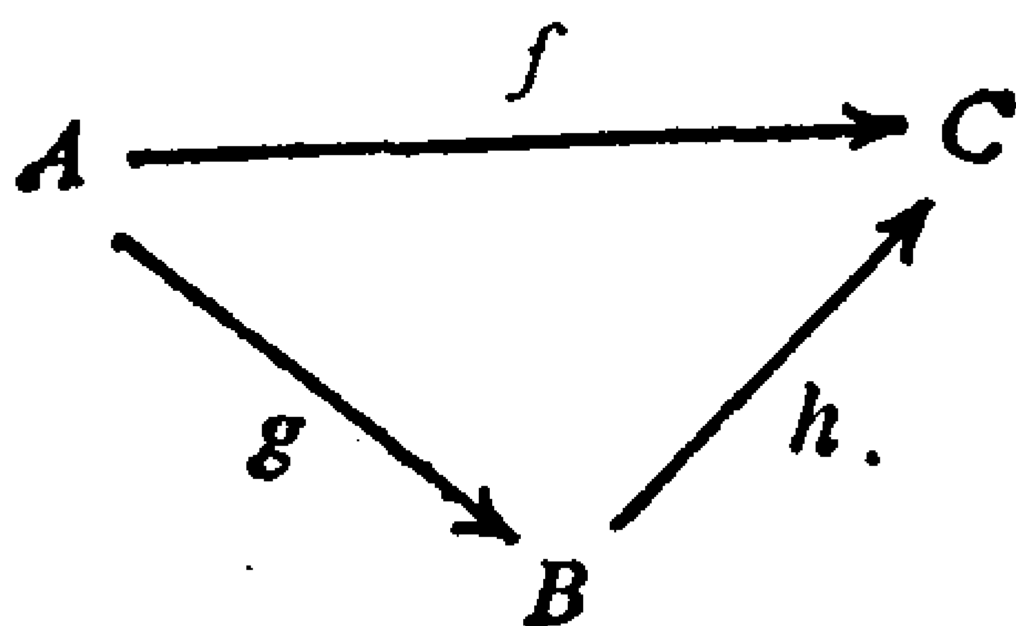
(i) φ是R-单射，当且仅当$\ker\varphi = 0$；φ是R-满射，当且仅当$\mathrm{Coker}\varphi = 0$；

(ii) φ是R-单射，当且仅当对于任何左R-模X及任何左R-映射f, g：$X\longrightarrow M$，由$\varphi f = \varphi g$必有$f = g$；φ是R-满射，当且仅当对于任何左R-模Y及任何左R-映射h, k：$N\longrightarrow Y$，由$h\varphi = k\varphi$必有$h = k$。

证　(i)是明显的。我们证明(ii)。设φ是R-单射。若$\varphi f = \varphi g$，则$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$，$\forall x\in X$，从而$f(x) = g(x)$，$\forall x\in X$，故$f = g$。反之，命$f$：$\ker\varphi\hookrightarrow M$，$g$：$\ker\varphi\longrightarrow M$是$g(x) = 0$，$\forall x\in\ker\varphi$，则$\varphi f = \varphi g$，从而$f = g$，故$\ker\varphi = 0$。因此由(i)知$\varphi$是$R$-单射。

R-满射的情形留作习题。

命题Ⅱ 设已给左R-映射交换图



则有

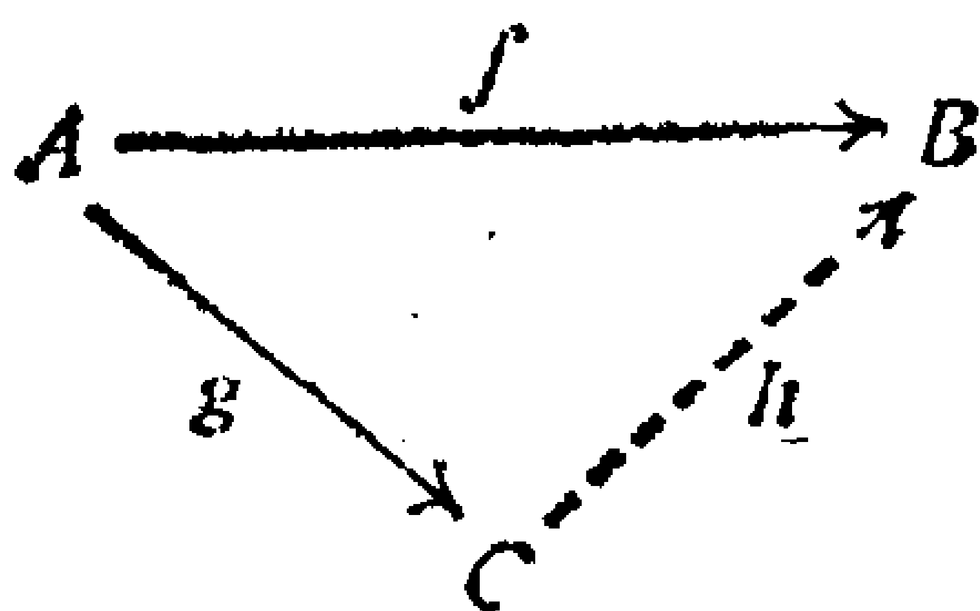
(i) 若h是R-单射，则$\ker f=\ker g$；

(ii) 若g是R-满射，则$\operatorname{im} f=\operatorname{im} h$。

证 (i)若$f(a)=0$，则由$hg=f$有$h(g(a))=0$，从而$g(a)=0$。反之，若$g(a)=0$，则有$f(a)=h(g(a))=0$，故$\ker f=\ker g$。

(ii) 当$h(b)\in \operatorname{im} h$，其中$b\in B$，则有$a\in A$使$g(a)=b$，从而$h(b)=hg(a)=f(a)$，故$\operatorname{im} h\subseteq \operatorname{im} f$。又因为$f(a)=h(g(a))$，故$\operatorname{im} f\subseteq \operatorname{im} h$，因此$\operatorname{im} f=\operatorname{im} h$。

命题Ⅲ 设已给左R-映射f：$A\longrightarrow B$及g：$A\longrightarrow C$。若g是满射且$\ker g\subseteq \ker f$，则可唯一地补成交换图



(甲)

其中补出的h是左R-映射。

又，h是单射，当且仅当$\ker g=\ker f$；h是满射，当且仅当f是满射。

证 命

$$h: C\longrightarrow B$$
$$c\longmapsto f(a),$$

其中$a\in A$满足$g(a)=c$。

因为g是满射，故对$c\in C$，恒存在$a\in A$使$g(a)=c$。若$a'\in A$使$g(a')=c$，则由$g(a)=g(a')$知$a-a'\in\ker g$。而$\ker g\subseteq\ker f$，故$a-a'\in\ker f$，从而$f(a)=f(a')$。因此h是映射。容易验证h是左R-映射。

当$a\in A$时，设$g(a)=c$，则$hg(a)=h(c)=f(a)$，故$hg=f$。因此h使（甲）是交换图。

若左R-映射h'：$C\longrightarrow B$使$h'g=f$，则当$c\in C$时，命$a\in A$满足$g(a)=c$，则$h'(c)=h'g(a)=f(a)$，故$h'=h$。因此，能将（甲）补成交换图的左R-映射h是唯一的。

若h是单射，则由命题Ⅱ知$\ker g=\ker f$。反之，若$\ker g=\ker f$，则当$c\in\ker h$时，有$h(c)=0$。设$a\in A$使$g(a)=c$，则$hg(a)=0$，从而$f(a)=0$。因此$a\in\ker f=\ker g$，从而$g(a)=0$。因此$c=0$。于是$\ker h=0$，故h是单射。

最后，由命题Ⅱ知$\operatorname{im}h=\operatorname{im}f$，故$h$是满射，当且仅当$f$是满射。

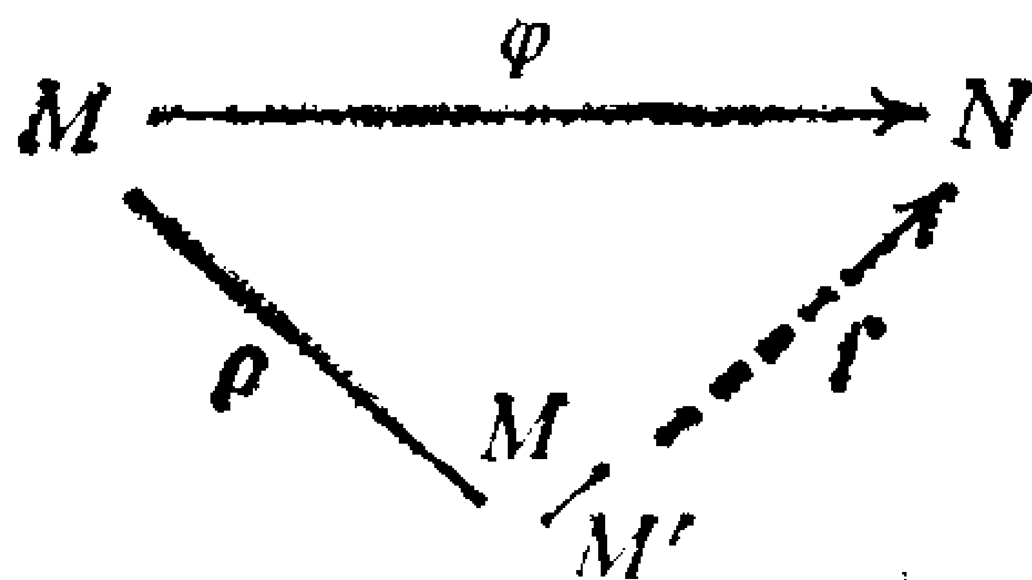
和群的情形相类似，对于模，有模同态基本定理及模的三个同构定理。

首先，设N是左R-模M的一个子模。命

$$\rho:\ M\longrightarrow M/N$$
$$x\longmapsto x+N,$$

则易知ρ是左R-满射，它叫自然同态映射。可知$\ker\rho=N$。

定理1.1 （模同态基本定理） 设φ：$M\longrightarrow N$是左R-映射。若M'是M的子模且$M'\subseteq\ker\varphi$，则可以唯一地补成交换图



其中ρ是自然同态映射，补出的f是左R-映射．又，f是单射当

且仅当$M'=\ker\varphi$；f是满射当且仅当φ是满射。

证 因为ρ是满射，且$\ker\rho=M'$，故由命题Ⅲ即知定理成立。

定理1.2（模的三个同构定理）

(i)（第一同构定理） 设$f: M\longrightarrow N$是左R-映射，则

$$M/\ker f\cong \mathrm{im} f.$$

特别，若f是满射，则

$$M/\ker f\cong N.$$

(ii)（第二同构定理） 设M_1及M_2是左R-模M的两个子模，则

$$M_1/(M_1\cap M_2)\cong(M_1+M_2)/M_2.$$

(iii)（第三同构定理） 设M_1及M_2是左R-模M的两个子模，且$M_2\subseteq M_1$，则

$$(M/M_2)/(M_1/M_2)\cong M/M_1.$$

证 (i) 由模同态基本定理即得。

(ii) 命φ: $M_1\longrightarrow(M_1+M_2)/M_2$是$x\longmapsto x+M_2$，则易知$\varphi$是左$R$-满射且$\ker\varphi=M_1\cap M_2$。故由第一同构定理即得$M_1/(M_1\cap M_2)\cong(M_1+M_2)/M_2$。

(iii) 命φ: $M/M_2\longrightarrow M/M_1$是$x+M_2\longmapsto x+M_1$，则易知$\varphi$是左$R$-满射且$\ker\varphi=M_1/M_2$，故由第一同构定理即得$(M/M_2)/(M_1/M_2)\cong M/M_1$。

设M'是左R-模M的一个子模。我们来研究M的子模与M/M'的子模间的关系。首先，若N是M的一个子模，且$N\supseteq M'$，则N/M'是M/M'的一个子模。反之，若S是M/M'的一个子模，命ρ: $M\longrightarrow M/M'$是自然同态映射，则容易知道S在ρ作用下的逆象$\rho^{-1}(S)=\{x\in M\mid\rho(x)\in S\}$是$M$的一个含$M'$的子模且$S=\rho^{-1}(S)/M'$。

循环模是一种重要的模。我们给出一个模是循环模的一种充分必要条件，即有下面定理。

定理1.3 左R-模M是循环模，当且仅当环R有一个左理想I使得$M\cong R/I$。

证 若左R-模M是循环模，则有$x\in M$使$M=Rx$。命φ: $R\longrightarrow M$是$r\longmapsto rx$，则易知φ是左R-满射。于是环R有左理想$I=\ker\varphi$使$M\cong R/I$。反之，若环R有一个左理想I使$M\cong R/I$，则因$R/I=\langle 1+I\rangle$是循环左R-模，故左R-模M是循环模。

由这个定理知道，$\{R/I \mid I\text{是环}R\text{的左理想}\}$本质上给出了所有循环左$R$-模。

最后，我们引进记号$\mathrm{Hom}_R(A,B)$，它是左R-模A到左R-模B的所有左R-映射作成的集。

对于$f,g\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$，我们定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall\, x\in A,$$

则易知$f+g\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$，且$\mathrm{Hom}_R(A,B)$对于如此定义的加法成为Abel群，其零元0是$0(x)=0$，$\forall\, x\in A$；$f$的负元$-f$是$(-f)(x)=-f(x)$，$\forall\, x\in A$。

对于左R-模A，记$\mathrm{End}_RA=\mathrm{Hom}_R(A,A)$，并对$f,g\in\mathrm{End}_RA$，定义$(fg)(x)=f(g(x))$，$\forall\, x\in A$，则易知$fg\in\mathrm{End}_RA$，且$\mathrm{End}_RA$成为环，其单位元是$1_A$。

若R是交换环，则对于$r\in R$及$f\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$，可以自然地定义rf是$(rf)(x)=rf(x)$。易知$rf\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$，且$\mathrm{Hom}_R(A,B)$成为左R-模。但若R不是交换环，则如此定义的rf未必是A到B的左R-映射。故对一般环R来说，$\mathrm{Hom}_R(A,B)$仅仅止于是Abel群，或者说，仅止于是左$\mathbf{Z}$-模。

但是如果出现了双模，则情形就不同了。

(i) 设已给(R,S)-双模A及左R-模B。

对于$s\in S$及$f\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$，定义

$$(sf)(x)=f(xs),\quad \forall\, x\in A,$$

则易知$\mathrm{Hom}_R(A,B)$成为左S-模。

(ii) 设已给左R-模A及(R,S)-双模B。

对于$s\in S$及$f\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$，定义

$$(fs)(x)=f(x)s,\quad \forall x\in A,$$

则易知$\mathrm{Hom}_R(A,B)$成为右S-模。

(iii) 设已给(S,R)-双模A及右R-模B。

对于$s\in S$及$f\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$，这里$\mathrm{Hom}_R(A,B)$由右R-模A到右R-模B的所有右R-映射作成，定义

$$(fs)(x)=f(sx),\quad \forall x\in A,$$

则易知$\mathrm{Hom}_R(A,B)$成为右S-模。

(iv) 设已给右R-模A及(S,R)-双模B。

对于$s\in S$及$f\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$，定义

$$(sf)(x)=sf(x),\quad \forall x\in A,$$

则易知$\mathrm{Hom}_R(A,B)$成为左S-模。

又容易知道，命

$$\varphi:\ \mathrm{Hom}_R(R,B)\longrightarrow B$$
$$f\longmapsto f(1),$$

则当B是左R-模时，φ是左R-同构映射；当B是右R-模时，φ是右R-同构映射。

1.4 模的直积与直和

我们知道，有限个非空集$A_1,A_2,\cdots,A_n$的卡积$\times_{i=1}^{n} A_i=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$。为了将卡积的概念推广到任意一集非空集的情形，我们需要换一个角度来认识$\times_{i=1}^{n} A_i$。为此，先命$J=\{1,2,\cdots,n\}$，并命$X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。这样，$\times_{i=1}^{n} A_i$中任意一个元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$实际上就是一个映射$f: J\longrightarrow X$满足$f(i)=a_i\in A_i$，$i=1, 2, \cdots, n$。反之，若映射$g: J\longrightarrow X$满足$g(i)=b_i\in A_i$，$i=1, 2,\cdots,n$，则g实际上就是$\times_{i=1}^{n} A_i$中的元素$(b_1, b_2,$

$\cdots, b_n)$。

现在设$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$是由非空集$A_\alpha$，$\alpha \in J$作成的集，其中$J$非空。命$X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$，则集

$$\{f: J \longrightarrow X \mid f(\alpha) = x_\alpha \in A_\alpha, \quad \forall \alpha \in J\}$$

叫做$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$的卡积，记作$\underset{\alpha \in J}{\times} A_\alpha$。为直观起见，可以称$\underset{\alpha \in J}{\times} A_\alpha$中的元素$f$是$|J|$维向量，记成$\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$。为了更加直观并便于应用，可以将$\underset{\alpha \in J}{\times} A_\alpha$中的元素记成$(\cdots, x_\alpha, \cdots, x_\beta, \cdots)$，其中$x_\alpha \in A_\alpha$，$x_\beta \in A_\beta, \cdots$，等等。

设已给一集左R-模$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$。以后恒认为$J$非空。先作卡积$\underset{\alpha \in J}{\times} A_\alpha$，然后定义

$$(\cdots, x_\alpha, \cdots, x_\beta, \cdots) + (\cdots, y_\alpha, \cdots, y_\beta, \cdots) = (\cdots, x_\alpha + y_\alpha, \cdots,$$

$x_\beta + y_\beta, \cdots)$，则易知$(\underset{\alpha \in J}{\times} A_\alpha, +)$成为Abel群，其零元是$(\cdots, 0, \cdots, 0, \cdots)$且$-(\cdots, x_\alpha, \cdots, x_\beta, \cdots) = (\cdots, -x_\alpha, \cdots, -x_\beta, \cdots)$。再对$r \in R$，定义

$$r(\cdots, x_\alpha, \cdots, x_\beta, \cdots) = (\cdots, rx_\alpha, \cdots, rx_\beta, \cdots),$$ 则易知$\underset{\alpha \in J}{\times} A_\alpha$成为左$R$-模，叫做$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$的直积，记作$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$。

设M是左R-模。当α是非零基数时，α个M的直积记作M^α，又，约定$M^0 = 0$。

当$j \in J$时，命

$$p_j: \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \longrightarrow A_j$$

$$(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) \longmapsto x_j,$$

则易知p_j是左R-满射，叫做$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$到$A_j$的投射。

命

$$\lambda_j:\ A_j \longrightarrow \coprod_{\alpha\in J} A_\alpha$$

$$x_j \longmapsto (\cdots, 0, \cdots, x_j, \cdots, 0, \cdots)$$

则易知λ_j是左R-单射，叫做A_j到$\prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$的入射。

容易知道有

$$p_j\lambda_k = \delta_{jk}1_{A_j},\quad \forall\ j,\ k\in J,$$

其中δ_{jk}是Kronecker记号。

我们指出，$\prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$具有一种泛性质，即有下面定理。

定理1.4 设$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$是一集左$R$-模，则对任何左$R$-模$X$及任意一集左$R$-映射$\{f_j: X\longrightarrow A_j \mid j\in J\}$，恒可唯一地补成交换图

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha & \overset{\varphi}{\dashleftarrow} & X \\ & {}_{p_j}\searrow \quad \swarrow_{f_j} & \\ & A_j & \end{array} \qquad \forall\ j\in J$$

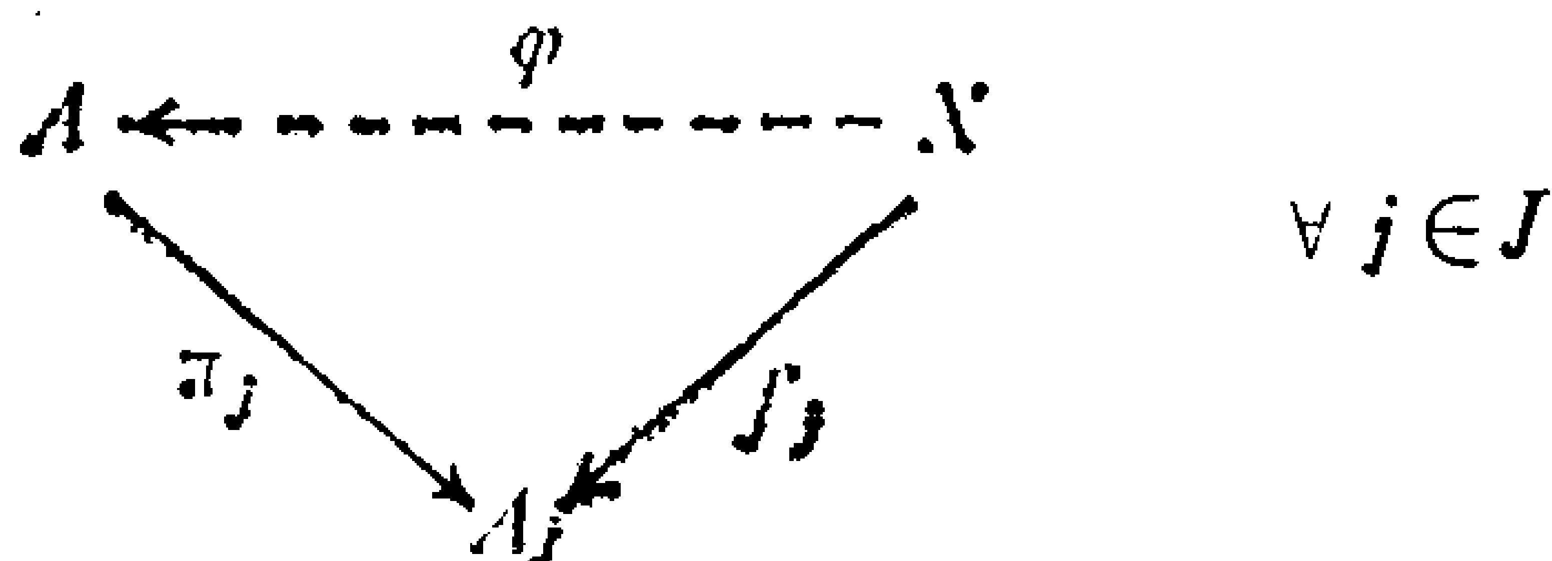
其中补出的φ是左R-映射。

证 若左R-映射φ存在，则由$p_j\varphi = f_j$，$\forall\ j\in J$知当$x\in X$时，$\varphi(x) = (\cdots, f_\alpha(x), \cdots, f_\beta(x), \cdots)$，故$\varphi$唯一。由此又可知命$\varphi: X\longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$是$x\longmapsto (\cdots, f_\alpha(x), \cdots, f_\beta(x), \cdots)$，则$\varphi$是左$R$-映射，且使上图交换：$p_j\varphi = f_j$，$\forall\ j\in J$。

进一步还有下面定理。

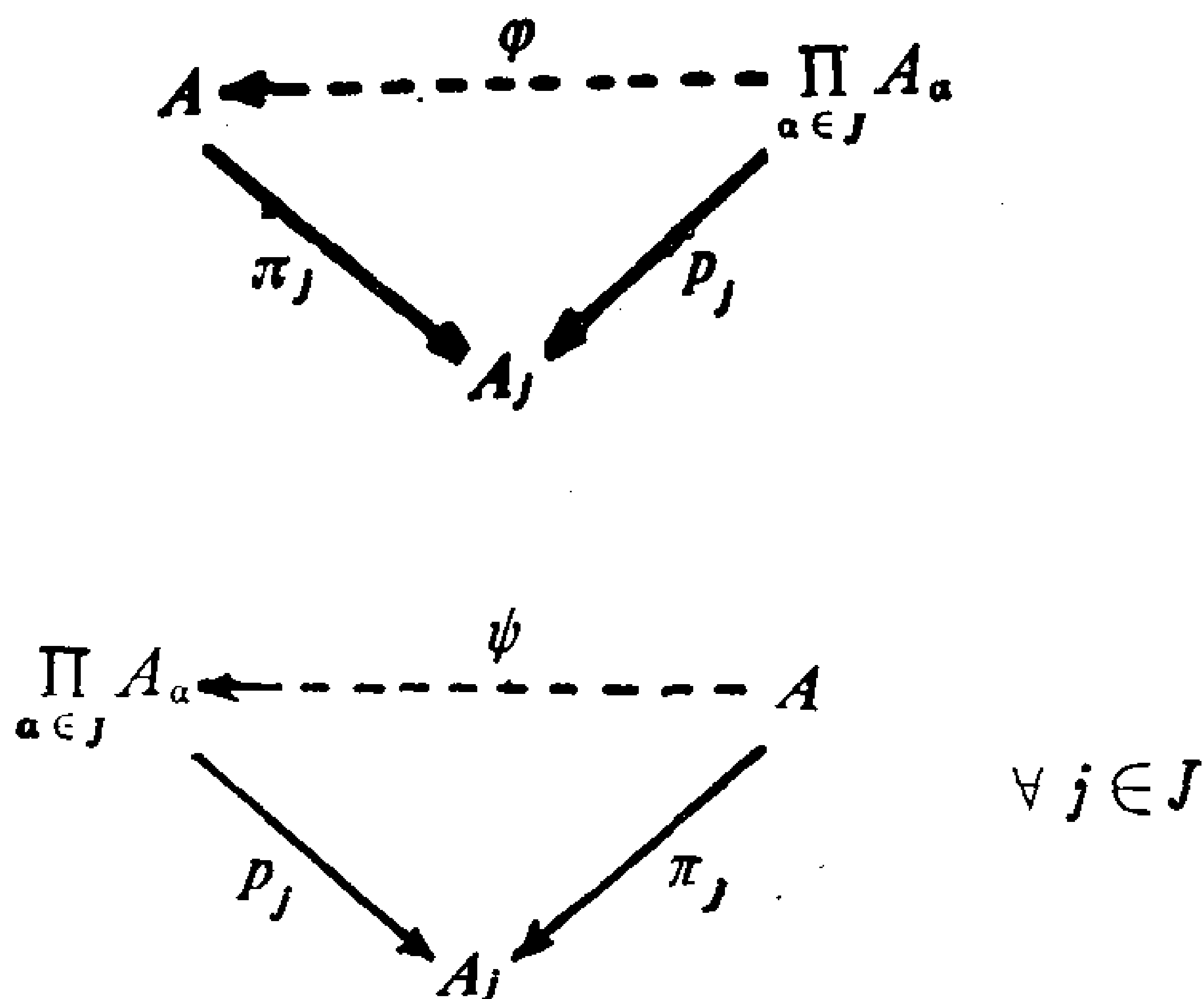
定理1.5 设$\{A_\alpha \mid \alpha\in J\}$是一集左$R$-模，$A$是一个左$R$-模，则$A\simeq \prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$，当且仅当存在一集左$R$-映射$\{\pi_j: A\longrightarrow A_j \mid j\in J\}$

使得对于任何左 R-模 X 及任意一集左 R-映射 $\{f_j: X \longrightarrow A_j \mid j \in J\}$，恒可唯一地补成交换图



其中补出的 φ 是左 R-映射。

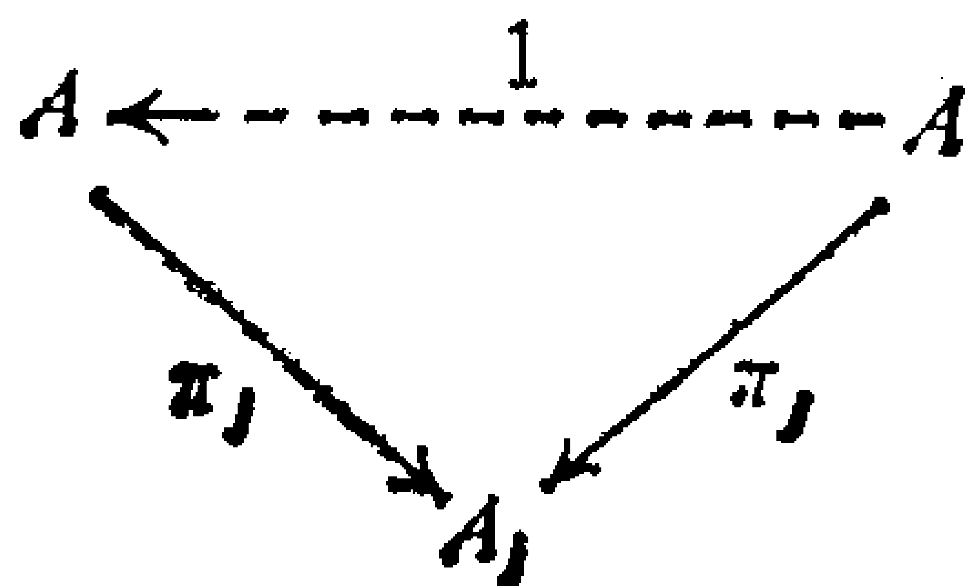
证 若满足要求的 $\{\pi_j: A \longrightarrow A_j \mid j \in J\}$ 存在，则有交换图

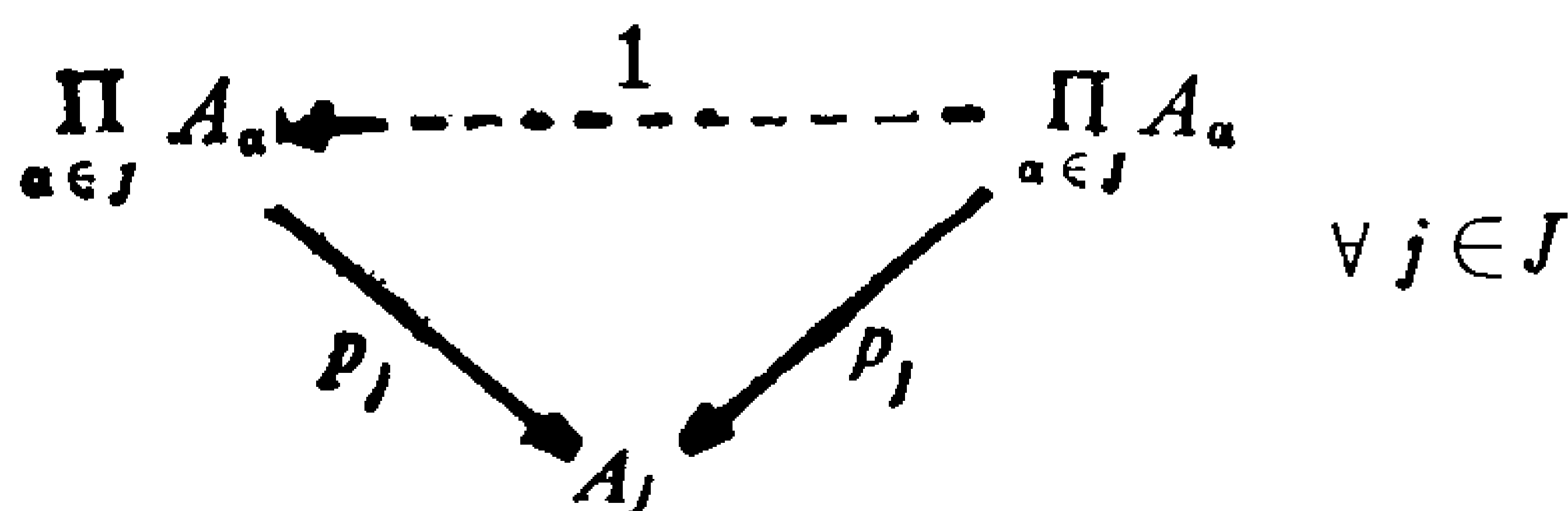


其中 φ 及 ψ 皆是左 R-映射。因此有

$$\pi_j(\varphi\psi) = \pi_j, \quad p_j(\varphi\psi) = p_j, \quad \forall\, j \in J.$$

于是由交换图





知$\varphi\psi=1$，$\psi\varphi=1$，故 $A\cong\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$。

反之，若$A\overset{\psi}{\cong}\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$，则命$\pi_j=p_j\psi$，$\forall j\in J$，即知 $\{\pi_j: A\longrightarrow A_j \mid j\in J\}$满足定理的要求。

现在我们介绍模的直和。

设已给一集左R-模$\{A_\alpha \mid \alpha\in J\}$。命

$$M=\left\{\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}A_\alpha \mid \text{几乎所有}x_\alpha=0\right\},$$

则易知M是$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$的子模，叫做 $\{A_\alpha \mid \alpha\in J\}$ 的外直和，记作 $\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$。

设A是一个左R-模。当α是非零基数时，α个A的外直和记作$A^{(\alpha)}$。又，约定$A^{(0)}=0$。

明显看出，当J是有限集时，$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha=\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$。若$J=\{1, 2, \cdots, n\}$，也记$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$为$\bigoplus_{i=1}^{n}A_i$或$A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$。

当$j\in J$时，p_j在$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$上的限制仍用$p_j$来记，叫做$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$到$A_j$的投射。

当$j\in J$时，由于$\mathrm{im}\lambda_j\subseteq\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$，故$\lambda_j$同时可以当作$A_j$到$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$的映射，叫做$A_j$到$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$的入射。易知有

$$p_j\lambda_k=\delta_{jk}1_{A_j},\quad \forall\, j,k\in J;$$

$$\sum_{j\in J}\lambda_j p_j=1$$

$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$也具有一种泛性质，即有下面定理。

定理1.6　设$\{A_\alpha\mid\alpha\in J\}$是一集左$R$-模，则对任何左$R$-模$X$及任意一集左$R$-映射$\{f_j\colon A_j\longrightarrow X\mid j\in J\}$，恒可唯一地补成交换图

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & X \\ {\scriptstyle\lambda_j}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle f_j} \\ & A_j & \end{array}\qquad \forall\, j\in J,$$

其中补出的φ是左R-映射。

其证明与直积情形类似，请读者自己证明。

同样，进一步还有下面定理。

定理1.7　设$\{A_\alpha\mid\alpha\in J\}$是一集左$R$-模，$A$是一个左$R$-模，则$A\cong\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$，当且仅当存在一集左$R$-映射$\{l_j\colon A_j\longrightarrow A\mid j\in J\}$使得对于任何左$R$-模$X$及任意一集左$R$-映射$\{f_j\colon A_j\longrightarrow X\mid j\in J$恒可唯一地补成交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & X \\ {\scriptstyle l_j}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle f_j} \\ & A_j & \end{array}\qquad \forall\, j\in J,$$

其中补出的φ是左R-映射。

其证明也与直积情形类似，请读者自己证明。

与子空间的直和概念类似，有子模的内直和的概念。

首先我们给出无关子模的概念。设$\{A_\alpha\mid\alpha\in J\}$是左$R$-模$M$

的一集子模。若

$$A_\beta \cap \sum_{\substack{\alpha\in J\\ \alpha\neq\beta}} A_\alpha = 0, \quad \forall \beta\in J,$$

则称$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$是一集无关子模。

当$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$是左$R$-模$M$的一集无关子模时，$\sum\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ 叫做$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$ 的内直和，记作$\sum\limits_{\alpha\in J}{}^{\bullet} A_\alpha$。

回想起$\sum\limits_{\alpha\in J} A_\alpha = \{\sum\limits_{\alpha\in J} x_\alpha | x_\alpha\in A_\alpha$，且几乎所有$x_\alpha = 0\}$，因此容易知道，$\sum\limits_{\alpha\in J} A_\alpha = \sum\limits_{\alpha\in J}{}^{\bullet} A_\alpha$，当且仅当由$\sum\limits_{\alpha\in J} x_\alpha = 0$ 必有 $x_\alpha = 0$，$\forall \alpha\in J$。从而又可知，当$\sum\limits_{\alpha\in J} A_\alpha = \sum\limits_{\alpha\in J}{}^{\bullet} A_\alpha$时，$\sum\limits_{\alpha\in J} x_\alpha = \sum\limits_{\alpha\in J} y_\alpha$，当且仅当$x_\alpha = y_\alpha$，$\forall \alpha\in J$。

子模$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$的内直和$\sum\limits_{\alpha\in J}{}^{\bullet} A_\alpha$ 与外直和$\bigoplus\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ 有着密切的联系。首先，外直和可以当作内直和，这是因为明显有

$$\bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha = \sum_{\alpha\in J}{}^{\bullet} \mathrm{im}\lambda_\alpha, \quad \mathrm{im}\lambda_\alpha \cong A_\alpha, \quad \forall \alpha\in J.$$

另一方面，内直和也可以当作外直和，这是因为命

$$\varphi: \bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha \longrightarrow \sum_{\alpha\in J}{}^{\bullet} A_\alpha$$

$$\{x_\alpha\}_{\alpha\in J} \longmapsto \sum_{\alpha\in J} x_\alpha,$$

则立刻知道φ是左R-同构映射，所以$\bigoplus\limits_{\alpha\in J} A_\alpha \cong \sum\limits_{\alpha\in J}{}^{\bullet} A_\alpha$。

因此以后也记$\sum_{\alpha\in J}\cdot A_\alpha=\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$。这样，$\oplus$既作为外直和的记号，也作为内直和的记号。可根据上下文来确定它是外直和还是内直和。

最后，我们再引进一个概念。设已给左R-模M及左R-模N，若存在左R-模W使得

$$M=N\oplus W,$$

则称N是M的一个直和项。

1.5 自由模

我们知道，域F上有限维向量空间$V\neq 0$时必有基，且其任意两个基所含向量的个数必相等。V的任一基所含向量的个数叫做V的维数。现在我们将域上有限维向量空间的基的概念推广到环上模的情形。

设M是左R-模，且$M\neq 0$。若M的一个非空子集$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$满足：当$\sum_{\alpha\in J}r_\alpha x_\alpha=0$（其中$r_\alpha\in R$，且几乎所有$r_\alpha=0$）时必有$r_\alpha=0$，$\forall\alpha\in J$，则称$X$是$R$-线性无关的，否则称$X$是$R$-线性相关的。可知，若$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$是$R$-线性无关的，则$x_\alpha\neq 0$，$\forall\alpha\in J$，且当$\alpha\neq\beta$时，必定$x_\alpha\neq x_\beta$。

当左R-模$M\neq 0$时，若M的一个非空子集$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$既是$M$的一个生成系，又是$R$-线性无关的，则称$X$是$M$的一个基。

当左R-模$M=0$时，约定空集ϕ是M的基.

定义1.6 若左R-模M有基，则称M是自由左R-模，或简称自由模。

由定义可知，当M是自由左R-模，且$M\neq 0$时，若$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$是$M$的一个基，则$M$的每一个元素$m$可以唯一地写成

$$m=\sum_{\alpha\in J}r_\alpha x_\alpha,$$

其中$r_\alpha \in R$，且几乎所有$r_\alpha = 0$。

例1.11 左R-模R是自由左R-模，$\{1\}$就是它的一个基。

例1.12 域F上有限维向量空间V是自由左F-模。当$V \neq 0$时，空间V的基就是左F-模V的基。

设M及N都是左R-模，且M是自由左R-模。若$N \cong M$，则易知N也是自由左R-模，且当$X = \{x_\alpha | \alpha \in J\}$是$M$的一个基时，若$\varphi$是$M$到$N$的左$R$-同构映射，则$\{\varphi(x_\alpha) | \alpha \in J\}$是$N$的一个基。

设$\{M_\alpha | \alpha \in J\}$是左$R$-模$M$的一集无关子模，且每一个$M_\alpha$都是自由左$R$-模，则内直和$\bigoplus_{\alpha \in J} M_\alpha$是自由左$R$-模。事实上，设$X_\alpha$是$M_\alpha$的基时，易知$\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$是$\bigoplus_{\alpha \in J} M_\alpha$的基，故$\bigoplus_{\alpha \in J} M_\alpha$是自由左$R$-模。

这样，当$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$是一集自由左$R$-模时，由于外直和$\bigoplus_{\alpha \in J} A_\alpha$ = 内直和$\bigoplus_{\alpha \in J} \mathrm{im}\lambda_\alpha$，$\mathrm{im}\lambda_\alpha \cong A_\alpha$，$\forall \alpha \in J$，而$A_\alpha$是自由左$R$-模，故$\mathrm{im}\lambda_\alpha$是自由左$R$-模，从而内直和$\bigoplus_{\alpha \in J} \mathrm{im}\lambda_\alpha$是自由左$R$-模，所以外直和$\bigoplus_{\alpha \in J} A_\alpha$是自由左$R$-模。

因此，任意一集自由左R-模的直和是自由左R-模。

可以证明，左R-模M是自由左R-模，当且仅当存在基数ξ使

$$M \cong R^{(\xi)}.$$

事实上，当M是自由左R-模时，若$M = 0$，则$M \cong R^{(0)}$。若$M \neq 0$，则可设$X = \{x_\alpha | \alpha \in J\}$是$M$的一个基。易知$M = \bigoplus_{\alpha \in J} Rx_\alpha$。命$\varphi: R \longrightarrow Rx_\alpha$是$r \longmapsto rx_\alpha$，则$\varphi$是左$R$-同构映射，故$Rx_\alpha \cong R$，因此$M \cong R^{(|J|)}$。反之，当存在基数$\xi$使$M \cong R^{(\xi)}$时，若$\xi = 0$，则$M = 0$，从而$M$是自由左$R$-模。若$\xi \neq 0$，则因$R$是自由左$R$-模，且任意一集自由左$R$-模的直和是自由左$R$-模，故$M$是自由左$R$-模。

设M是自由左R-模，且$M\neq0$。若M是$f.g.$模，则M的任一基都是有限集。

事实上，设$M=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$，并设$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$是$M$的任意一个基，则可设

$$a_i=\sum_{j=1}^{t}r_{ij}x_{\alpha_j},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,n.$$

若X是无限集，则有$x_\beta\in X$，且$x_\beta\neq x_{\alpha_j}$，$j=1,2\cdots,t$.

设 $x_\beta=\sum_{i=1}^{n}s_ia_i$，则将有

$$x_\beta=\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n}s_ir_{ij}\right)x_{\alpha_j}$$

这与"X是M的基"矛盾．故X是有限集．

例1.13 命$R=\mathbf{Z}/(6\mathbf{Z})$,则左$R$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$不是自由左$R$-模．

证 因为首先有左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$，故有左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$。易知$a_{n_{\mathbf{Z}}}\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})=2\mathbf{Z}$,故$6\mathbf{Z}\subseteq a_{n_{\mathbf{Z}}}\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$，因此有左$R$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$。若$M$是自由左$R$-模，且$M\neq0$,则因此处环$R$含6个元，可知$M$至少含6个元。现在左$R$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\neq0$，且仅含两个元，故左$R$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$不是自由左$R$-模。

对于任意环来说，虽然未必每一个非零左R-模都是自由左R-模，但是我们有下面定理。

定理1.8 设R是任意环，则对任意非空集$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$，恒存在以$X$为基的自由左$R$-模。

证 首先存在$R^{(|J|)}$，命

$$e_\alpha=\{y_\beta\}_{\beta\in J}\in R^{(|J|)},$$

其中

$$y_\beta=\begin{cases}0,&(\beta\neq\alpha\text{时})\\1,&(\beta=\alpha\text{时})\end{cases}$$

则可知$\{e_\alpha|\alpha\in J\}$是$R^{(|J|)}$的一个基。

再将e_α与x_α等同起来，就得到以X为基的自由左R-模。

自由左R-模的基具有一种泛性质，即有下面定理。

定理1.9（基映射的线性扩充） 设M是自由左R-模。若$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$是$M$的一个基，则对任何左$R$-模$A$及任意映射$f$：$X\longrightarrow A$，恒可唯一地补成交换图：

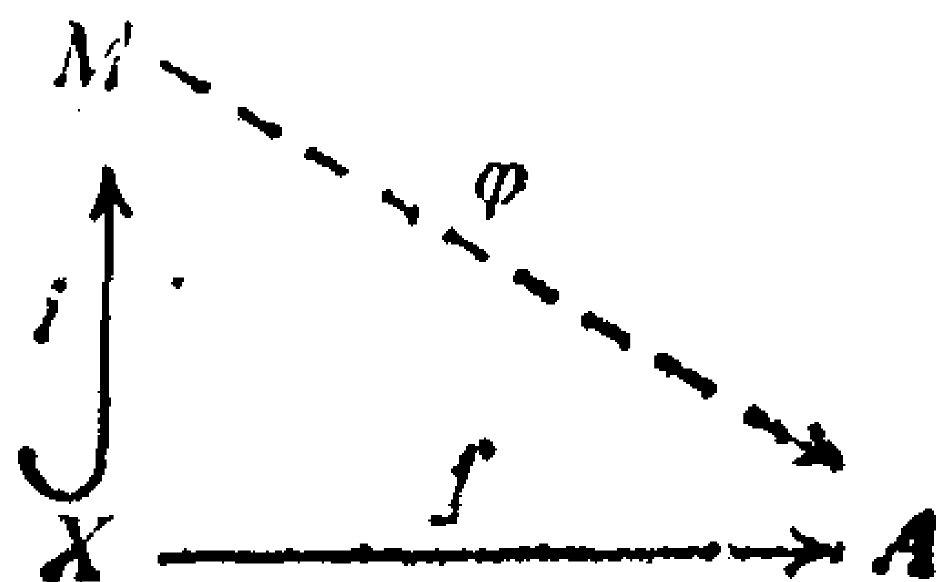


其中补出的φ是左R-映射。

证 若左R-映射φ存在，则$\varphi(x_\alpha)=f(x_\alpha)$，$\forall\alpha\in J$，故$\varphi$唯一。由此又可知，命$\varphi$：$M\longrightarrow A$是$\sum\limits_{\alpha\in J}r_\alpha x_\alpha\longmapsto\sum\limits_{\alpha\in J}r_\alpha f(x_\alpha)$，则$\varphi$是左$R$-映射，且使上图是交换图。

实际上我们还有下面定理。

定理1.10 设M是左R-模，且$M\neq0$。若M的一个非空子集$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$使得对于任何左$R$-模$A$及任意映射$f$：$X\longrightarrow A$，恒可唯一地补成交换图：

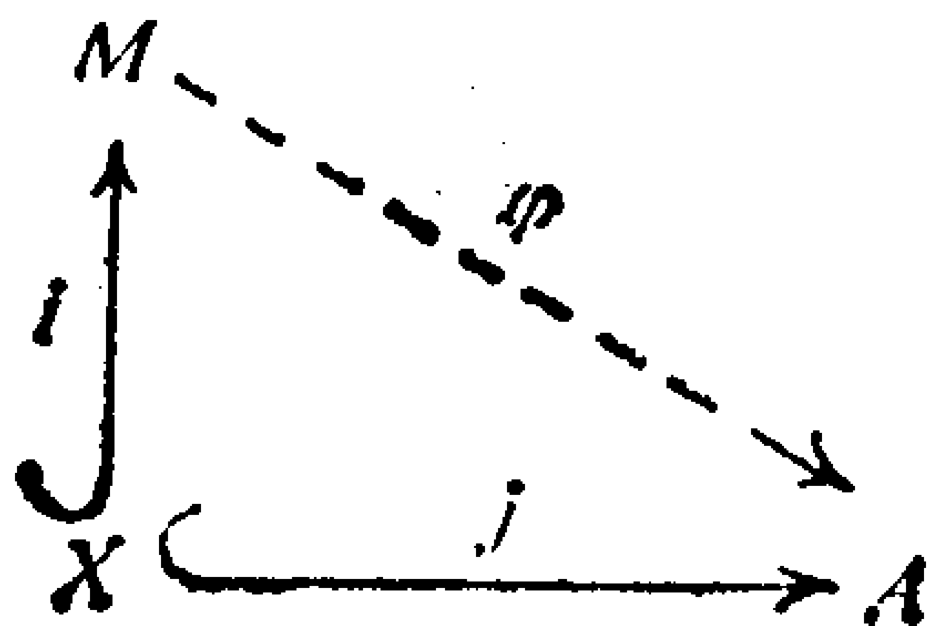


其中补出的φ是左R-映射，则X是M的一个基。

证 由定理1.8知存在以X为基的自由左R-模A，于是可以唯一地补成交换图：



又据已给条件，可以唯一地补成交换图：

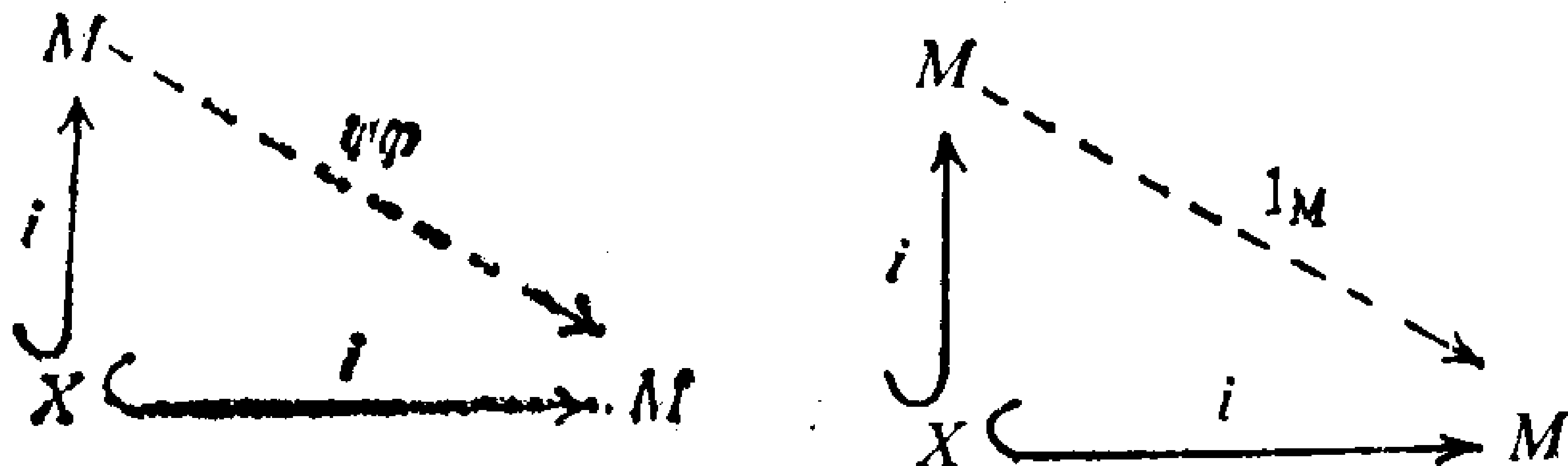


其中补出的ψ及φ都是左R-映射。

于是有

$$(\psi\varphi)i=i,\qquad (\varphi\psi)j=j.$$

这样，由交换图：



及补出的左R-映射的唯一性知 $\psi\varphi=1_M$。

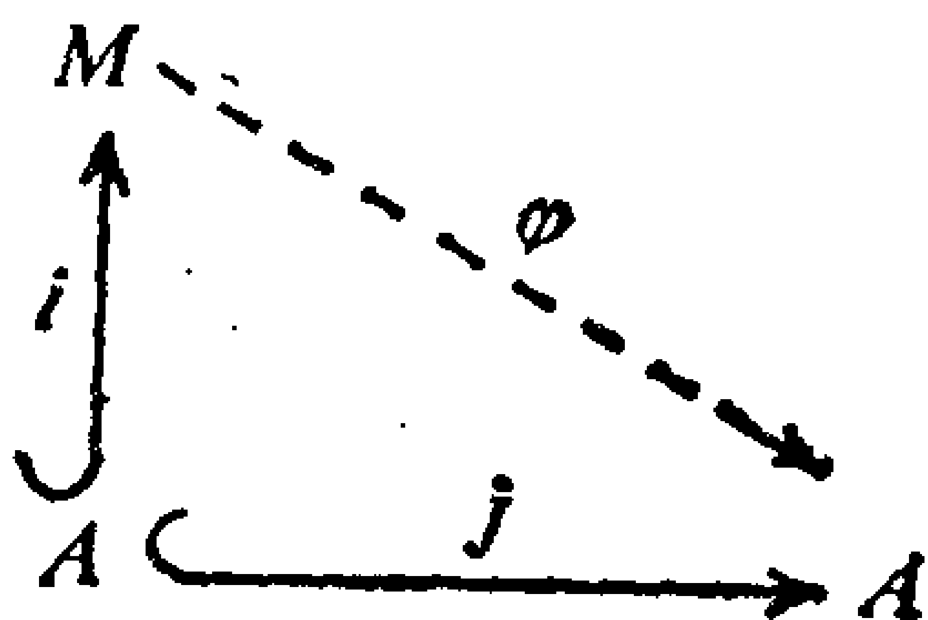
同样可得 $\varphi\psi=1_A$。故ψ: $A\longrightarrow M$ 是左R-同构映射。因此$\{\psi(x_\alpha)\mid\alpha\in J\}$是$M$的一个基。由于$\psi(x_\alpha)=x_\alpha$，$\forall\,\alpha\in J$，所以

X是M的一个基。

由定理 1.9 可以得到下面重要的推论。

推论1.1 任一左R-模恒是一个自由左R-模的一个同态象。

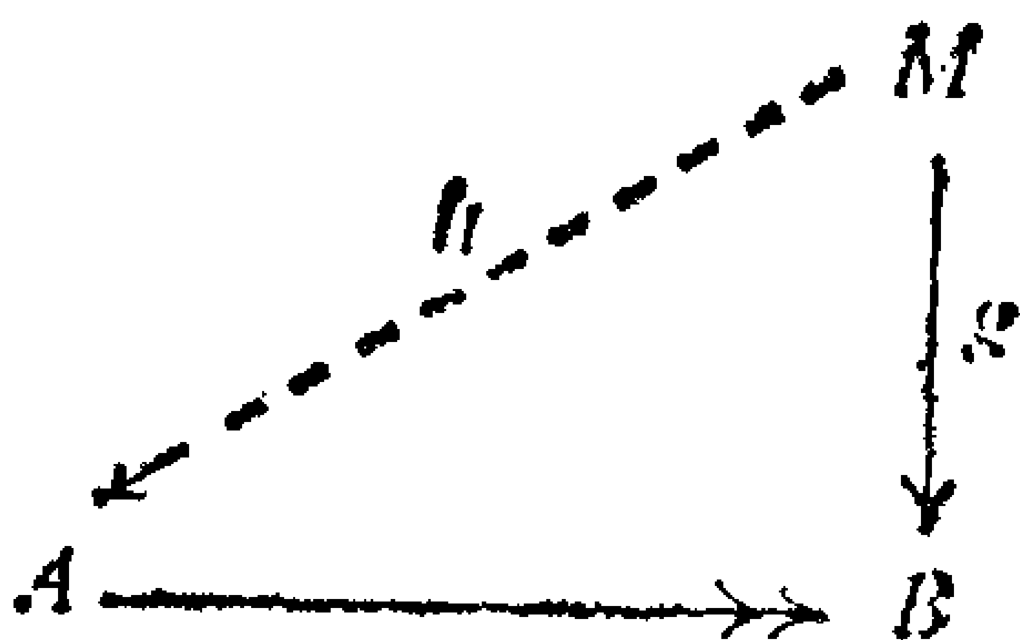
证 设A是一个左R-模. 命M是以集A为基的一个自由左R-模，则可唯一地补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射。易知φ是左R-满射，故A是自由左R-模M的一个同态象。

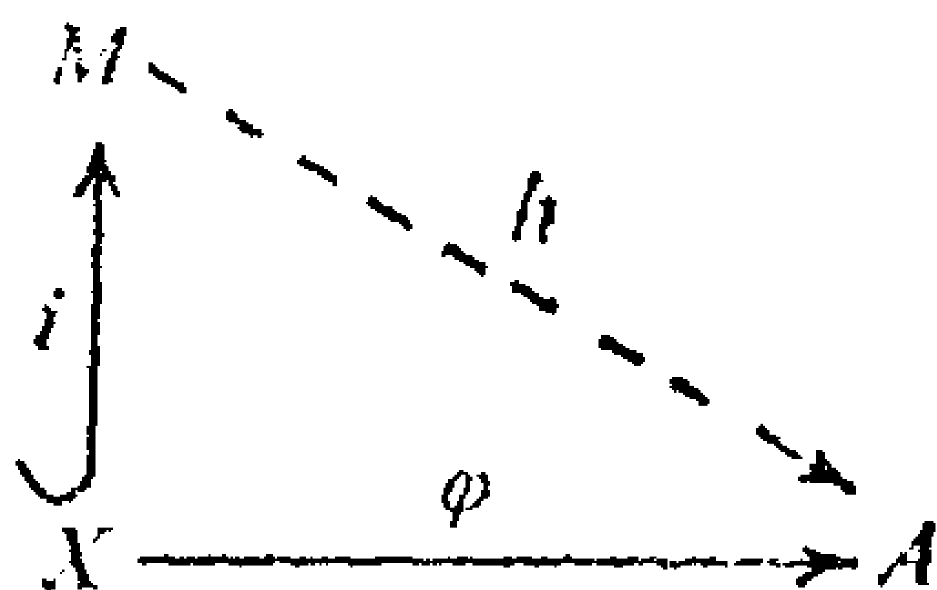
我们指出自由模的一个重要性质，即有下面定理。

定理1.11 若M是自由左R-模，则对任何左R-模A, B，任意左R-满射$f: A \twoheadrightarrow B$及任意左$R$-映射 $g: M \longrightarrow B$，恒可补成交换图.



其中补出的 h 是左R-映射。

证 当$M=0$时 $g=0$，故命 $h=0$ 即可。若$M\neq 0$，则可设$X=\{x_\alpha \mid \alpha\in J\}$是$M$的一个基。对于每一个$x_\alpha\in X$，由于$f$ 是满射，可以取定一个$a_\alpha\in A$使 $f(a_\alpha)=g(x_\alpha)$。命 φ: $X\longrightarrow A$ 是$x_\alpha \longmapsto a_\alpha$，则可唯一地补成交换图：



其中补出的 h 是左R-映射。于是 $fh(x_\alpha)=f\varphi(x_\alpha)=f(a_\alpha)=g(x_\alpha)$，$\forall\alpha\in J$，故$fh=g$。

和域上有限维向量空间的情形不同，对于任意环 R 来说，一个自由左R-模的不同基可能有不同的势。

若每一个自由左R-模的任意两个基都有相同的势，则称R是IBN环。

定理1.12　对于任何环R，若M是自由左R-模且M不是$f.g.$模，则M的任意两个基必有相同的势。

证　因为M不是$f.g.$模，故$M\neq 0$。设

$$E=\{e_\alpha|\alpha\in I\},\quad F=\{f_\beta|\beta\in J\}$$

是M的任意两个基，则因M不是$f.g.$模，可知E及F都是无限集。

当$e_\alpha\in E$时，设

$$e_\alpha=r_1f_{\beta_1}+\cdots+r_tf_{\beta_t},\quad 0\neq r_i\in R,\quad i=1,2,\cdots,t,$$

其中诸f_{β_i}互异，我们称f_{β_i}，$i=1,2,\cdots,t$出现在e_α的表达式中。

当$f_\beta\in F$时，不难证明必存在$e_\alpha\in E$使f_β出现在e_α的表达式中。事实上，若有一个f_β不出现在任何e_α的表达式中，设$f_\beta=\sum_{i=1}^{t}a_ie_{\alpha_i}$，$0\neq a_i\in R$，诸$e_{\alpha_i}$互异，并设$e_{\alpha_i}=\sum_{j=1}^{s}r_{ij}f_{\beta_j}$，$r_{ij}\in R$，

诸f_{β_j}互异，则$f_\beta\neq f_{\beta_j}$，$j=1,2,\cdots,s$。于是$f_\beta=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{t}a_ir_{ij}\right)f_{\beta_j}$。

这与“F是M的基”矛盾。

当$f_\beta\in F$时，可能有不止一个e_α使f_β出现在e_α的表达式中，

但是我们可以指定其中一个e_α。于是命

$$\varphi: \quad F \longrightarrow E$$
$$f_\beta \longmapsto e_\alpha$$

时，φ是映射。

命$E' = \varphi(F)$，并对每一个$e_\alpha \in E'$，命

$$\varphi^{\leftarrow}(e_\alpha) = \{f_\beta \in F \mid \varphi(f_\beta) = e_\alpha\},$$
$$\Gamma = \{\varphi^{\leftarrow}(e_\alpha) \mid e_\alpha \in E'\},$$

则

$$F = \bigcup_{e_\alpha \in E'} \varphi^{\leftarrow}(e_\alpha),$$

且诸$\varphi^{\leftarrow}(e_\alpha)$两两不相交。

因为F是无限集，而对于每一个$e_\alpha \in E'$，明显知$\varphi^{\leftarrow}(e_\alpha)$是有限集，故$\Gamma$是无限集，且有

$$|F| = |\Gamma|.$$

但是$|\Gamma| = |E'| \leqslant |E|$，故

$$|F| \leqslant |E|.$$

因为E及F的地位同等，故也有$|E| \leqslant |F|$。从而$|E| = |F|$。

由这个定理，立刻得到下面推论。

推论1.2 设R是环。若每一个$f.g.$自由左R-模的任意两个基必有相同的势，则R是IBN环。

下面我们将指出两类重要的IBN环。

定理1.13 除环上的模是自由模；除环是IBN环。

证 设R是除环，M是左R-模。

若$M = 0$，则M是自由左R-模。若$M \neq 0$，命

$\Omega = \{X \mid X \subseteq M$，且$X$是$R$-线性无关的$\}$，则$\Omega$不是空集。这是因为当$0 \neq x \in M$时，若$r \in R$使$rx = 0$，则必$r = 0$。事实上若$r \neq 0$，则有$r^{-1} \in R$使$r^{-1}(rx) = 0$，从而$x = 0$，矛盾。因此$\{x\}$是

R-线性无关的，故Ω不是空集。

对于X，$Y\in\Omega$，规定$X\leqslant Y$当且仅当$X\subseteq Y$，则Ω对于$\leqslant$成为偏序集。

设$\{X_\alpha|\alpha\in J\}$是Ω的一个有序子集。命

$$X=\bigcup_{\alpha\in J}X_\alpha=\{y_t|t\in T\},$$

则$X\subseteq M$。若$\sum\limits_{t\in T}r_ty_t=0$，则因实际上在$\Sigma$中只出现有限个$y_t$，设是$y_{t_1}$，…，$y_{t_n}$，则必存在$\alpha\in J$使$y_{t_1}$，…，$y_{t_n}$都$\in X_\alpha$。因为$X_\alpha$是$R$-线性无关的，故$r_t=0$，$\forall t\in T$。因此$X$是$R$-线性无关的，从而知$\{X_\alpha|\alpha\in J\}$在$\Omega$中有上界$X$。

于是根据Zorn引理知Ω有极大元素。设

$$Y=\{y_\beta|\beta\in\Delta\}$$

是Ω的一个极大元素，则Y首先是R-线性无关的。

当$x\in M$时，若$x\in Y$，则当然$x\in\langle Y\rangle$。若$x\overline{\in}Y$，则由于Y是Ω的极大元素，可知$Y\cup\{x\}$是R-线性相关的。故存在不全为0的$r_0,r_1,\cdots,r_m\in R$使

$$r_1y_{\beta_1}+\cdots+r_my_{\beta_m}+r_0x=0,\quad \beta_i\in\Delta,i=1,2,\cdots,m.$$

因为Y是R-线性无关的，故$r_0\neq0$。故有

$$x=(-r_0^{-1}r_1)y_{\beta_1}+\cdots+(-r_0^{-1}r_m)y_{\beta_m}\in\langle Y\rangle,$$

于是$M=\langle Y\rangle$.因此Y是M的一个基，从而M是自由左R-模。

为了证明除环R是IBN环，根据推论 1.2，只要证明当M是$f.g.$自由左R-模时，M的任意两个基必有相同的势。

若$M=0$，则M的任意两个基的势都是 0 .

今设$M\neq0$，因为M是$f.g.$模，故M的任一基都是有限集。设

$$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$

是M的任意一个基。

我们先证明，若 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n,f_{n+1}\}\subseteq M$，则 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n,f_{n+1}\}$必是$R$-线性相关的。

当$n=1$时，设

$$f_1=r_1e_1,\quad f_2=r_2e_1,$$

若$f_1=0$，则$\{f_1,f_2\}$是R-线性相关的．若$f_1\neq 0$，则$r_1\neq 0$。于是 $e_1=r_1^{-1}f_1$，从而 $f_2=r_2r_1^{-1}f_1$，故 $\{f_1, f_2\}$ 是 R-线性相关的。

假设对$n-1$成立。我们设

$$f_i=r_{i1}e_1+r_{i2}e_2+\cdots+r_{in}e_n,\quad i=1,2,\cdots,n+1$$

若$\{f_1,f_2,\cdots,f_{n+1}\}$是$R$-线性无关的，则$f_1\neq 0$。于是$r_{11},\cdots,r_{1n}$不全为0。无妨认为 $r_{1n}\neq 0$。命

$$f'_1=f_1,$$

$$f'_j=f_j-r_{jn}r_{1n}^{-1}f_1,\quad j=2,\cdots,n+1,$$

则易知 $\{f'_1, f'_2,\cdots, f'_{n+1}\}$ 是R-线性无关的，从而 $\{f'_2,\cdots,f'_{n+1}\}$是R-线性无关的，但明显知

$$\{f'_2,\cdots,f'_{n+1}\}\subseteq\langle e_1,\cdots,e_{n-1}\rangle,$$

故据归纳假设，$\{f'_2,\cdots,f'_{n+1}\}$应是R-线性相关的。这就导出了矛盾。

现在设

$$E=\{e_1,\cdots,e_n\},\quad F=\{f_1,\cdots,f_m\}$$

是M的任意两个基，则由刚才的讨论知$m\leqslant n$，$n\leqslant m$，从而$m=n$。因此除环R是IBN环。

当R是IBN环时，自由左R-模A的任意一个基的势叫做A的秩，记作$\mathrm{rank}_R A$。当$\mathrm{rank}_R A$是有限基数时，称A是有限秩自由左R-模．

最后，我们来证明交换环是IBN环，并指出交换环上有限秩自由模的一个重要性质。为此，先指出交换环上$f.g.$模的两个性质，即有下面两个引理。

引理1.1 设S是交换环，M是$f.g.$左S-模。若J是环S的一

个理想，且$M=JM$，这里$JM=\{$有限和$\sum_i r_i m_i \mid r_i\in J,\ m_i\in M\}$，则存在$a\in J$使

$$(1-a)M=\{(1-a)m \mid m\in M\}=0.$$

证　设$M=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$，则易知可设

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad 诸a_{ij}\in J,\quad i=1,\cdots,n,$$

命

$$I=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1\end{pmatrix}_{n\times n},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad B=I-(a_{ij}),$$

则有$BX=0$。再命B^*是B的伴随矩阵，则由$B^*BX=0$知有$(\det B)X=0$，故$(\det B)x_i=0$，$i=1,2,\cdots,n$.因此$(\det B)M=0$。易知$\det B=1-a$，其中$a\in J$。故$(1-a)M=0$。

引理1.2　设R是交换环，M是$f.g.$左R-模.若β: $M\longrightarrow M$是左R-满射，则β是左R-同构映射。

证　命$S=R[x]$，其中x是R上未定元，且$rx=xr$，$\forall r\in R$，则S是交换环。对于$f(x)\in S$及$m\in M$，定义$f(x)m=f(\beta)(m)$，则易知M成为左S-模，且是$f.g.$左S-模。再命$J=Sx$，则J是S的理想，且$JM\subseteq M$。若$m\in M$，则有$m'\in M$使$\beta(m')=m$，从而$m=\beta(m')=xm'\in JM$，故$M=JM$。于是由引理1.1知有$a\in J$使$(1-a)M=0$。设$a=\sum_{i=1}^{t}r_ix^i$，其中$r_i\in R$，　$i=1,2,\cdots,t$，再命$\gamma=\sum_{i=1}^{t}r_i\beta^{i-1}$，则当$m\in M$时，有$(1-\gamma\beta)(m)=(1-a)m=0$。故$\gamma\beta=1$，因此$\beta$是单射，从而$\beta$是$R$-同构映射。

定理1.14　交换环是IBN环。

证 设R是交换环，并设M是f.g.自由左R-模。若$M=0$，则M的任意两个基有相同的势0。若$M\neq 0$，E及F是M的任意两个基，则E及F都是有限集，故可设

$$E=\{e_1,\cdots,e_m\},\quad F=\{f_1,\cdots,f_n\}.$$

若$m>n$，则命

$$\varphi:\ M\longrightarrow M$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} r_i f_i$$

时，可知φ是左R-满射。于是由引理 1.2 知φ是左R-同构映射，从而 $\ker\varphi=0$，但明显知 $\ker\varphi=\langle e_{n+1},\cdots,e_m\rangle\neq 0$， 矛盾。故$m\leqslant n$。

由于E及F的地位同等，故$n\leqslant m$，从而$m=n$。因此交换环R是IBN环。

定理1.15 设 R 是交换环，A 是有限秩自由左 R-模，且 $\mathrm{rank}_R A=n\geqslant 1$。若$A=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$，则$X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是$A$的一个基。

证 设$W=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是A的一个基。命f：$W\longrightarrow A$ 是$x_i\longmapsto a_i$， $i=1,2,\cdots,n$，则可唯一地补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射。

明显知φ是满射，故据引理1.2知φ是左R-同构映射，从而$\{\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)\}$是$A$的一个基。但 $\varphi(x_i)=a_i$， $i=1,2,\cdots,n$，所以$X=\{a_1,\cdots,a_n\}$是A的一个基。

1.6 模的张量积

设A是右R-模，B是左R-模，并设 $(G, +)$ 是Abel群．若映射$f: A \times B \longrightarrow G, (a, b) \longmapsto f(a, b)$满足

(i) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$， $\forall a_1, a_2 \in A, b \in B$,

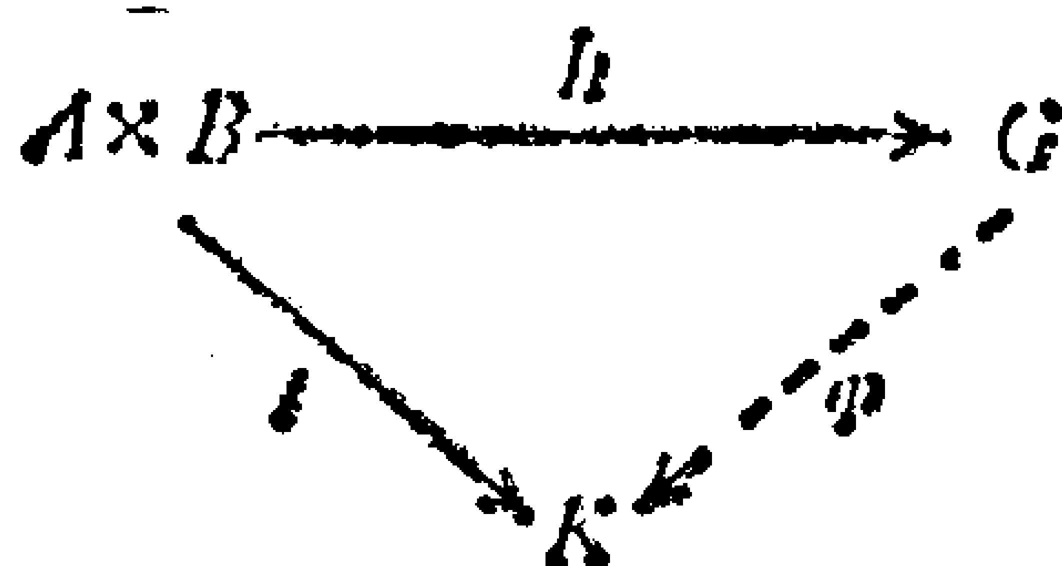
$f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$, $\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$,

(ii) $f(ar, b) = f(a, rb)$， $\forall a \in A, b \in B, r \in R$,

则称f是一个R-双加性函数．

现在我们给出模的张量积的定义．

定义1.7 设已给右R-模A及左R-模B，再设 $(G, +)$ 是Abel群，并设h: $A \times B \longrightarrow G$是一个$R$-双加性函数．若对任何Abel群 $(K, +)$ 及任意R-双加性函数 f: $A \times B \longrightarrow K$，恒可唯一地补成交换图：



其中补出的φ是群同态映射，则称 (G, h) 是右R-模A与左R-模B的一个张量积，也简称G是右R-模A与左R-模B的一个张量积．

定理1.16 对于任何右R-模A及任何左R-模B，右R-模A与左R-模B的张量积恒存在．

证 首先知道存在以$A \times B$为基的自由左$\mathbf{Z}$-模F，然后命S是Abel群 $(F, +)$ 的由一切形如

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b),$$

$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b'),$$

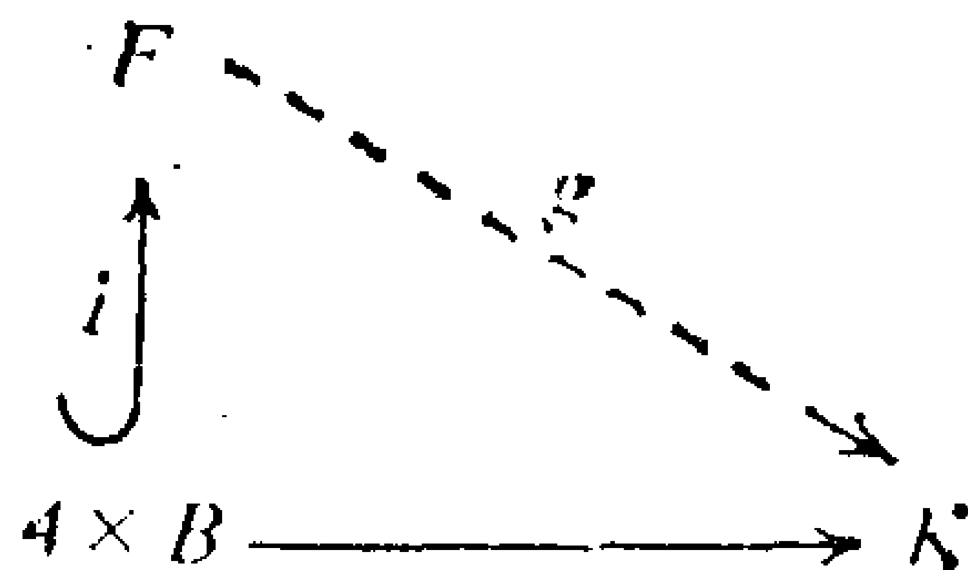
$$(ar,b)-(a,rb)$$

的元素作成的子集所生成的子群。于是得到Abel群 $(F/S,+)$。再命

$$h: A\times B\longrightarrow F/S$$
$$(a,b)\longmapsto (a,b)+S,$$

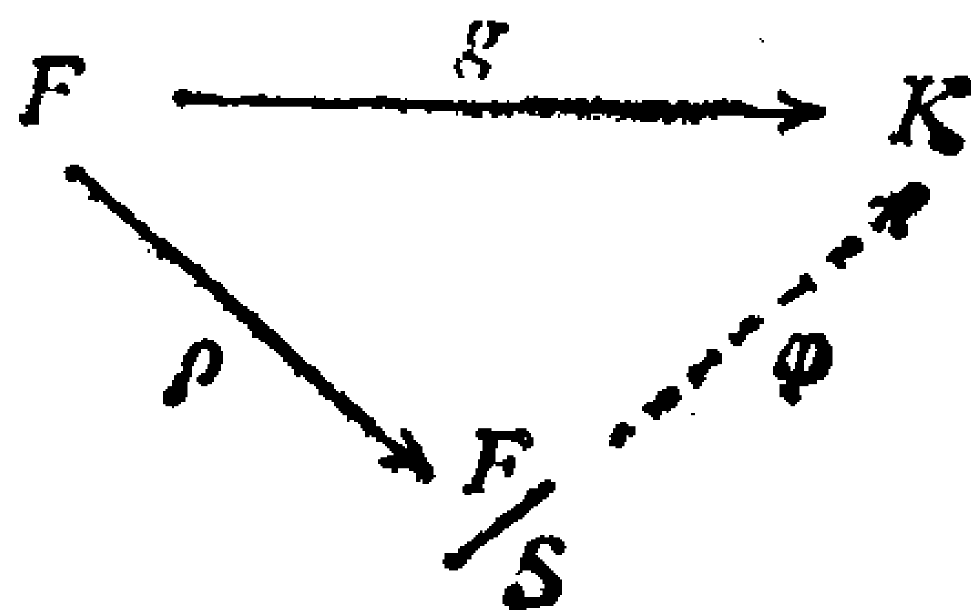
则易知h是R-双加性函数。我们来证明，$(F/S,h)$ 是右R-模A与左R-模B的一个张量积。

为此，设 $(K,+)$ 是任意Abel群，$f: A\times B\longrightarrow K$ 是任意R-双加性函数。因为$A\times B$是自由 $\mathbf{Z}$-模F的基，故可唯一地补成交换图：



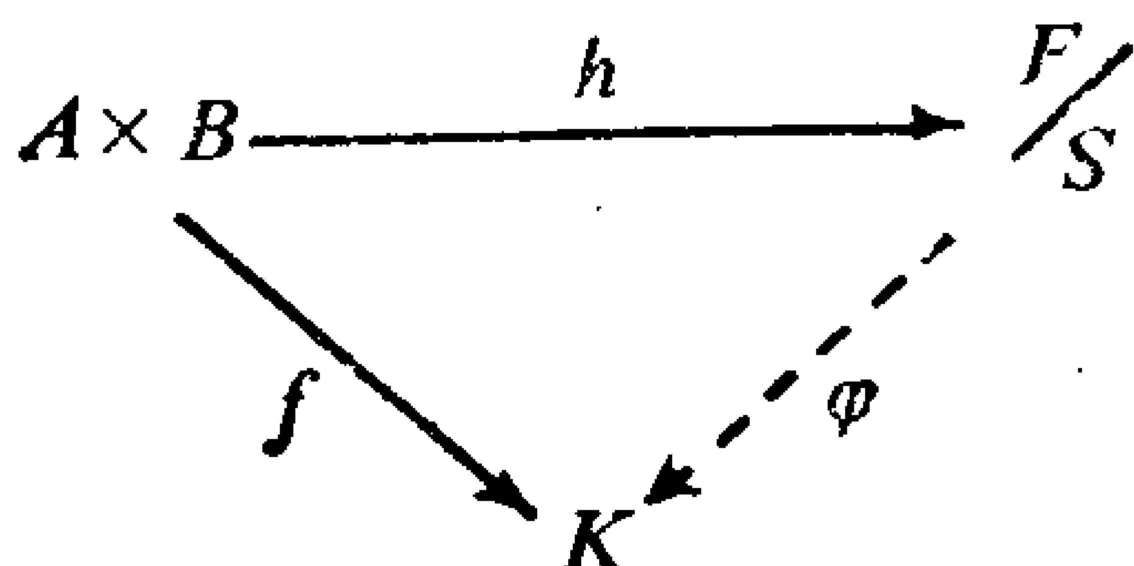
其中补出的g是$\mathbf{Z}$-映射，也即是群同态映射。

由$g((a+a',b)-(a,b)-(a',b))=g(a+a',b)-g(a,b)-g(a',b)=f(a+a',b)-f(a,b)-f(a',b)=0$ 知 $(a+a',b)-(a,b)-(a',b)\in\ker g$。同理，$(a,b+b')-(a,b)-(a,b')$ 及 $(ar,b)-(a,rb)$皆$\in\ker g$，故$S\subseteq\ker g$。因此又可唯一地补成交换图：



其中ρ是自然同态映射，补出的φ是群同态映射。

容易知道下图是交换图：



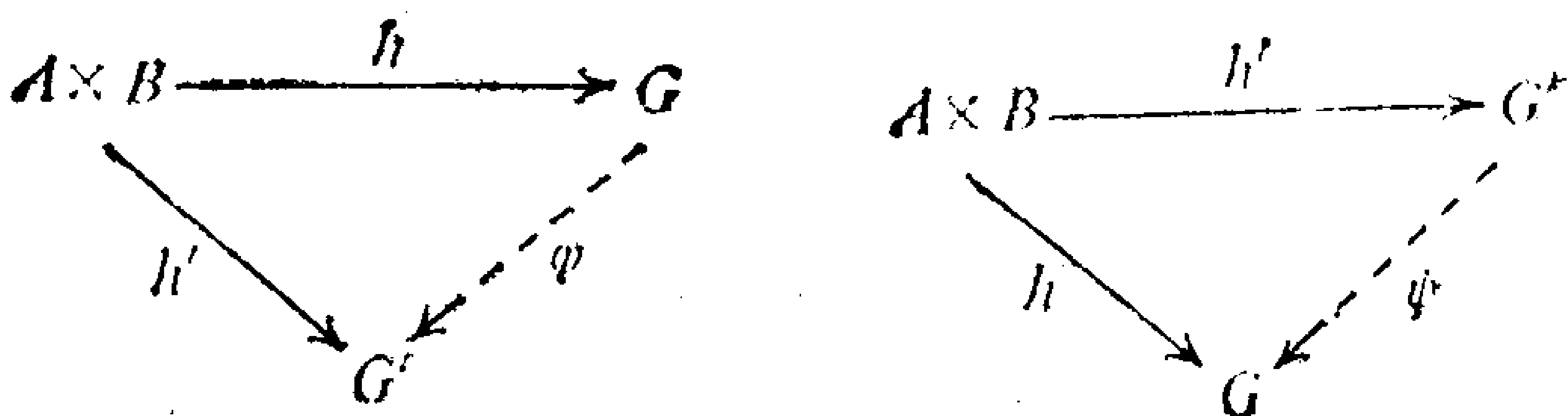
这是因为 $\varphi h(a,b)=\varphi((a,b)+S)=g(a,b)=f(a,b)$，$\forall (a,b) \in A\times B$。

现在只剩下证明这样的φ唯一。为此，设群同态映射 ψ：$F/S \longrightarrow K$满足 $\psi h=f$。则 $\psi h(a,b)=f(a,b)$，故 $\psi((a,b)+S)=f(a,b)$，从而 $\psi\rho(a,b)=g(a,b)$，即 $\psi\rho=g$。故 $\psi=\varphi$。因此，$(F/S,h)$是右R-模A与左R-模B的一个张量积。

在下面定理的意义下，右R-模A与左R-模B的张量积只有一个。

定理1.17　若 (G,h) 及 (G',h') 都是右R-模A与左R-模B的张量积，则存在群同构映射 φ：$G\longrightarrow G'$ 使 $h(a,b)\longmapsto h'(a,b)$。

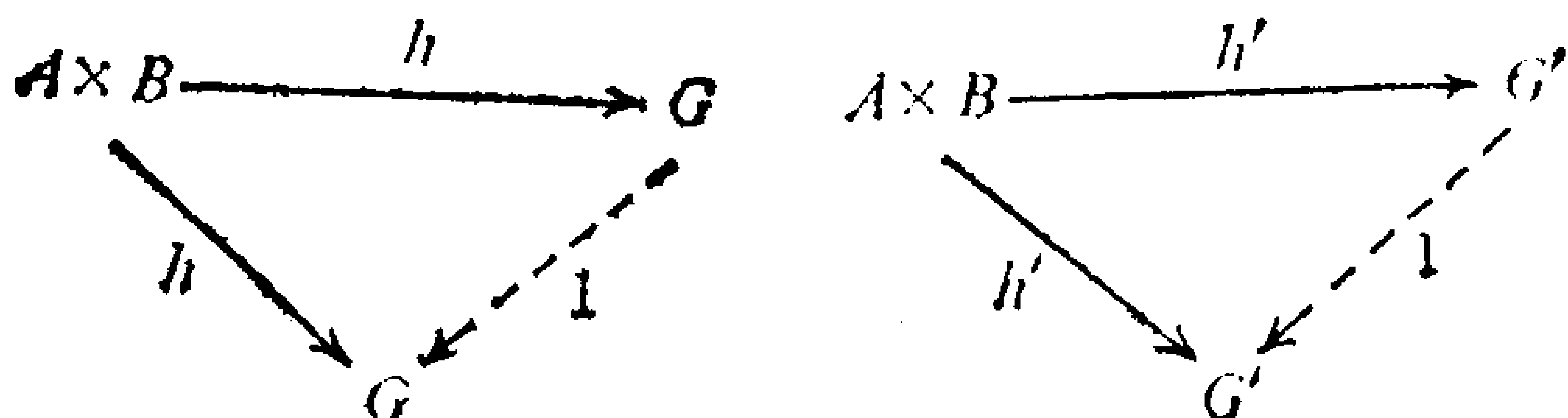
证　因为有交换图：



其中φ及ψ都是群同态映射，故有

$$(\varphi\psi)h'=h',\qquad (\psi\varphi)h=h$$

于是由交换图



知 $\varphi\psi=1$，$\psi\varphi=1$。故φ是群同构映射，且$h(a,b)\longmapsto h'(a,b)$。

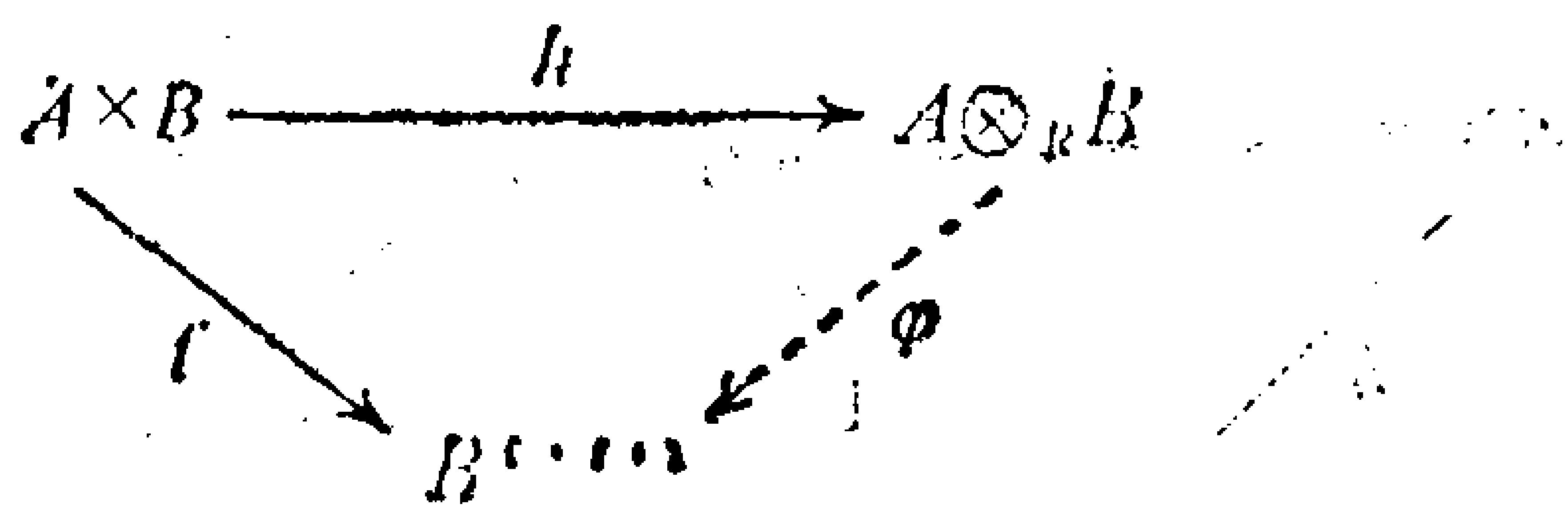
根据这个定理，可以认为右R-模A与左R-模B的张量积是由右R-模A及左R-模B唯一确定的。我们将右R-模 A 与左R-模 B 的张量积记作$A\otimes_R B$，并将$h(a,b)$ 记作$a\otimes b$。

由于h是R-双加性函数，故有

$$(a+a')\otimes b=a\otimes b+a'\otimes b,\quad 0\otimes b=0;$$
$$a\otimes(b+b')=a\otimes b+a\otimes b',\quad a\otimes 0=0;$$
$$ar\otimes b=a\otimes rb,\quad (-a)\otimes b=a\otimes(-b)=-(a\otimes b).$$

根据定理1.17，无妨认为$A\otimes_R B$就是F/S，$a\otimes b$就是$(a,b)+S$。因为 $\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$ 是左 **Z**-模 F 的一个基，故 $\{(a,b)+S|a\in A,b\in B\}$ 是左 **Z**-模 F/S 的一个生成系，也即Abel群F/S的一个生成系，因此，$\{a\otimes b|a\in A,b\in B\}$是Abel群$A\otimes_R B$的一个生成系，且 $A\otimes_R B=\{$有限和$\sum\limits_i a_i\otimes b_i\ |\ a_i\in A,$ $b_i\in B\}$。但是当$\sum\limits_{i=1}^n a_i\otimes b_i=\sum\limits_{i=1}^m a'_i\otimes b'_i$时，未必$m=n$，$a'_i=a_i$，$b'_i=b_i$。

当A是自由右R-模，有基$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$时，则首先易知 $A\otimes_R B=\{\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha|b_\alpha\in B$，且几乎所有 $b_\alpha=0\}$。又，若 $\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha=0$，则由交换图：



这里$h(a,b)=a\otimes b$，$f(\sum_{\alpha\in J}x_\alpha r_\alpha, b)=\sum_{\alpha\in J}\lambda_\alpha(r_\alpha b)$，其中 λ_α：$B\longrightarrow B^{(|J|)}$是 $b\longmapsto(\cdots,0,\cdots,\overset{(\alpha)}{b},\cdots,0,\cdots)$，补出的$\varphi$是群同态映射，可知

$$\varphi(\sum_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha)=(\cdots,b_\alpha,\cdots,b_\beta,\cdots).$$

因为 $\varphi(\sum_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha)=0$，故$b_\alpha=0$，$\forall\,\alpha\in J$。因此$A\otimes_R B$中元素可唯一地表示成$\sum_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha$。

当B是自由左R-模，有基$Y=\{y_\beta|\beta\in K\}$时，类似地可以证明 $A\otimes_R B=\{\sum_{\beta\in K}a_\beta\otimes y_\beta|a_\beta\in A$，且几乎所有 $a_\beta=0\}$，且$A\otimes_R B$中元素可唯一地表示成$\sum_{\beta\in K}a_\beta\otimes y_\beta$。

现在我们给出张量积的一个例子。

例1.14 设R是环。命

$$A=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}\middle|\; x_i\in R,\quad i=1,2,\cdots,m\right\},$$

并定义

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_m+y_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} x_1 r \\ x_2 r \\ \vdots \\ x_m r \end{pmatrix},$$

则A成为右R-模。

命

$$B = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \mid z_i \in R,\ i = 1, 2, \cdots, n\},$$

并定义

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n) + (w_1, w_2, \cdots, w_n)$$
$$= (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \cdots, z_n + w_n),$$
$$r(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$
$$= (rz_1, rz_2, \cdots, rz_n),$$

则B成为左R-模。

命

$$G = M_{m,n}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in R, i = 1, \cdots m;\ j = 1, \cdots, n \right\},$$

并定义

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

则 $(G, +)$ 是Abel群。

最后，命

$$h:\ A \times B \longrightarrow G$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, (y_1, y_2, \cdots y_n)\right) \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} (y_1 y_2 \cdots y_n) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ & \cdots & \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_n \end{pmatrix},$$

则容易验证，(G, h) 是右R-模A与左R-模B的一个张量积。

由此又知有

$$R^{(m)} \otimes_R R^{(n)} = M_{m,n}(R) \cong R^{(mn)}.$$

现在我们引进R-映射的张量积。

定理1.18 设A, A'是右R-模，B, B'是左R-模，并设已给右R-映射$f: A \longrightarrow A'$及左R-映射$g: B \longrightarrow B'$。则存在唯一的群同态映射

$$\varphi: A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B'$$

满足

$$\varphi(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

证 命$h': A \times B \longrightarrow A' \otimes_R B'$是$(a, b) \longmapsto f(a) \otimes g(b)$，则易知$h'$是$R$-双加性函数。于是可以唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{h} & A \otimes_R B \\ & {}_{h'}\searrow & \swarrow_{\varphi} \\ & A' \otimes_R B' & \end{array}$$

其中$h(a, b) = a \otimes b$，补出的φ是群同态映射。可知

$$\varphi(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

又，若群同态映射$\psi: A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B'$ 满足 $\psi(a \otimes b) =$

$f(a)\otimes g(b)$，则因$\{a\otimes b|a\in A, b\in B\}$是$A\otimes_R B$的一个生成系，故$\psi=\varphi$。

定理中由f及g唯一确定的群同态映射φ叫做f与g的张量积，记作$f\otimes g$。于是有

$$(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b),$$
$$(f\otimes g)(\Sigma a_i\otimes b_i)=\Sigma f(a_i)\otimes g(b_i).$$

定理1.19 (i) 设已给右R-映射

$$A\xrightarrow{f}A'\xrightarrow{f'}A''$$

及左R-映射

$$B\xrightarrow{g}B'\xrightarrow{g'}B''$$

则有

$$(f'\otimes g')(f\otimes g)=f'f\otimes g'g;$$

(ii) 设已给右R-映射$f, g: A\longrightarrow A'$及左$R$-映射$\varphi, \psi: B\longrightarrow B'$，则有

$$(f+g)\otimes\varphi=f\otimes\varphi+g\otimes\varphi;$$
$$f\otimes(\varphi+\psi)=f\otimes\varphi+f\otimes\psi.$$

证 (i) 由$(f'\otimes g')(f\otimes g)(a\otimes b)=(f'\otimes g')(f(a)\otimes g(b))=f'f(a)\otimes g'g(b)=(f'f\otimes g'g)(a\otimes b)$即得。

(ii) 由$((f+g)\otimes\varphi)(a\otimes b)=(f+g)(a)\otimes\varphi(b)=(f(a)+g(a))\otimes\varphi(b)=f(a)\otimes\varphi(b)+g(a)\otimes\varphi(b)=(f\otimes\varphi)(a\otimes b)+(g\otimes\varphi)(a\otimes b)=(f\otimes\varphi+g\otimes\varphi)(a\otimes b)$即得$(f+g)\otimes\varphi=f\otimes\varphi+g\otimes\varphi$。

类似地可证得$f\otimes(\varphi+\psi)=f\otimes\varphi+f\otimes\psi$。

按张量积的定义，$A\otimes_R B$是Abel群。当R是交换环时，我们能以一种自然的方式使$A\otimes_R B$成为R-模。

为此，先对$r\in R$，命μ_r: $A\longrightarrow A$是$a\longmapsto ar$，则易知μ_r是右R-映射。于是有群同态映射$\mu_r\otimes 1_B$: $A\otimes_R B\longrightarrow A\otimes_R B$。由于$\mu_{r+s}=\mu_r+\mu_s$，$\mu_{rs}=\mu_r\mu_s$，故$\mu_{r+s}\otimes 1_B=(\mu_r+\mu_s)\otimes 1_B=$

$\mu_r\otimes 1_B+\mu_s\otimes 1_B$，$\mu_{rs}\otimes 1_B=\mu_r\mu_s\otimes 1_B=(\mu_r\otimes 1_B)(\mu_s\otimes 1_B)$. 因此，命$\varphi$: $R\longrightarrow \mathrm{End}(A\otimes_R B)$是$r\longmapsto \mu_r\otimes 1_B$时，$\varphi$是$R$到$A\otimes_R B$的一个表示. 故对$r\in R$及$x\in A\otimes_R B$，定义$rx=(\mu_r\otimes 1_B)(x)$时，即知$A\otimes_R B$成为左$R$-模，且由$r(a\otimes b)=(\mu_r\otimes 1_B)(a\otimes b)$知$r(a\otimes b)=ar\otimes b=a\otimes rb$.

若R不是交换环，则μ_r未必是右R-映射，故不能以上述自然方式使$A\otimes_R B$成为左R-模.

现在我们来考虑当出现双模的情形.

(i) 设已给右R-模A及(R,S)-双模B.

对于$s\in S$，命μ_s: $B\longrightarrow B$是$b\longmapsto bs$，则μ_s是左R-映射，易知$S\longrightarrow \mathrm{End}(A\otimes_R B)$，$s\longmapsto 1_A\otimes\mu_s$是$S$到$A\otimes_R B$的一个反表示. 故对$s\in S$及$x\in A\otimes_R B$，定义$xs=(1_A\otimes\mu_s)(x)$时，$A\otimes_R B$成为右$S$-模，且

$$(a\otimes b)s=a\otimes bs.$$

(ii) 设已给(T,R)-双模A及左R-模B.

对于$t\in T$，命σ_t: $A\longrightarrow A$是$a\longmapsto ta$，则σ_t是右R-映射，易知$T\longrightarrow \mathrm{End}(A\otimes_R B)$，$t\longmapsto \sigma_t\otimes 1_B$是$T$到$A\otimes_R B$的一个表示，故对$t\in T$及$x\in A\otimes_R B$，定义$tx=(\sigma_t\otimes 1_B)(x)$时，$A\otimes_R B$成为左$T$-模，且

$$t(a\otimes b)=ta\otimes b.$$

(iii) 设已给(T,R)-双模A及(R,S)-双模B.

当分别按(i)及(ii)使$A\otimes_R B$成为右S-模及左T-模时，易知$A\otimes_R B$成为(T,S)-双模.

我们指出两个重要的模同构，即有下面定理.

定理1.20 (i) 对于任何左R-模B，必有左R-同构映射φ: $R\otimes_R B\longrightarrow B$满足

$$\varphi(r\otimes b)=rb,\qquad \forall\, r\in R,\ b\in B;$$

(ii) 对于任何右R-模A，必有右R-同构映射ψ: $A\otimes_R R\longrightarrow A$满足

$$\psi(a\otimes r)=ar,\qquad \forall r\in R,\quad a\in A.$$

证 我们只证(i)，完全类似地可以证明(ii)。

命h': $R\times B\longrightarrow B$是 $(r, b)\longmapsto rb$，则易知h'是R-双加性函数。故可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} R\otimes B & \xrightarrow{h} & R\otimes_R B \\ & {\scriptstyle h'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varphi} & \\ & B & \end{array}$$

其中$h(r,b)=r\otimes b$，补出的φ是群同态映射。

因为R是 (R,R)-双模，故 $R\otimes_R B$ 成为左R-模。由于$\varphi(r'(r\otimes b))=\varphi(r'r\otimes b)=r'rb=r'\varphi(r\otimes b)$，故$\varphi$是左$R$-映射。再命$\varphi'$: $B\longrightarrow R\otimes_R B$是$b\longmapsto 1\otimes b$，则知$\varphi\varphi'=1$，$\varphi'\varphi=1$，故$\varphi$: $R\otimes_R B\longrightarrow B$是左$R$-同构映射，且明显知$\varphi(r\otimes b)=rb$。

在一定条件下，张量积可以成为自由模。我们有下面两个定理。

定理1.21 设R是交换环。若A是自由右R-模，且$X=\{x_\alpha|\alpha\in J\}$是$A$的一个基，$B$是自由左$R$-模，且$Y=\{y_\beta|\beta\in K\}$是$B$的一个基，则$\{x_\alpha\otimes y_\beta|\alpha\in J,\beta\in K\}$是左$R$-模$A\otimes_R B$的一个基，从而$A\otimes_R B$是自由左$R$-模。

证 首先$A\otimes_R B$是左R-模，且$A\otimes_R B$的每一个元素可以唯一地表示成$\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha$，其中$b_\alpha\in B$，且几乎所有$b_\alpha=0$。

设$b_\alpha=\sum\limits_{\beta\in k}r_{\alpha\beta}y_\beta$，则$\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes b_\alpha=\sum\limits_{\alpha\in J,\beta\in k}r_{\alpha\beta}(x_\alpha\otimes y_\beta)$，故$\{x_\alpha\otimes y_\beta|\alpha\in J,\beta\in k\}$是左$R$-模$A\otimes_R B$的一个生成系。

若$\sum\limits_{\alpha\in J,\beta\in K}r_{\alpha\beta}(x_\alpha\otimes y_\beta)=0$，则$\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha\otimes\left(\sum\limits_{\beta\in K}r_{\alpha\beta}y_\beta\right)=0$，故

$\sum_{\beta\in K} r_{\alpha\beta} y_\beta = 0, \forall \alpha \in J$。从而 $r_{\alpha\beta}=0$，$\forall \alpha\in J$，$\beta\in K$。因此 $\{x_\alpha\otimes y_\beta \mid \alpha\in J, \beta\in K\}$是左$R$-模$A\otimes_R B$的一个基。

定理1.22 设 R,S 是环，$R\neq 0, S\neq 0$，且R是（R,S）-双模。若A是自由左S-模，且$\{x_\alpha \mid \alpha\in J\}$是自由左$S$-模 A 的一个基，则$\{1\otimes x_\alpha \mid \alpha\in J\}$是左$R$-模$R\otimes_S A$的一个基，其中1是环$R$的单位元。从而$R\otimes_S A$是自由左$R$-模。

证 首先$R\otimes_S A$是左R-模，且 $R\otimes_S A$ 的每一个元素可以唯一地表示成$\sum_{\alpha\in J} r_\alpha\otimes x_\alpha$，其中$r_\alpha\in R$，且几乎所有$r_\alpha=0$。

因为$\sum_{\alpha\in J} r_\alpha\otimes x_\alpha = \sum_{\alpha\in J} r_\alpha(1\otimes x_\alpha)$，故$\{1\otimes x_\alpha \mid \alpha\in J\}$是左$R$-模$R\otimes_S A$的一个生成系。

若$\sum_{\alpha\in J} r_\alpha(1\otimes x_\alpha)=0$，则$\sum_{\alpha\in J} r_\alpha\otimes x_\alpha=0$，故$r_\alpha=0$，$\forall \alpha\in J$。因此$\{1\otimes x_\alpha \mid \alpha\in J\}$是左$R$-模$R\otimes_S A$的一个基。

由定理1.21，可以得到下面重要的定理。

定理1.23 设φ: $S\longrightarrow R$是环同态映射，且$\varphi\neq 0$，若R是IBN环，则S也是IBN环。

证 因为$\varphi\neq 0$，故首先可知$R\neq 0$，$S\neq 0$。

对于$r\in R$及$s\in S$，定义

$$rs = r\varphi(s),$$

则易知R成为右S-模，且是（R,S）-双模。

设A是自由左S-模。若$A=0$，则A的任意两个基有相同的势0。若 $A\neq 0$，设 $E=\{e_\alpha \mid \alpha\in J\}$及$F=\{f_\beta \mid \beta\in K\}$ 是自由左S-模A的任意两个基，则由定理 1.21 知 $\{1\otimes e_\alpha \mid \alpha\in J\}$ 及 $\{1\otimes f_\beta \mid \beta\in K\}$是自由左$R$-模$R\otimes_S A$的两个基。因为 R 是 IBN 环，故$|J|=|K|$。因此S是IBN环。

1.7 正合列

正合列是同调代数中一个重要的概念。

设A'是左R-模A的一个子模，则在

$$A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/A'$$

中，其中ρ是自然同态映射，有

$$\mathrm{im}\, i = \ker \rho.$$

定义1.8 若在三项左R-映射序列

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

中有

$$\mathrm{im} f = \ker g,$$

则称此序列在中间项M处正合。

定义1.9 设已给左R-映射序列

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots,$$

其中左、右两端各可以有限或无限，但要此序列至少含三项。若序列中每相邻三项所组成的序列在中间项处都正合，则称此序列是一个正合列。

容易知道，$M' \xrightarrow{f} M$是左R-单射、左R-满射或左R-同构映射，分别为当且仅当左R-映射序列$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$，$M' \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$或$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$是正合列。

特别，若左R-映射序列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

是正合列，则称此正合列是左R-短正合列。短正合列是同调代数中一个尤其重要的概念。

可知，左R-映射序列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

是短正合列，当且仅当f是左R-单射，g是左R-满射，且 $\mathrm{im}f = \ker g$。

例1.15 左R-映射序列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\rho} M/M' \longrightarrow 0$$

是短正合列，其中ρ是自然同态映射。

例1.16 左R-映射序列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\lambda_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

是短正合列。

现在我们给出一个重要的引理。

引理1.3（五引理） 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow t_1 & & \downarrow t_2 & & \downarrow t_3 & & \downarrow t_4 & & \downarrow t_5 \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5
\end{array},$$

其中上、下两行都是正合列，且每一个正方形都是交换图。则有

(i) 若t_2，t_4都是满射，且t_5是单射，则t_3是满射；

(ii) 若t_2，t_4都是单射，且t_1是满射，则t_3是单射。

证 我们只证(i)。完全类似地可以证明(ii)。

设$b_3 \in B_3$。因为t_4是满射，故有$a_4 \in A_4$使$g_3(b_3) = t_4(a_4)$，从而$g_4g_3(b_3) = g_4t_4(a_4) = t_5f_4(a_4)$。因为图中下面一行是正合列，故$g_4g_3 = 0$，因此 $t_5f_4(a_4) = 0$。因为t_5是单射，故$f_4(a_4) = 0$。于是$a_4 \in \ker f_4 = \mathrm{im}f_3$。故有 $a_3 \in A_3$ 使 $a_4 = f_3(a_3)$，因此 $t_4(a_4) = t_4f_3(a_3) = g_3t_3(a_3)$。但$t_4(a_4) = g_3(b_3)$，故$g_3t_3(a_3) = g_3(b_3)$。因此 $b_3 - t_3(a_3) \in \ker g_3 = \mathrm{im}g_2$，从而有 $b_2 \in B_2$ 使 $b_3 - t_3(a_3) = g_2(b_2)$。因为$t_2$是满射，故有$a_2 \in A_2$使$b_2 = t_2(a_2)$，从而$g_2(b_2) = g_2t_2(a_2)$。于是$b_3 - t_3(a_3) = g_2t_2(a_2) = t_3f_2(a_2)$。因此 $b_3 = t_3(a_3 +$

$f_2(a_2))$，故t_3是满射。

五引理的证法完全是初等的。证明中所用的方法是多次在图中"跟踪追迹"。这种技巧在同调代数中经常使用，通常叫做追图。

由五引理立刻可以得到下面引理。

引理1.4（"短五引理"） 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{k} & N'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中上、下两行都是短正合列，且每一个正方形都是交换图。则当u，v，w中有两个是左R-同构映射时，第三个也必是R-同构映射。

请读者自己证明。

一种重要的短正合列是可裂短正合列。我们先引进可裂R-映射的概念。

定义1.10 设f：$A\longrightarrow B$是左R-映射。若存在左R-映射g：$B\longrightarrow A$使$gf=1_A$，则称f是左可裂的。

容易知道，当左R-映射f左可裂时，f必是单射。但反之未必。我们有下面定理。

定理1.24 设f：$A\longrightarrow B$是左R-单射，则f左可裂，当且仅当$\mathrm{im}f$是左R-模B的一个直和项。

证 设f左可裂，则有左R-映射g：$B\longrightarrow A$使$gf=1_A$。不难证明，有

$$B=\mathrm{im}f\oplus\ker g.$$

事实上，当$b\in B$时，由$b=f(g(b))+(b-f(g(b)))$及$b-f(g(b))\in\ker g$知$B=\mathrm{im}f+\ker g$。又，当$x\in\mathrm{im}f\cap\ker g$时，有$a\in A$使$x=f(a)$，且$g(x)=0$。故$a=gf(a)=0$，从而$x=0$。因此$B=\mathrm{im}f\oplus\ker g$。故$\mathrm{im}f$是左$R$-模$B$的一个直和项。

反之，若B有一个子模C使$B=\mathrm{im}f\oplus C$，则当$b\in B$时有

$b=x+c$，其中$x\in\operatorname{im}f$及$c\in C$由b唯一确定．因为f是单射，故有唯一的$a\in A$使$x=f(a)$。现在命g：$B\longrightarrow A$是$b\longmapsto a$，则易知g是左R-映射，且当$y\in A$时有$g(f(y))=y$，从而$gf=1_A$，故f左可裂。

同样，有右可裂R-映射的概念。

定义1.11 设f：$A\longrightarrow B$是左R-映射。若存在左R-映射g：$B\longrightarrow A$使$fg=1_B$，则称f是右可裂的。

容易知道，当左R-映射f右可裂时，f必是满射。但反之未必。类似地有下面定理。

定理1.25 设f：$A\longrightarrow B$是左R-满射，则f右可裂，当且仅当$\ker f$是左R-模A的一个直和项．

证 设f右可裂，则有左R-映射g：$B\longrightarrow A$使$fg=1_B$．于是g左可裂，故据定理1.24知

$$A=\operatorname{im}g\oplus\ker f,$$

因此$\ker f$是A的一个直和项。

反之，设A有一个子模C使$A=C\otimes\ker f$。

不难证明，当$b\in B$时，有唯一的$c\in C$使$f(c)=b$。事实上，对于$b\in B$，由于f是满射，故先有$a\in A$使$f(a)=b$，设$a=c+x$，其中$c\in C$，$x\in\ker f$，于是$f(c)=f(a)=b$。若$c,c'\in C$使$f(c)=f(c')=b$，则$c-c'\in C\cap\ker f$，从而$c-c'=0$，故$c=c'$。

现在命g：$B\longrightarrow A$是$b\longmapsto c$，其中$c\in C$满足$f(c)=b$，则易知g是左R-映射，且$fg=1_B$。故f右可裂。

我们给出可裂短正合列的定义。

定义1.12 设左R-映射序列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$$

是短正合列。若g右可裂，则称此短正合列可裂。

容易知道，左R-映射序列

$$0\longrightarrow M_1\xrightarrow{\lambda_1}M_1\oplus M_2\xrightarrow{p_2}M_2\longrightarrow 0$$

是可裂短正合列，这是因为它是短正合列，且左R-映射$\lambda_2: M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$使$p_2\lambda_2 = 1$。

我们也可以用f左可裂来定义可裂短正合列。事实上有下面定理。

定理1.26 设左R-映射序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是短正合列，则g右可裂，当且仅当f左可裂。

证 因为g是左R-满射，故g右可裂当且仅当$\ker g$是B的一个直和项。因为f是左R-单射，故f左可裂当且仅当$\mathrm{im} f$是B的一个直和项。现在$\ker g = \mathrm{im} f$，故g右可裂当且仅当f左可裂。

当左R-映射序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是可裂短正合列时，设左R-映射：$h: B \longrightarrow A$使$hf = 1_A$，左R-映射k：$C \longrightarrow B$使$gk = 1_C$：

$$0 \longrightarrow A \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$$

则由定理1.24的证明可知有

$$B = \mathrm{im} f \oplus \ker h = \mathrm{im} k \oplus \ker g.$$

再利用$\mathrm{im} f = \ker g$，又有

$$B = \ker g \oplus \ker h = \mathrm{im} f \oplus \mathrm{im} k.$$

最后，我们给出左R-映射序列是可裂短正合列的一种刻划，即有下面定理。

定理1.27 设已给左R-映射序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0, \qquad \text{(甲)}$$

则以下条件等价：

(i) （甲）是可裂短正合列；

(ii) 存在左R-同构映射h：$A \oplus C \longrightarrow B$使下图中的两个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda_A} & A\oplus C & \xrightarrow{p_C} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow h & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (乙)$$

(iii) $gf=0$，且存在左R-映射q：$B\longrightarrow A$及j：$C\longrightarrow B$

$$0\longrightarrow A \underset{q}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{j}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C\longrightarrow 0$$

使得

$$qf=1_A,\quad gj=1_C,\qquad qj=0,\quad fq+jg=1_B.$$

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)．因为（甲）是可裂短正合列，故首先有左R-映射j：$C\longrightarrow B$使$gj=1_C$，然后命h：$A\oplus C\longrightarrow B$是$(a,c)\longmapsto f(a)+j(c)$，则易知$h$是左$R$-映射．因为当$a\in A$时，$h\lambda_A(a)=h(a,0)=f(a)$，故$h\lambda_A=f$．因为当$(a,c)\in A\oplus C$时，$gh(a,c)=g(f(a)+j(c))=gj(c)=c=p_C(a,c)$，故$gh=p_C$．因此$h$使图（乙）中每一个正方形都是交换图．又由"短五引理"知h是左R-同构映射．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)．命$j=h\lambda_C$，$q=p_Ah^{-1}$即得．

(iii)$\Longrightarrow$(i)．先由$qf=1_A$知f是左可裂的左R-单射．又由$gj=1_C$知g是右可裂的左R-满射．因为$gf=0$，故$\mathrm{im}f\subseteq\mathrm{ker}g$．当$b\in\mathrm{ker}g$时，由于$b=1_B(b)=(fq+jg)(b)=f(q(b))\in\mathrm{im}f$，故$\mathrm{ker}g\subseteq\mathrm{im}f$，从而$\mathrm{im}f=\mathrm{ker}g$．因此（甲）是短正合列，且是可裂短正合列．

由定理中(i)与(ii)的等价性知，当(甲)是可裂短正合列时，必有$B\cong A\oplus C$，从而知左R-映射序列

$$0\longrightarrow M_1\xrightarrow{\lambda_1}M_1\oplus M_2\xrightarrow{p_2}M_2\longrightarrow 0$$

本质上穷尽了所有可裂短正合列．

§2 范　畴

范畴的概念是S. Maclane及S. Eilenberg在1945年引入的，现在在数学的一些分支中得到越来越多的应用。范畴理论同时研究所有同一种类型的对象（比如可具体化为所有的群，所有的左R-模，所有的拓扑空间等等），以及这些对象之间的联系（比如可具体化为群同态映射，左R-映射，拓扑空间到拓扑空间的连续映射等等）。因此，范畴理论具有高度的概括性和深刻性。例如，K. Morita的模范畴的等价理论可以使人们对于Wedderburn-Artin的单环结构理论有更深入的理解。

2.1　范畴的定义

定义2.1　设已给一批对象。我们用 $\mathrm{obj}\mathscr{C}$来表示所有这些对象所作成的类。又设对于类 $\mathrm{obj}\mathscr{C}$ 中任意两个对象A,B，都有唯一确定的一个集合，这个集合我们用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 来表示。当$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 时，我们称f是A到B的一个态射，用$f: A\longrightarrow B$或$A\xrightarrow{f}B$来表示。A叫做f的源，B叫做f的靶。再设对于类$\mathrm{obj}\mathscr{C}$中任意三个对象A，B,C，当$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 及$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$都不是空集时，都唯一确定了一个映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$$

$$(f,g)\longmapsto gf,$$

gf叫做f与g的积。

如果此外还满足：

$C.1$　当$(A,B)\neq(A',B')$时，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\cap\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A',B')=\phi$；

$C.2$　对于类 $\mathrm{obj}\mathscr{C}$中每一个对象 A，恒存在一个态射$1_A\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$ 使得对于$\mathrm{obj}\mathscr{C}$中任意对象X及任意对象Y，

恒有

$$f1_A=f,\quad \forall f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X),$$

$$1_A g=g,\quad \forall g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,A).$$

$C.3$　当$f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C),h\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,D)$时，恒有

$$(hg)f=h(gf),$$

则称 $(\mathrm{obj}\mathscr{C},\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}},.)$是一个范畴，并简单地用$\mathscr{C}$表示这个范畴.

当$\mathscr{C}$是范畴时，对于$\mathrm{obj}_{\mathscr{C}}$中任意对象$A$，由于有$1_A\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$，故 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)\neq\phi$. 又易知 1_A 是唯一的. 这是因为若 $1'_A\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$ 满足$f1'_A=f,\forall f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$ 及$1'_A g=g$, $\forall g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,A)$，则由$1'_A1_A=1_A$及$1'_A1_A=1'_A$知$1'_A=1_A$.

现在我们给出范畴的一批例子. 这些例子以后常常要用.

例2.1　集范畴 Set

命$\mathrm{obj}\mathscr{C}$由所有的集组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$由集$A$到集$B$的所有映射组成，$gf$是映射$f$与映射$g$的积，则易知$\mathscr{C}$是范畴. 此范畴叫集范畴，用Set表示. 又易知$1_A$恰是集$A$的恒等映射.

例2.2　群范畴G

命$\mathrm{obj}\mathscr{C}$由所有的群组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$由群$A$到群$B$的所有群同态映射组成，$gf$是映射$f$与$g$的积，则易知$\mathscr{C}$是范畴. 此范畴叫群范畴，用$G$表示.

例2.3　左R-模范畴R-mod

命$\mathrm{obj}\mathscr{C}$由所有的左R-模组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$由左$R$-模$A$到左$R$-模$B$的所有左$R$-映射组成，$gf$是映射$f$与$g$的积，则易知$\mathscr{C}$是范畴. 此范畴叫左$R$-模范畴，用$R$-mod来表示.

同样有右R-模范畴 mod-R. 又，$\mathbf{Z}$-mod 及 mod-$\mathbf{Z}$ 也叫Abel群范畴. Abel群范畴用Ab表示.

例2.4　拓扑空间范畴Top

命$\mathrm{obj}\mathscr{C}$由所有的拓扑空间组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$由拓扑空间$A$到拓扑空间$B$的所有连续映射组成，$gf$是映射$f$与$g$的积，则易知

$\mathscr{C}$是范畴。此范畴叫拓扑空间范畴，用Top表示。

例2.5 由拟序集确定的范畴

设 $(I,\leqslant)$ 是一个拟序集，即非空集I的二元关系$\leqslant$满足：(i)$a\leqslant a$，$\forall a\in I$；(ii)由$a\leqslant b$及$b\leqslant c$必有$a\leqslant c$。

命obj$\mathscr{C}$由I的所有元素组成，并命

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b)=\begin{cases}\{\xi_b^a\}, & (若a\leqslant b)\\ \phi\ , & (若a\nleqslant b)\end{cases}$$

这里ξ_b^a纯属一个记号，并规定$\xi_b^a=\xi_d^c$，当且仅当$(a,b)=(c,d)$，再对$a\leqslant b\leqslant c$，规定$\xi_c^b\xi_b^a=\xi_c^a$，则易知$\mathscr{C}$是一个范畴。此范畴叫做由拟序集 $(I,\leqslant)$ 确定的范畴，用I表示。

和集的情形一样定义态射组成交换图及可（唯一地）补成交换图等概念。

回想起前面对于左R-单射及左R-满射的一种刻划，我们可以引进单态射及满态射。设$\mathscr{C}$是范畴，$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$.若对$\mathscr{C}$的任何对象$X$及任何$\varphi$，$\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$，由$f\varphi=f\psi$必有 $\varphi=\psi$，则称f是单态射，记成f：$A\rightarrowtail B$。若对$\mathscr{C}$的任何对象 Y 及任何$\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,Y)$，由$\varphi f=\psi f$必有$\varphi=\psi$，则称$f$是满态射，记成$f$：$A\twoheadrightarrow B$。若存在 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ 使 $fg=1_B$且$gf=1_A$，则称f是等价态射。当$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 是等价态射时，称A与B等价，记作$A\cong B$。

因为当$1_A\varphi=1_A\psi$时有$\varphi=\psi$，故1_A是单态射。当 $\varphi 1_A=\psi 1_A$时有$\varphi=\psi$，故1_A是满态射。又因为有$1_A1_A=1_A$，故1_A是等价态射。

设φ,ψ是两个态射，且$\varphi\psi$有意义。若φ及ψ都是单态射，则当$(\varphi\psi)f=(\varphi\psi)g$时，有$\varphi(\psi f)=\varphi(\psi g)$，故$\psi f=\psi g$，从而又有$f=g$，故 $\varphi\psi$ 是单态射。若 $\varphi\psi$ 是单态射，则当 $\psi f=\psi g$ 时，由于$(\varphi\psi)f=(\varphi\psi)g$，就有$f=g$，故$\psi$是单态射。同样，当$\varphi,\psi$都是满态射时，$\varphi\psi$是满态射。当$\varphi\psi$是满态射时，$\varphi$是满态射。

由于1_A既是单态射又是满态射，故等价态射必定既是单态射

又是满态射。但要注意，一个既单且满的态射未必是等价态射。

设$A\xrightarrow{\varphi}B$及$B\xrightarrow{\psi}C$ 都是等价态射，则有 $B\xrightarrow{\varphi'}A$及$C\xrightarrow{\psi'}B$ 使$\varphi'\varphi=1_A$，$\varphi\varphi'=1_B$，$\psi'\psi=1_B$，$\psi\psi'=1_C$. 于是对于$A\xrightarrow{\psi\varphi}C$，有$C\xrightarrow{\varphi'\psi'}A$使

$$(\varphi'\psi')(\psi\varphi)=\varphi'(\psi'\psi)\varphi=1_A,$$
$$(\psi\varphi)(\varphi'\psi')=\psi(\varphi\varphi')\psi'=1_C,$$

故$\psi\varphi$是等价态射。

由此又可知，两个对象的等价是一种等价关系：因为1_A是等价态射，故$A\cong A$；当$A\cong B$时，设$A\xrightarrow{f}B$是等价态射，则有$B\xrightarrow{g}A$使$fg=1_B$，$gf=1_A$，故 g 也是等价态射，因此 $B\cong A$；当 $A\cong B$且$B\cong C$ 时，设 $A\xrightarrow{\varphi}B$及$B\xrightarrow{\psi}C$是等价态射，则$A\xrightarrow{\psi\varphi}C$是等价态射，因此$A\cong C$。

当$\mathscr{C}=R$-mod时，若f是A到B的一个态射，则根据对于左R-单射及左R-满射的刻划，可知f是 R-mod 中的单态射，当且仅当f是左R-模A到左R-模B的左R-单射；f 是 R-mod 中的满态射，当且仅当f是左R-模A到左R-模B的左R-满射。又，明显知f是R-mod 中的等价态射，当且仅当f是左R-模A到左R-模B的左R-同构映射。

当$\mathscr{C}=$Set时，若f是A到B的一个态射，则由关于映射的知识及范畴中等价态射的定义可知f是Set中的等价态射，当且仅当f是集A到集B的双射。我们来证明，f是Set中的单态射，当且仅当f是集A到集B的单射。事实上，设f是集A到集 B 的单射，若$X\xrightarrow{\varphi,\psi}A$满足$f\varphi=f\psi$，则$f\varphi(x)=f\psi(x)$，$\forall x\in X$，从而$\varphi(x)=\psi(x)$，$\forall x\in X$，故 $\varphi=\psi$。因此f是Set中的单态射。反之，设f是Set中的单态射，若$a_1,a_2\in A$使$f(a_1)=f(a_2)=b\in B$，则命φ: $\{b\}\longrightarrow A$是$b\longmapsto a_1$，ψ: $\{b\}\longrightarrow A$是 $b\longmapsto a_2$ 时就有 $f\varphi=f\psi$，从而$\varphi=\psi$，故$a_1=a_2$。因此f是集A到集B的单射。可以证明，f

是Set中的满态射，当且仅当f是集A到集B的满射。请读者自己证明之。

设$\mathscr{C}$是范畴。若对$\mathscr{C}$的任意两个对象A，B，集$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$都已有加法运算，且已成为Abel群，并且对于任何态射f，g，h，只要加法及乘法是可以实施的，就恒有

$$f(g+h)=fg+fh,$$
$$(g+h)f=gf+hf,$$

则称$\mathscr{C}$是一个预加法范畴。可知R-mod及mod-R都是预加法范畴。

2.2 函　子

众所周知，我们可以通过群同态映射来研究群与群之间的联系，通过左R-映射来研究左R-模与左R-模之间的联系等等。范畴与范畴之间的联系是通过函子来研究的。

定义2.2 设$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$是两个范畴，F是一个法则。如果按照法则F，对于$\mathscr{C}$的每一个对象A，有$\mathscr{D}$的唯一确定的对象$F(A)$与之对应，对于每一个$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$，有唯一确定的$F(f)\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$与之对应，并且当$f,g$可以实施运算$gf$时，恒有

$$F(gf)=F(g)F(f)$$

并有

$$F(1_A)=1_{F(A)}\,,\qquad\forall A\in\mathrm{obj}\mathscr{C}\,,$$

则称F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变函子。

例2.6 设$\mathscr{C}$是范畴，A是$\mathscr{C}$的一个对象。命$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$是一个法则，它对于$\mathscr{C}$的每一个对象$X$，规定$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)(X)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$，并对每一个$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$，规定$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)(f)$: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,Y)$是$\varphi\longmapsto f\varphi$，则易知$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$是$\mathscr{C}$到Set的一个共变函子。以后用$f_*$来记$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)(f)$。因此$f_*(\varphi)=f\varphi$。

当$\mathscr{C}=R$-mod时，由于$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$就是$\mathrm{Hom}_R(A,B)$，因此自然地用 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$来记 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$。容易知道，$\mathrm{Hom}_R(A,-)$不仅是$R$-mod到Set的一个共变函子，而且也是 R-mod到$\mathbf{Z}$-mod $=Ab$的一个共变函子。

例2.7 设A是一个右R-模。命$A\otimes_R$是一个法则，它对于R-mod的每一个对象X，规定$(A\otimes_R)(X)=A\otimes_R X$，并对每一个$f\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)$，规定$(A\otimes_R)(f)=1_A\otimes f$，则易知$A\otimes_R$是$R$-mod到$\mathbf{Z}$-mod的一个共变函子。

类似地，设B是一个左R-模，规定 $(\otimes_R B)(X)=X\otimes_R B$，$(\otimes_R B)(f)=f\otimes 1_B$，则$\otimes_R B$是 mod-$R$ 到mod-$\mathbf{Z}$ 的一个共变函子。

例2.8 设$\mathscr{C}$是范畴。命$1_{\mathscr{C}}$是一个法则，它对于$\mathscr{C}$的每一个对象X，规定 $1_{\mathscr{C}}(X)=X$，并对每一个 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$，规定$1_{\mathscr{C}}(f)=f$，则易知$1_{\mathscr{C}}$是$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的一个共变函子，它叫做$\mathscr{C}$的恒等函子。

在研究群时，除了考虑同态映射，我们有时还考虑反同态映射。类似地，对于范畴来说，除了共变函子以外，还有逆变函子。

定义2.3 设$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$是范畴，F是一个法则。如果按照法则F，对于$\mathscr{C}$的每一个对象X，有$\mathscr{D}$的唯一确定的对象$F(X)$与之对应，并对每一个$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$，有唯一确定的 $F(f)\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(Y),F(X))$与之对应，并且当$f,g$可以实施运算 gf时恒有

$$F(gf)=F(f)F(g),$$

并有

$$F(1_A)=1_{F(A)},\qquad \forall A\in\mathrm{obj}\mathscr{C},$$

则称F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个逆变函子。

例2.9 设$\mathscr{C}$是范畴，B是$\mathscr{C}$的一个对象。命$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)$是一个法则，它对于$\mathscr{C}$的每一个对象$X$，规定$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)(X)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,B)$，并对每一个$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$，规定$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)$

(f): $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,B)$ 是 $\varphi\longmapsto\varphi f$，则易知 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)$是$\mathscr{C}$到Set的一个逆变函子。以后用$f^*$来记$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)(f)$。因此$f^*(\varphi)=\varphi f$。

当$\mathscr{C}=R$-mod时，我们用$\mathrm{Hom}_R(-,B)$来记$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)$。容易知道，$\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 不仅是R-mod到Set 的一个逆变函子，而且也是R-mod到 $\mathbf{Z}$-mod的一个逆变函子。

类似于映射的积，我们可以定义函子的积。

设F是范畴$\mathscr{C}$到范畴$\mathscr{D}$的一个共变或逆变函子，G是$\mathscr{D}$到范畴$\mathscr{E}$的一个共变或逆变函子．对于$\mathscr{C}$的每一个对象X，规定$GF(X)=G(F(X))$，并对每一个$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$，规定$GF(f)=G(F(f))$，则易知当$F,G$皆是共变函子或皆是逆变函子时，$GF$是$\mathscr{C}$到$\mathscr{E}$的一个共变函子；当$F,G$中有一个是共变函子，另一个是逆变函子时，$GF$是$\mathscr{C}$到$\mathscr{E}$的一个逆变函子。

最后，设$\mathscr{C},\mathscr{D}$都是预加法范畴，F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变或逆变函子。若对任何$f,g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$，恒有

$$F(f+g)=F(f)+F(g),$$

则称F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个加法共变函子或加法逆变函子。

2.3　自然变换

现在我们来研究函子与函子之间的关系。

定义2.4　设$\mathscr{C},\mathscr{D}$是两个范畴，E及F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的两个函子，且或者E及F都是共变函子，或者E及F都是逆变函子。若t是一个法则，按照它，对于$\mathscr{C}$的每一个对象A，有唯一确定的$t_A\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E(A),F(A))$，并且当$E$及$F$都是共变函子时，有交换图：

$$\begin{array}{ccc} E(A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ {\scriptstyle E(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Ff)} \\ E(B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}, \qquad \forall\ A\xrightarrow{f}B,$$

当E及F都是逆变函子时，有交换图：

$$\begin{array}{ccc} E(A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ {\scriptstyle E(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ E(B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}, \qquad \forall\ B\xrightarrow{f}A,$$

则称t是E到F的一个自然变换。

当t是E到F的一个自然变换，且每一个t_A都是等价态射时，称t是E到F的一个自然等价，并称E与F自然等价，记作$E\cong F$或$E\overset{t}{\simeq}F$。

例2.10 考虑R-mod到R-mod的函子$R\otimes_R$及恒等函子1，它们都是共变函子。因为对于每一个左R-模A，存在唯一确定的左R-同构映射t_A：$R\otimes_R A\longrightarrow A$满足$r\otimes a\longmapsto ra$，而且容易知道有交换图：

$$\begin{array}{ccc} R\otimes_R A & \xrightarrow{t_A} & A \\ {\scriptstyle 1\otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ R\otimes_R B & \xrightarrow{t_B} & B \end{array}, \qquad \forall\ A\xrightarrow{f}B,$$

因此t是$R\otimes_R$到1的一个自然变换。又因为t是自然等价，所以$R\otimes_R\cong 1$。

例2.11 考虑R-mod到R-mod的函子$\mathrm{Hom}_R(R,-)$及恒等函子1，它们都是共变函子。因为对于每一个左R-模A，存在唯一确定的左R-同构映射t_A: $\mathrm{Hom}_R(R,A)\longrightarrow A$满足$f\longmapsto f(1)$，而且容易知道有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(R,A) & \xrightarrow{t_A} & A \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Hom}_R(R,B) & \xrightarrow{t_B} & B \end{array}, \qquad \forall\ A\xrightarrow{f}B,$$

因此t是$\mathrm{Hom}_R(R,-)$到1的一个自然变换。又因为t是自然等价，所以$\mathrm{Hom}_R(R,-)\cong 1$。

例2.12 命$\mathscr{C}$是域F上所有有限维向量空间作成的范畴，即

$\mathrm{obj}\mathscr{C}$由域F上所有有限维向量空间组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V,W)$由空间$V$到空间$W$的所有线性变换组成，$gf$是映射$f$与$g$的积。再命$V^*$是空间$V$的全体线性函数作成的$F$上有限维向量空间。设$E$是一个法则，它对于$\mathscr{C}$的每一个对象$V$，规定$E(V)=(V^*)^*$，并对每一个$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V,W)$，规定$E(f)$：$(V^*)^*\longrightarrow(W^*)^*$是$h\longmapsto h\varphi_f$，这里$\varphi_f$：$W^*\longrightarrow V^*$是$\xi\longmapsto\xi f$。容易验证$E$是$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的一个共变函子。现在对于$\mathscr{C}$的每一个对象$V$，命$t_V$：$V\longrightarrow(V^*)^*$是$v\longmapsto\overline{v}$，其中$\overline{v}$：$V^*\longrightarrow F$是$\eta\longmapsto\eta(v)$，则可知$t$是$1_{\mathscr{C}}$到$E$的一个自然变换，且$t$是自然等价。因此$1_{\mathscr{C}}\cong E$。

我们又可以定义自然变换的积。

定义2.5　设$\mathscr{C},\mathscr{D}$是范畴，E,F,G是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的三个函子，都是共变的或都是逆变的。再设s是E到F的一个自然变换，t是F到G的一个自然变换。对于$\mathscr{C}$的每一个对象A，命

$$(ts)_A=t_As_A,$$

则易知ts是E到G的一个自然变换，叫做s与t的积。

最后，我们介绍范畴等价的概念。这里只给出定义，不作进一步讨论了。

设$\mathscr{C},\mathscr{D}$是范畴，E是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变函子。若存在$\mathscr{D}$到$\mathscr{C}$的一个共变函子F使得$FE\cong1_{\mathscr{C}}$且$EF\cong1_{\mathscr{D}}$，则称E是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个等价函子，并称$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$等价，记作$\mathscr{C}\cong\mathscr{D}$。

2.4　附加对

现在我们研究函子与函子之间的另一种关系。

定义2.6　设$\mathscr{C},\mathscr{D}$是范畴，F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变函子，G是$\mathscr{D}$到$\mathscr{C}$的一个共变函子。若对于每一对(C,D)，其中C是$\mathscr{C}$的对象，D是$\mathscr{D}$的对象，都有唯一确定的双射

$$\tau_{C,D}:\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C),D)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,G(D)),$$

并且对于变量C,D中的每一个都是自然的，即

(i)　当固定D时，有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(F(C),\ D) & \xrightarrow{\tau_{C,D}} & \mathrm{Hom}_R(C, G(D)) \\ \downarrow F(f)^* & & \downarrow f^* \\ \mathrm{Hom}_S(F(C'), D) & \xrightarrow{\tau_{C',D}} & \mathrm{Hom}_R(C', G(D)), \end{array}$$

$$\forall\ C' \xrightarrow{f} C,$$

(ii) 当固定C时，有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(F(C),\ D) & \xrightarrow{\tau_{C,D}} & \mathrm{Hom}_R(C, G(D)) \\ \downarrow g_* & & \downarrow G(g)_* \\ \mathrm{Hom}_S(F(C), D') & \xrightarrow{\tau_{C,D'}} & \mathrm{Hom}_R(C, G(D')), \end{array}$$

$$\forall\ D \xrightarrow{g} D',$$

则称（F,G）是一个附加对。

作为例子，并作为张量函子与共变 Hom 函子之间的一种重要联系，我们将在第二章中证明，若已给（S,R)-双模B，则（$B\otimes_R$, $\mathrm{Hom}_S(B,-)$)是一个附加对，这里$B\otimes_R$是R-mod 到S-mod的一个共变函子，$\mathrm{Hom}_S(B,-)$是S-mod到R-mod的一个共变函子。

2.5 积及上积

作为模的直积及外直和概念的一般化，我们可以在任意范畴中定义积及上积。

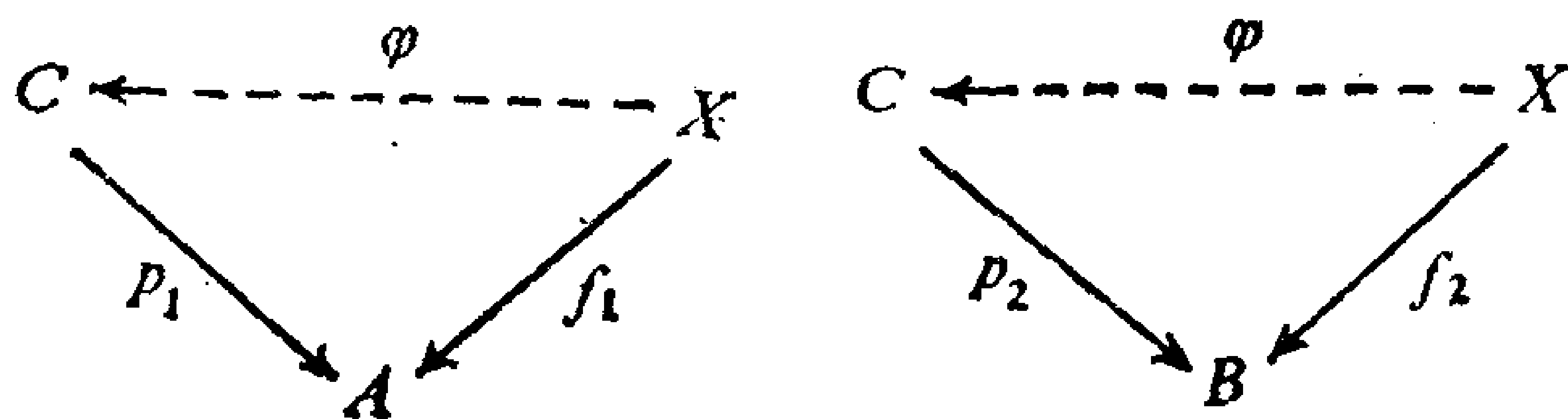
定义2.7 设$\mathscr{C}$是范畴，$\{A_\alpha|\alpha\in J\}$是$\mathscr{C}$的一集对象．若A是$\mathscr{C}$的一个对象，$\{p_\alpha: A\longrightarrow A_\alpha|\alpha\in J\}$是一集态射，它使得对于$\mathscr{C}$的任何对象$X$及任意一集态射$\{f_\alpha: X\longrightarrow A_\alpha|\alpha\in J\}$，恒可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\ \varphi\ } & X \\ & {\scriptstyle p_\alpha}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f_\alpha} & \\ & A_\alpha & \end{array} \qquad , \ \forall\alpha\in J$$

则称$\{A, p_\alpha\}$是$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$的一个积。

当$\mathscr{C} = R$-mod时，命p_α是直积$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$到$A_\alpha$的投射，则$\{\prod_{\alpha \in J} A_\alpha, p_\alpha\}$就是$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$的一个积。

但是对于任意范畴来说，未必每一集对象都有积。例如，命$\mathscr{C}$是所有2元集作成的范畴，即obj$\mathscr{C}$由所有2元集组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$由$A$到$B$的所有映射组成，$gf$是映射$f$与$g$的积。这时$\mathscr{C}$中任意两个对象都没有积。事实上，设$A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$。若$\{C, p_1, p_2\}$是A, B的一个积，其中$p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A)$, $p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, B)$，则对$\mathscr{C}$的任意对象$X$及任意$f_1, f_2$，恒可唯一地补成交换图:



因为总可以适当地取X及f_1, f_2，使f_1, f_2都是满射，故由$p_1\varphi = f_1$及$p_2\varphi = f_2$知p_1及p_2皆是满射。

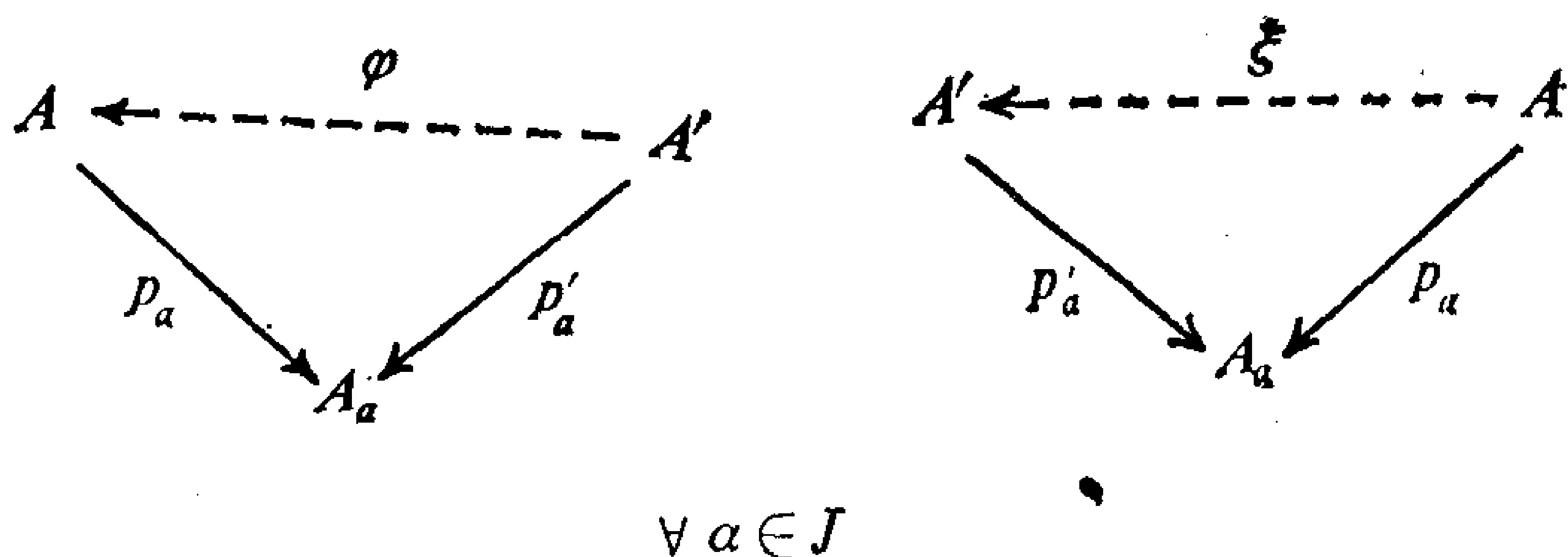
设$C = \{c_1, c_2\}$，且无妨设$p_1(c_1) = a_1$，$p_1(c_2) = a_2$；$p_2(c_1) = b_1$，$p_2(c_2) = b_2$。现在命$X = \{x_1, x_2\}$，并命$f_1(x_1) = f_1(x_2) = a_1$，$f_2(x_1) = f_2(x_2) = b_2$。这时若$\varphi(x_1) = c_1$，则一方面有$p_2\varphi(x_1) = p_2(c_1) = b_1$，另一方面又有$p_2\varphi(x_1) = f_2(x_1) = b_2$，这不可能，因此$\varphi(x_1) = c_2$。但这时将有$p_1\varphi(x_1) = p_1(c_2) = a_2$及$p_1\varphi(x_1) = f_1(x_1) = a_1$。矛盾。故$\{A, B\}$没有积。

虽然对于任意范畴来说，未必每一集对象都有积，但若一集对象有积，则在下面定理的意义下，积只有一个。

定理2.1　设$\mathscr{C}$是范畴，$\{A, p_\alpha\}$及$\{A', p'_\alpha\}$都是$\mathscr{C}$中一集对象$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$的积，则存在唯一的等价态射$\xi$: $A \longrightarrow A'$满足

$p'_\alpha \xi = p_\alpha$, $\forall \alpha \in J$.

证　由交换图

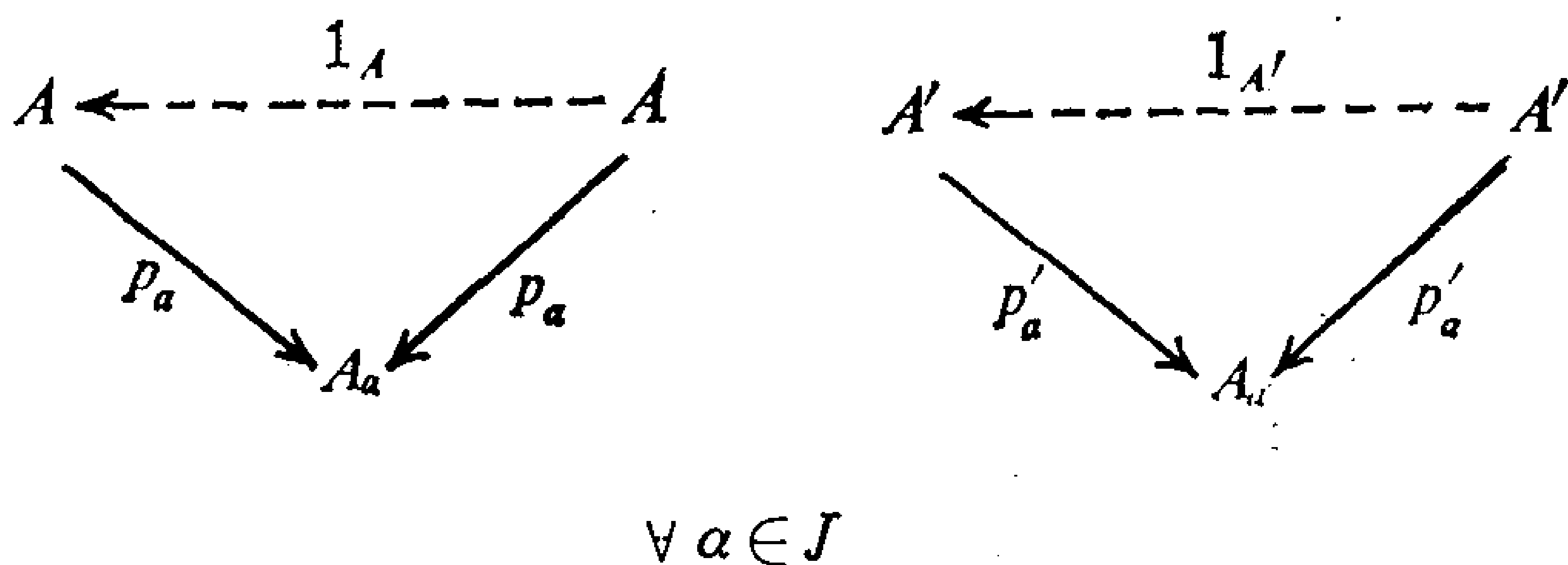


$$\forall \alpha \in J$$

知$p_\alpha \varphi = p'_\alpha$, $p'_\alpha \xi = p_\alpha$,故

$$p_\alpha(\varphi\xi) = p_\alpha, \quad p'_\alpha(\xi\varphi) = p'_\alpha, \quad \forall \alpha \in J.$$

于是由交换图



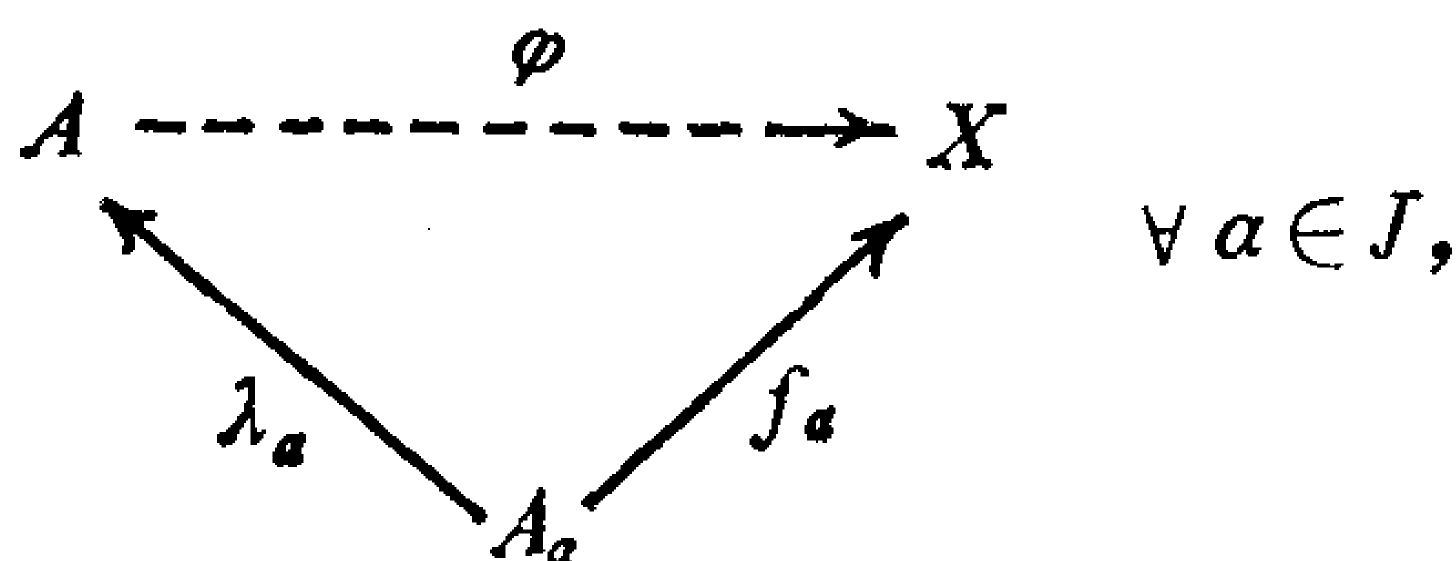
$$\forall \alpha \in J$$

知$\varphi\xi = 1_A$, $\xi\varphi = 1_{A'}$。因此ξ: $A \longrightarrow A'$是等价态射，且满足$p'_\alpha \xi = p_\alpha$, $\forall \alpha \in J$。

因此当$\{A, p_\alpha\}$是$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$的积时，记$A = \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$。

类似地有上积的概念。

定义2.8　设$\mathscr{C}$是范畴，$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$是$\mathscr{C}$的一集对象。若$A$是$\mathscr{C}$的一个对象，$\{\lambda_\alpha: A_\alpha \longrightarrow A | \alpha \in J\}$是一集态射，它使得对于$\mathscr{C}$的任何对象$X$及任意一集态射$\{f_\alpha: A_\alpha \longrightarrow X | \alpha \in J\}$，恒可唯一地补成交换图：



则称$\{A,\lambda_\alpha\}$是$\{A_\alpha|\alpha\in J\}$的一个上积.

当 $\mathscr{C}=R$-mod 时，命λ_α是A_α到外直和$\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha$的入射，则$\{\bigoplus_{\alpha\in J}A_\alpha,\lambda_\alpha\}$就是$\{A_\alpha|\alpha\in J\}$的一个上积.

类似地容易证明下面的定理.

定理2.2 设$\mathscr{C}$是范畴，$\{A,\lambda_\alpha\}$及$\{A',\lambda'_\alpha\}$都是$\mathscr{C}$中一集对象$\{A_\alpha|\alpha\in J\}$的上积，则存在唯一的等价态射 $\xi: A\longrightarrow A'$ 满足$\xi\lambda_\alpha=\lambda'_\alpha$, $\forall\alpha\in J$.

当$\{A,\lambda_\alpha\}$是$\{A_\alpha|\alpha\in J\}$的上积时，记$A=\coprod_{\alpha\in J}A_\alpha$.

2.6 正向极限及逆极限

象定义积及上积时所提出的这种问题叫泛映射问题，积及上积则分别是所说的具体的泛映射问题的解．从前面的论证看出，同一个泛映射问题的任意两个解中的对象都是等价的.

现在我们研究另外两个泛映射问题，它们的解分别叫做正向极限和逆极限．正向极限和逆极限分别包含上积及积作为它们的特殊情形.

我们先引入正向系统的概念.

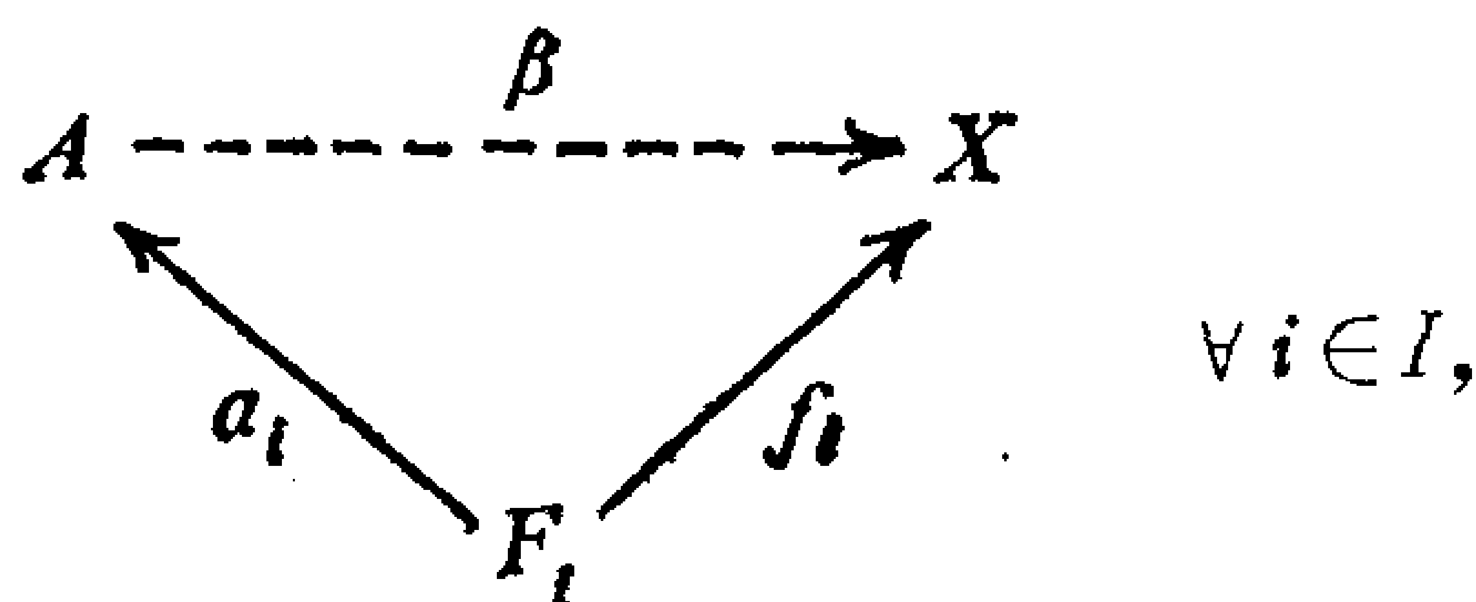
定义2.9 设$\mathscr{C}$是范畴，I是由拟序集$(I,\leqslant)$确定的范畴．I到$\mathscr{C}$的一个共变函子叫做$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的正向系统.

设F是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的正向系统．对于每一个$i\in I$，记$F_i=F(i)$，可知它是$\mathscr{C}$中对象．当$i,j\in I$且$i\leqslant j$时，$\mathrm{Hom}_I(i,j)=\{\xi_i^j\}$，我们记$\varphi_i^j=F(\xi_i^j)$．因为当$i,j,k\in I$且$i\leqslant j\leqslant k$时，

$\xi_k^j\xi_j^i=\xi_k^i$，而F是共变函子，故有$\varphi_k^j\varphi_j^i=\varphi_k^i$。以后我们用$\{F_i, \varphi_j^i\}$来表示$F$。

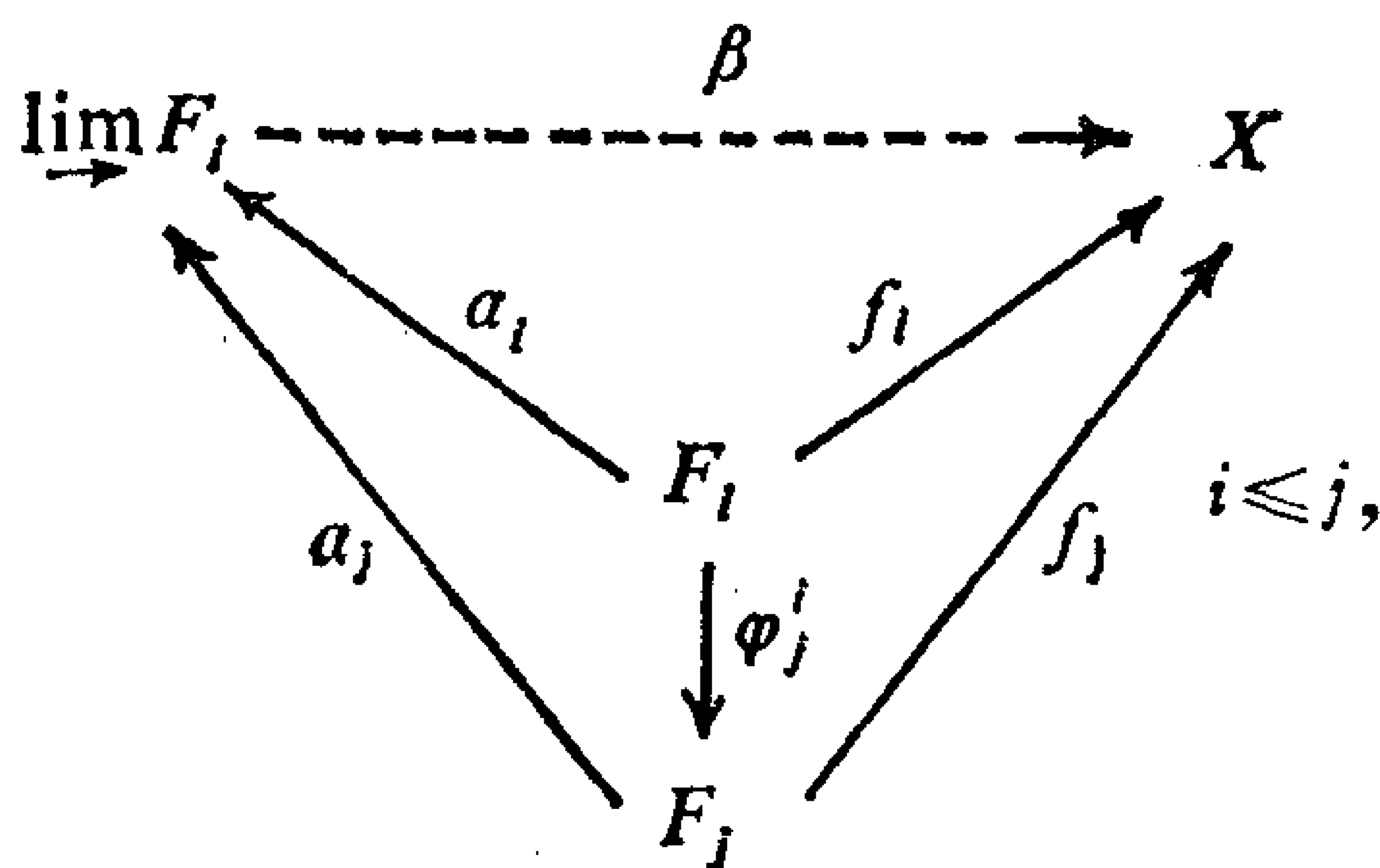
现在我们给出正向极限的定义。

定义2.10　设$\{F_i,\varphi_j^i\}$是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的正向系统。再设A是$\mathscr{C}$的一个对象，$\{\alpha_i: F_i\longrightarrow A|i\in I\}$是一集态射，满足$\alpha_i=\alpha_j\varphi_j^i$，$\forall i\leqslant j$。若$\{A,\alpha_i\}$使得对于$\mathscr{C}$的任何对象$X$及任意一集态射$\{f_i: F_i\longrightarrow X|i\in I\}$（满足$f_i=f_j\varphi_j^i$，$\forall i\leqslant j$），恒可唯一地补成交换图：



则称$\{A,\alpha_i\}$是正向系统$\{F_i,\varphi_j^i\}$的一个正向极限，记作$A=\varinjlim F_i$。

正向系统$\{F_i,\varphi_j^i\}$的正向极限的定义也可图示如下：



图中所有的三角形都是交换图。

例2.13　设$\mathscr{C}$是范畴，$(I,\leqslant)$是平凡拟序集，即$i\leqslant j$当且仅当$i=j$。若$\{F_i, \varphi_j^i\}$是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的正向系统，且$\{F_i|i\in I\}$有上积$\{\coprod_{i\in I}F_i,\lambda_i\}$，则$\{F_i,\varphi_j^i\}$有正向极限，且

$$\varinjlim F_i=\coprod_{i\in I}F_i.$$

证 因为仅有$i\leqslant i$，而$\varphi_i^i=1_{F_i}$，故有$\lambda_i=\lambda_j\varphi_i^j$，$\forall i\leqslant j$。于是对于$\mathscr{C}$的任何对象$X$及任意一集态射$\{f_i: F_i\longrightarrow X\mid i\in I\}$，恒可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc}\coprod_{i\in I}F_i & \overset{\beta}{\dashrightarrow} & X\\ & \nwarrow^{\lambda_i}\quad F_i\quad \nearrow^{f_i} & \end{array}\qquad \forall i\in I,$$

因此 $\varinjlim F_i=\coprod_{i\in I}F_i$。

当 $\mathscr{C}=R$-mod 时，由于每一集左R-模都有外直和，故若$(I,\leqslant)$是平凡拟序集，则R-mod中每一个以I为指标集的正向系统$\{F_i,\varphi_i^j\}$都有正向极限，且$\varinjlim F_i=\bigoplus_{i\in I}F_i$。在第二章中我们还将证明，对于任何拟序集$(I,\leqslant)$，$R$-mod中每一个以$I$为指标集的正向系统都有正向极限。

设$(I,\leqslant)$是拟序集。若对任何$i,j\in I$，恒存在$k\in I$使$i\leqslant k$，$j\leqslant k$，则称$(I,\leqslant)$是正向拟序集。以后常常会遇到以正向拟序集为指标集的正向系统。

例2.14 设已给左R-模M的一列子模

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots,$$

则$\varinjlim A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$。

证 设I是全体自然数作成的集，并设$\leqslant$是普通数的$\leqslant$，则$(I,\leqslant)$是拟序集。对于$i\in I$，命$A(i)=A_i$；并对$i\leqslant j$，命$A(\xi_i^j)$：$A_i\hookrightarrow A_j$，则立刻看出A是I到R-mod的一个共变函子。因此A是R-mod中一个以I为指标集的正向系统。记$\varphi_i^j=A(\xi_i^j)$，则此正

向系统记成$\{A_i,\varphi_j^i\}$。命α_i: $A_i \hookrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，则$\alpha_j\varphi_j^i=\alpha_i$，$\forall i\leqslant j$。

我们证明，$\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \alpha_i\}$是正向系统$\{A_i,\varphi_j^i\}$的正向极限。

为此，设X是任一左R-模，$\{f_i: A_i\longrightarrow X \mid i\in I\}$是任意一集左$R$-映射，但是满足$f_j\varphi_j^i=f_i$，$\forall i\leqslant j$。当$x\in\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$时，必有$i\in I$使$x\in A_i$，从而有$f_i(x)\in X$。若$x\in A_i$，且$x\in A_j$，则因总有$i\leqslant j$或$j\leqslant i$．故不妨设$i\leqslant j$．于是由$f_i=f_j\varphi_j^i$及$\varphi_j^i$: $A_i\hookrightarrow A_j$，知$f_i(x)=f_j(x)$。命β: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\longrightarrow X$是$x\longmapsto f_i(x)$，其中$x\in A_i$，则易知$\beta$是左$R$-映射，且有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i & \xrightarrow{\beta} & X \\ & \nwarrow^{\alpha_i} \quad \nearrow_{f_i} & \\ & A_i & \end{array} \qquad \forall i\in I$$

又易知使上图交换的左R-映射β唯一．故$\varinjlim A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。

例2.15　设M是左R-模．若$\{A_i \mid i\in I\}$是M的所有$f.g.$子模作成的集，则

$$\varinjlim A_i=M.$$

证　对于$i,j\in I$，规定$i\leqslant j$当且仅当$A_i\subseteq A_j$，则易知$(I,\leqslant)$成为正向拟序集。

对于$i,j\in I$，且$i\leqslant j$，命φ_j^i: $A_i\hookrightarrow A_j$，则$\{A_i,\varphi_j^i\}$是R-mod中一个以I为指标集的正向系统。

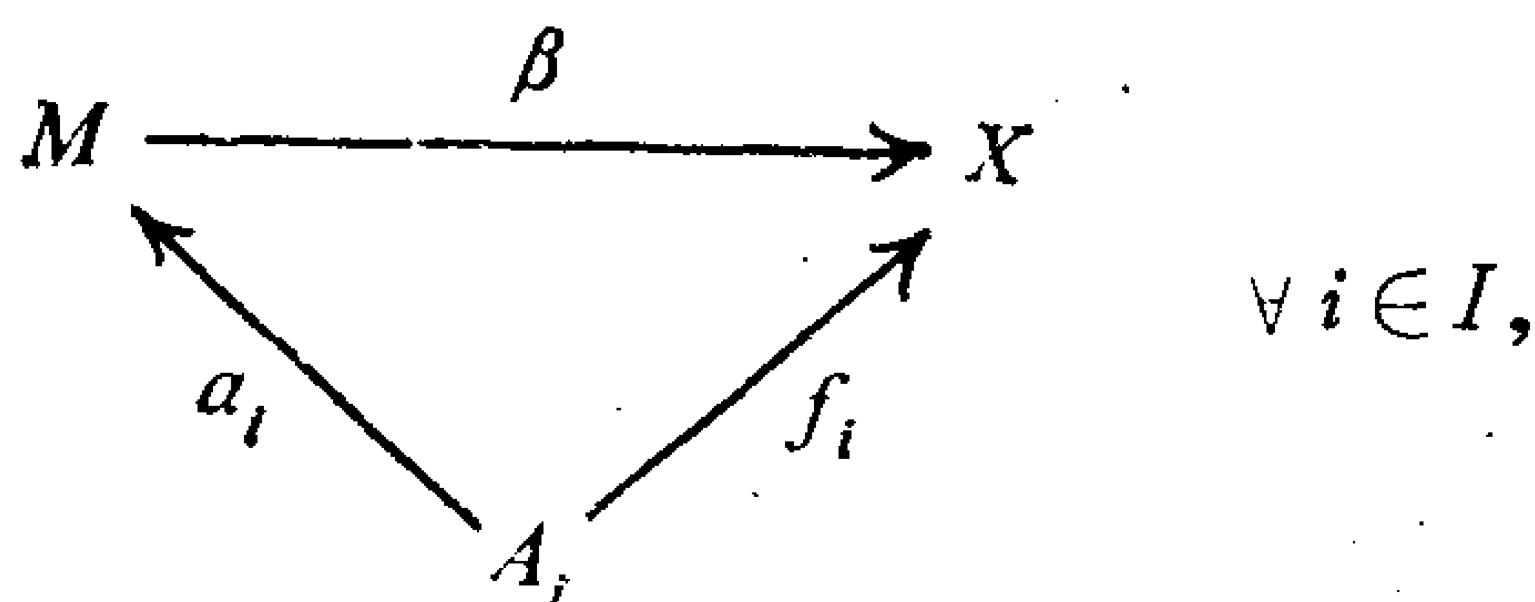
对于$i\in I$，命α_i: $A_i\hookrightarrow M$，则可知$\alpha_j\varphi_j^i=\alpha_i$，$\forall i\leqslant j$。我

们证明，$\{M,\alpha_i\}$ 是 $\{A_i,\ \varphi_j^i\}$的正向极限.

为此，设X是任一左R-模，并设$\{f_i: A_i \longrightarrow X \mid i\in I\}$是任意一集左$R$-映射，但是满足$f_j\varphi_j^i = f_i$，$\forall\, i\leqslant j$.

当$x\in M$时，$x\in Rx$. 因为Rx是M的一个$f.g.$子模，故存在$s\in I$使$Rx = A_s$. 这样，就有$f_s(x)\in X$. 若$x\in A_s$，且 $x\in A_t$，则因I是正向拟序集，故有 $k\in I$ 使 $s\leqslant k$，$t\leqslant k$，于是由 $f_s = f_k\varphi_k^s$及$f_t = f_k\varphi_k^t$就有$f_s(x) = f_k(x)$，$f_t(x) = f_k(x)$，从而$f_s(x) = f_t(x)$.

现在命β: $M \longrightarrow X$是$x\longmapsto f_s(x)$，其中$x\in A_s$，则易知β是左R-映射，且有交换图：



并且易知能使上图交换的左R-映射β是唯一的. 故 $\{M,\ \alpha_i\}$ 是$\{A_i,\varphi_j^i\}$的正向极限. 因此 $\varinjlim A_i = M$.

例2.16 设已给内直和$M = \bigoplus\limits_{k\in K} A_k$，其中$M$是左$R$-模，$A_k$是$M$的子模，$\forall\, k\in k$，则 $\bigoplus\limits_{k\in K} A_k$ 是其一切有限部分直和的正向极限.

证 设 $\{F_i \mid i\in I\}$ 是 $\bigoplus\limits_{k\in K} A_k$的一切有限部分直和作成的集. 对于 $i,j\in I$，规定 $i\leqslant j$ 当且仅当$F_i\subseteq F_j$，则易知$(I,\leqslant)$成为正向拟序集. 再对于 $i\leqslant j$，命 φ_j^i: $F_i\hookrightarrow F_j$，则 $\{F_i,\ \varphi_j^i\}$是R-mod中一个以I为指标集的正向系统. 又，对于$i\in I$，命 α_i: $F_i\hookrightarrow \bigoplus\limits_{k\in K} A_k$，则可知 $\alpha_j\varphi_j^i = \alpha_i$，$\forall\, i\leqslant j$，和例2.15类似地可以证明$\{\bigoplus\limits_{k\in K} A_k, \alpha_i\}$是$\{F_i,\varphi_j^i\}$的正向极限，故 $\varinjlim F_i = \bigoplus\limits_{k\in K} A_k$.

例2.17 设R是交换整环，Q是R的分式域. 对于$q\in Q$及

$r\in R$，定义qr是q及r在Q中的积，则Q成为左R-模。命$I=\{i\in R\mid i\neq 0\}$，并对$i,j\in I$，规定$i\leqslant j$当且仅当$i\mid j$，则易知$(I,\leqslant)$成为正向拟序集。

对于$i\in I$，命$x_i=\dfrac{1}{i}\in Q$，并命$F_i=Rx_i$。当$i\leqslant j$时，可设$j=ir$，其中$r\in R$，则有$x_i=rx_j$，故$F_i\subseteq F_j$。命φ_j^i：$F_i\hookrightarrow F_j$，则易知$\{F_i,\varphi_j^i\}$是R-mod中一个以I为指标集的正向系统。

对于$i\in I$，命α_i：$F_i\hookrightarrow Q$，则和例 2.15 类似地可以证明$\{Q,\alpha_i\}$是$\{F_i,\varphi_j^i\}$的正向极限，故$\varinjlim F_i=Q$。

现在我们介绍一种重要的正向极限，它叫做推出。

定义2.11　设$\mathscr{C}$是范畴，$(I,\leqslant)$是三点拟序集，即$I=\{1,2,3\}$，且除了$i\leqslant i$，$\forall\, i\in I$，只有$1\leqslant 2$及$1\leqslant 3$。若$\mathscr{C}$的一个以I为指标集的正向系统$\{F_i,\varphi_j^i\}$有正向极限$\{A,\alpha_i\}$，则A叫做$\{F_i,\varphi_j^i\}$的推出。

可知$\{F_i,\varphi_j^i\}$的推出也可以直接按以下方式定义：

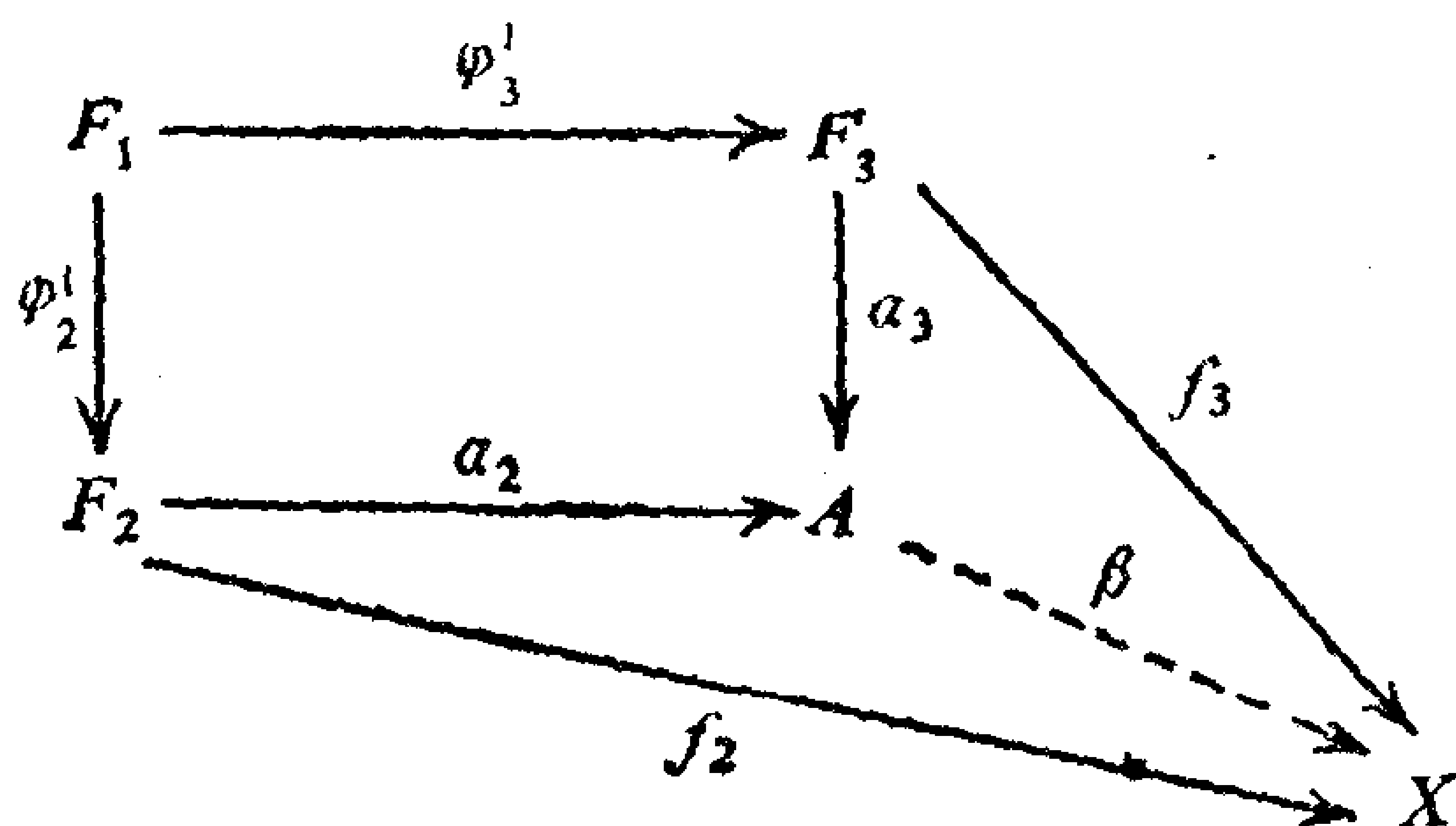
设已给图：

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\varphi_3^1} & F_3 \\ {\scriptstyle\varphi_2^1}\downarrow & & \\ F_2 & & \end{array}$$

若A是$\mathscr{C}$的对象，$F_2\xrightarrow{\alpha_2}A$，$F_3\xrightarrow{\alpha_3}A$使下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\varphi_3^1} & F_3 \\ {\scriptstyle\varphi_2^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_3} \\ F_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A \end{array},$$

且对$\mathscr{C}$的任何对象X及任何$F_2\xrightarrow{f_2}X$及$F_3\xrightarrow{f_3}X$，只要满足$f_3\varphi_3^1=f_2\varphi_2^1$，则恒存在唯一的$\beta$：$A\longrightarrow X$使下图中右边的两个三角形都是交换图：

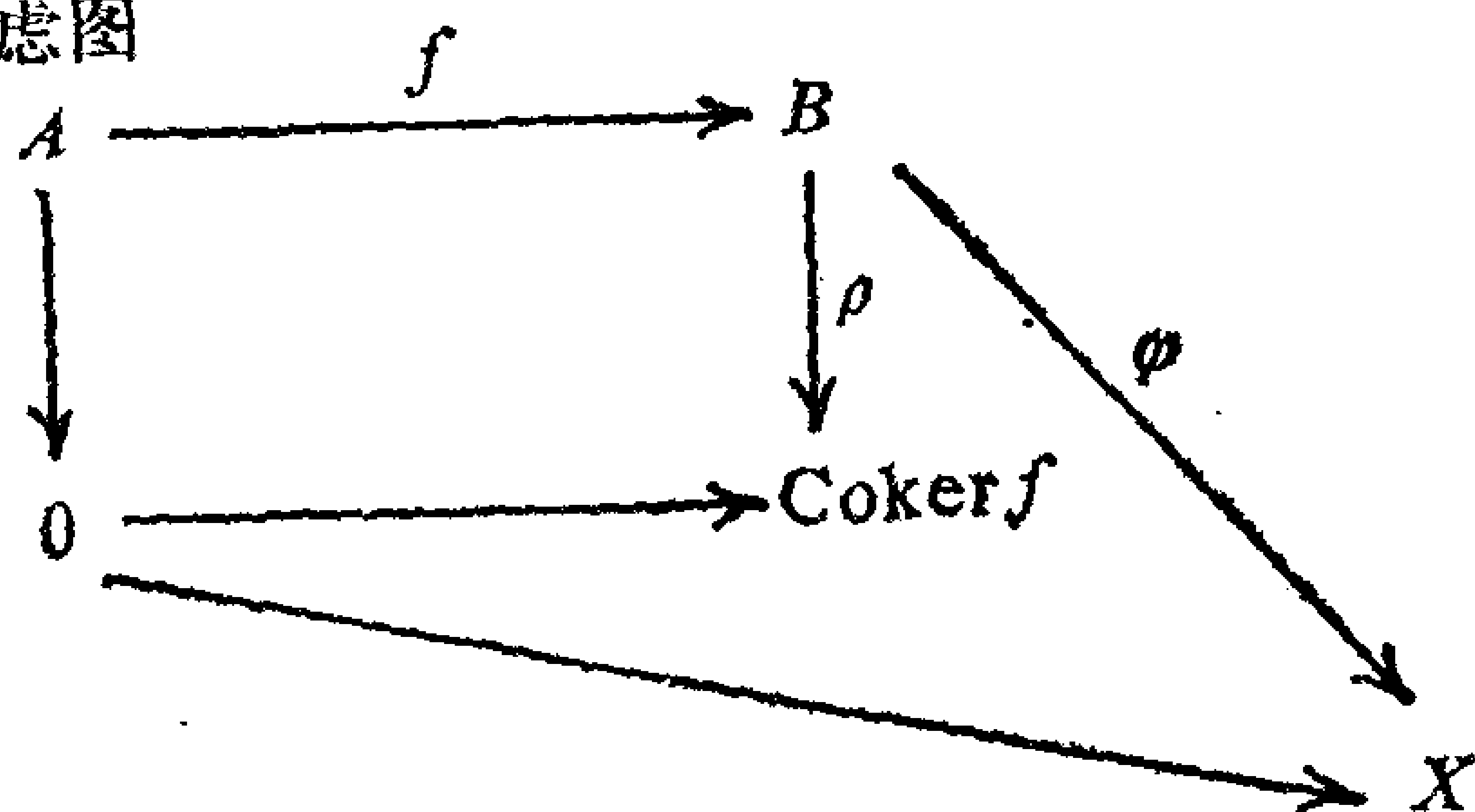


则称A是$\{F_i, \varphi_j^i\}$的推出。

注。这里$\alpha_1: F_1 \longrightarrow A$是$\alpha_1 = \alpha_2\varphi_2^1 = \alpha_3\varphi_3^1$，省略，$f_1: F_1 \longrightarrow X$是$f_1 = f_2\varphi_2^1 = f_3\varphi_3^1$，省略。

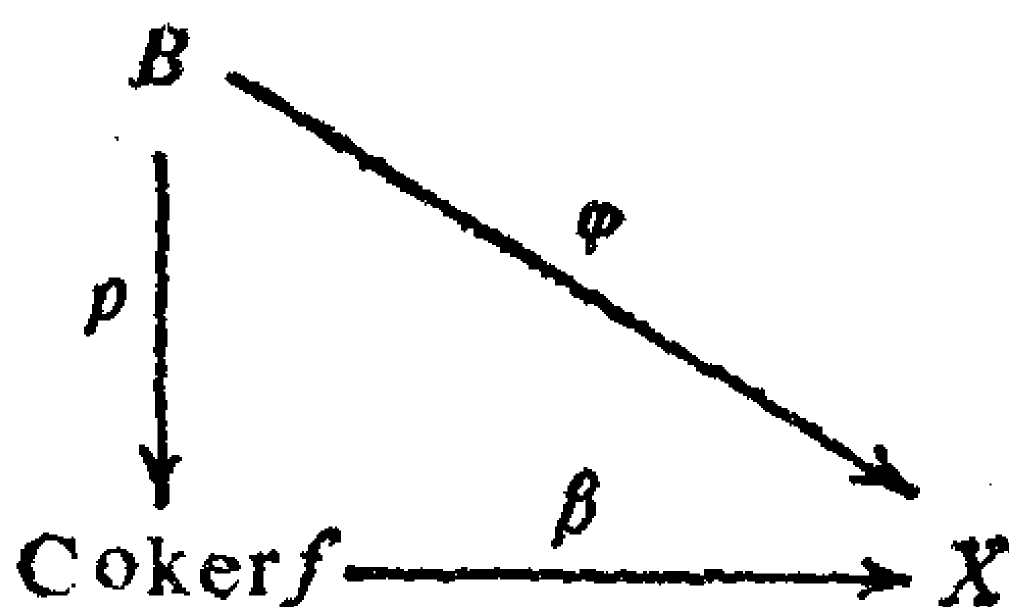
例2.18 设 $f: A \longrightarrow B$ 是左R-映射，则 Coker$f$ 是一个推出。

证 考虑图

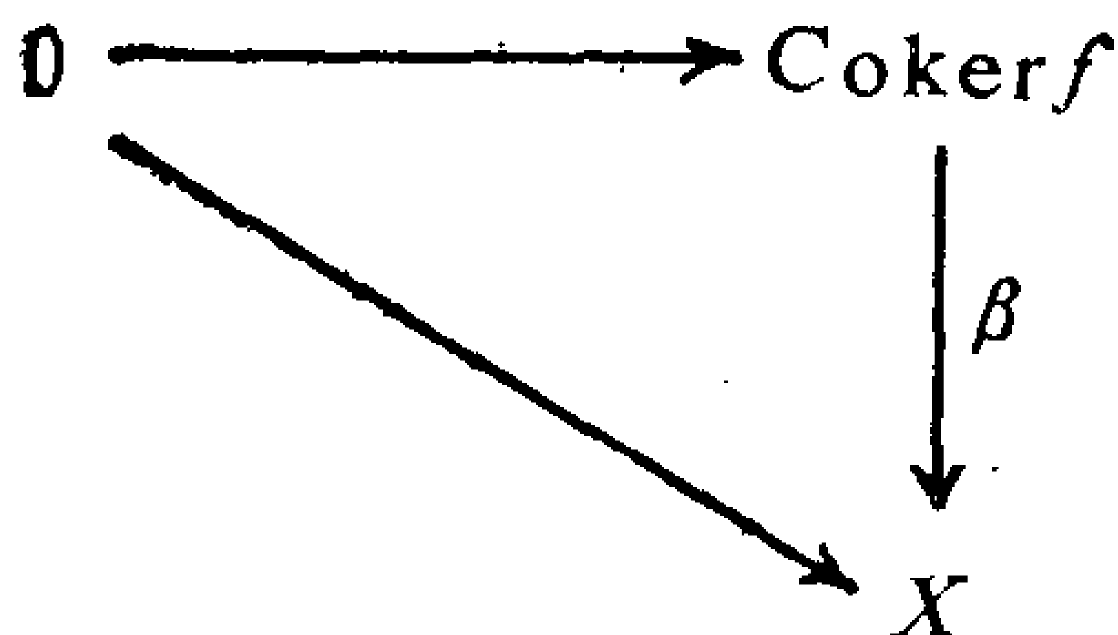


其中ρ是自然同态映射。故上图中的正方形是交换图。又，φ满足$\varphi f = 0$。

由 $\varphi f = 0$ 知 $\mathrm{im} f \subseteq \ker\varphi$，故由模同态基本定理知存在唯一的左$R$-映射$\beta$：Coker$f \longrightarrow X$使下图是交换图：



而当然有交换图：



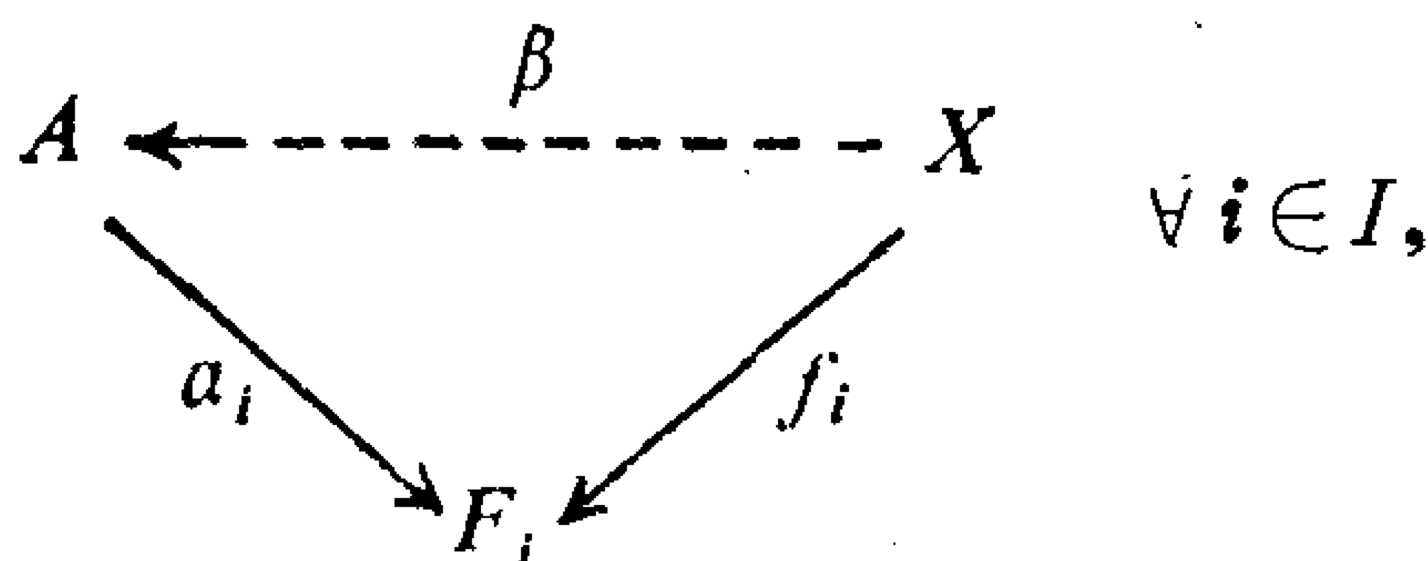
因此Coker$f$是一个推出。

现在介绍逆系统及逆极限。

定义2.12 设$\mathscr{C}$是范畴，I是由拟序集（I，$\leqslant$）确定的范畴。I到$\mathscr{C}$的一个逆变函子叫做$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的逆系统。

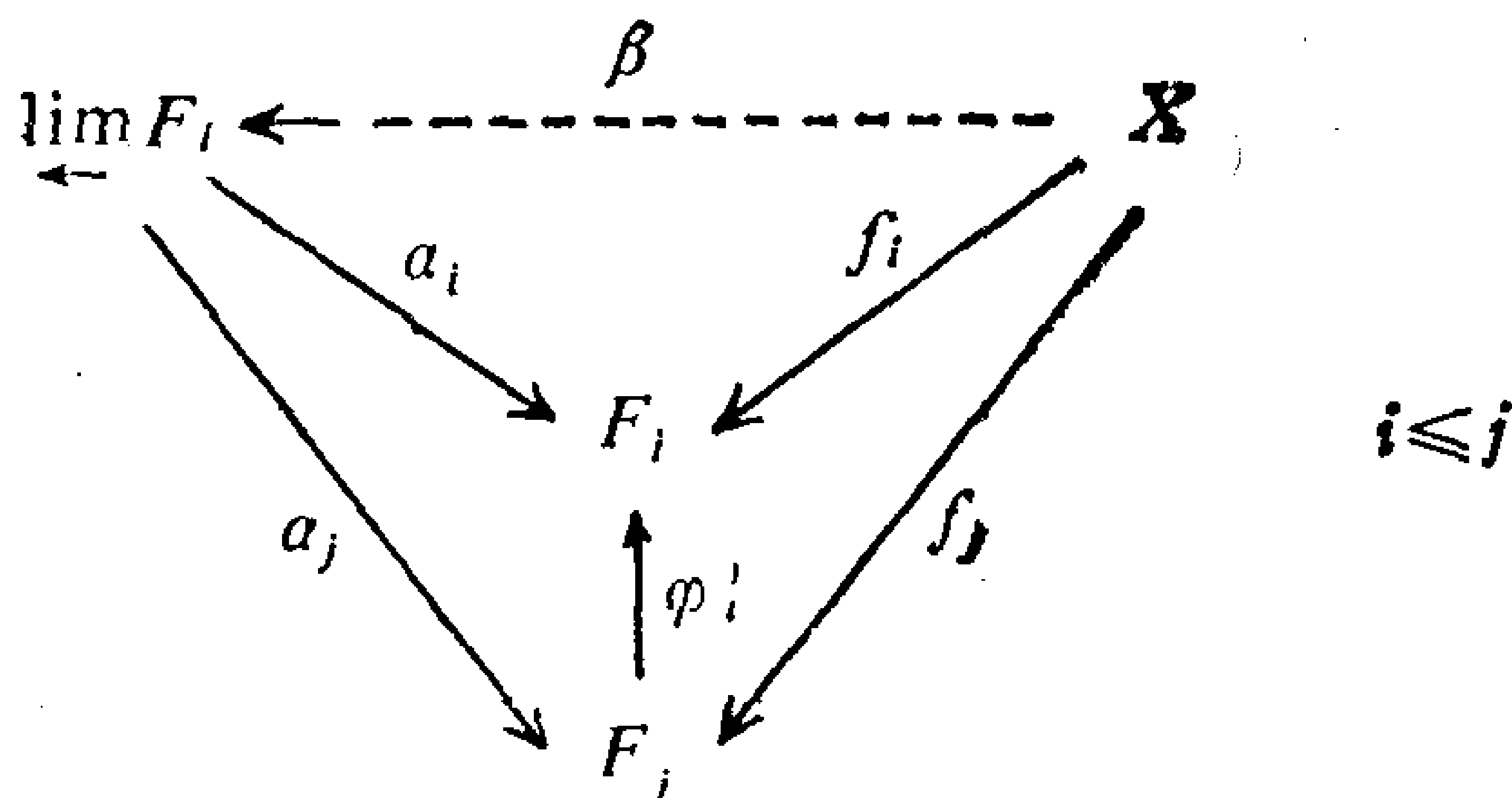
设F是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的逆系统。对于每一个$i\in I$，记$F_i=F(i)$；对于$i,j\in I$，且$i\leqslant j$，记$\varphi_i^j=F(\xi_i^j)$，则当$i,j,k\in I$，且$i\leqslant j\leqslant k$时，有$\varphi_i^j\varphi_j^k=\varphi_i^k$。以后我们用$\{F_i,\varphi_i^j\}$来表示$F$。

定义2.13 设$\{F_i,\varphi_i^j\}$是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的逆系统。再设A是$\mathscr{C}$的一个对象，$\{\alpha_i: A\longrightarrow F_i|i\in I\}$是一集态射，满足$\varphi_i^j\alpha_j=\alpha_i$，$\forall\, i\leqslant j$。若$\{A,\alpha_i\}$使得对于$\mathscr{C}$的任何对象$X$及任意一集态射$\{f_i: X\longrightarrow F_i|i\in I\}$（满足$\varphi_i^j f_j=f_i$，$\forall\, i\leqslant j$），恒可唯一地补成交换图：



则称$\{A,\alpha_i\}$是逆系统$\{F_i,\varphi_i^j\}$的一个逆极限，记作$A=\varprojlim F_i$。

逆系统$\{F_i,\ \varphi_i^j\}$的逆极限的定义也可图示如下：



图中所有的三角形都是交换图。

例2.19　设$\mathscr{C}$是范畴，$(I,\leqslant)$是平凡拟序集。若$\{F_i,\varphi_i^j\}$是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的逆系统，且$\{F_i|i\in I\}$有积$\{\prod_{i\in I}F_i, p_i\}$，则$\{F_i,\varphi_i^j\}$有逆极限，且$\varprojlim F_i=\prod_{i\in I}F_i$。

其证明完全和例2.13的证明类似。

当$\mathscr{C}=R$-mod时，由于每一集左R-模都有直积，故若$(I,\leqslant)$是平凡拟序集，则R-mod中每一个以I为指标集的逆系统$\{F_i,\varphi_i^j\}$都有逆极限，且$\varprojlim F_i=\prod_{i\in I}F_i$。在第二章中我们还将证明，对于任何拟序集$(I,\leqslant)$，$R$-mod中每一个以$I$为指标集的逆系统都有逆极限。

现在我们介绍一种重要的逆极限，它叫做拉回。

定义2.14　设$\mathscr{C}$是范畴，I是三点拟序集。若$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的逆系统$\{F_i,\varphi_i^j\}$有逆极限$\{A,\alpha_i\}$，则A叫做$\{F_i,\varphi_i^j\}$的拉回。

可知$\{F_i,\varphi_i^j\}$的拉回也可以直接按以下方式定义：

设已给图：

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xleftarrow{\varphi_1^3} & F_3 \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_1^2} & & \\ F_2 & & \end{array}$$

若A是$\mathscr{C}$的对象，$A\xrightarrow{\alpha_2}F_2$，$A\xrightarrow{\alpha_3}F_3$使下图是交换图

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xleftarrow{\varphi_1^3} & F_3 \\ {\scriptstyle\varphi_1^2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha_3} \\ F_2 & \xleftarrow{\alpha_2} & A \end{array},$$

且对$\mathscr{C}$的任何对象X及任何$X\xrightarrow{f_2}F_2$及$X\xrightarrow{f_3}F_3$，只要满足$\varphi_1^2f_2=\varphi_1^3f_3$，则恒存在唯一的$\beta$：$X\longrightarrow A$使下图中右边的两个三角形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \xleftarrow{\varphi_1^3} & F_3 & & \\ {\scriptstyle\varphi_1^2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha_3} & \nwarrow{\scriptstyle f_3} & \\ F_2 & \xleftarrow{\alpha_2} & A & \xleftarrow{\beta} & X \\ & \nwarrow & {\scriptstyle f_2} & & \end{array}$$

则称A是$\{F_i,\varphi_i^j\}$的拉回。

注．这里α_1：$A\longrightarrow F_1$是$\alpha_1=\varphi_1^2\alpha_2=\varphi_1^3\alpha_3$，省略，$f_1$：$X\longrightarrow F_1$是$f_1=\varphi_1^2f_2=\varphi_1^3f_3$，省略。

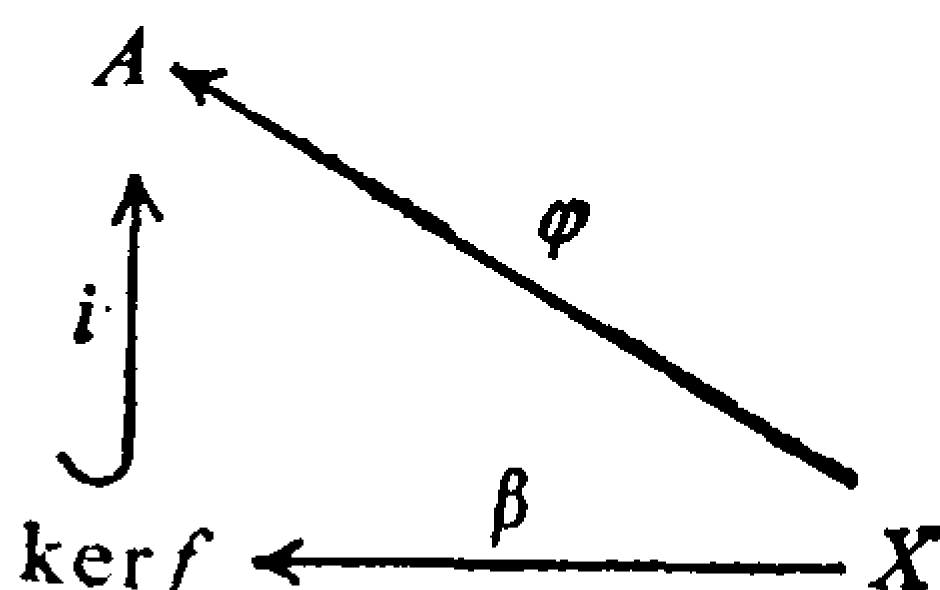
例2.20　设f：$A\longrightarrow B$是左R-映射，则$\ker f$是一个拉回。

证．考虑图

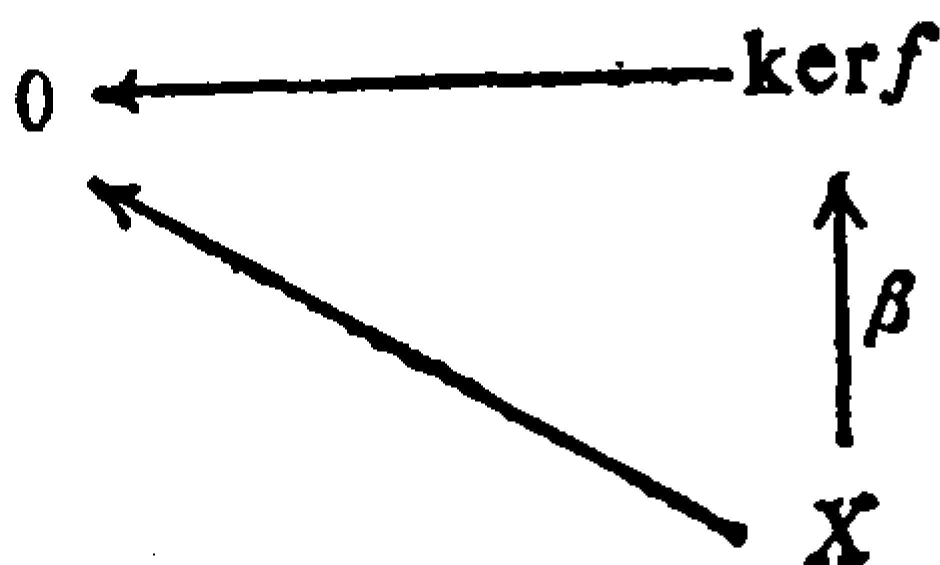
$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{f} & A & & \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} & \nwarrow{\scriptstyle\varphi} & \\ 0 & \longleftarrow & \ker f & & X \\ & \nwarrow & & & \end{array}$$

可知上图中的正方形是交换图．又，φ满足$f\varphi=0$。

由$f\varphi=0$知$\mathrm{im}\varphi\subseteq\ker f$，故存在唯一的左$R$-映射$\beta: X\longrightarrow\ker f$使下图是交换图：



而当然有交换图：



因此$\ker f$是一个拉回。

最后，我们指出附加对的一个重要性质，即有下面的定理。

定理2.3　设$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$是范畴，F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变函子，G是$\mathscr{D}$到$\mathscr{C}$的一个共变函子，且（F,G）是附加对．再设（$I,\leqslant$）是一个拟序集。

(i) 若$\{A_i,\varphi_i^j\}$是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的正向系统，且$\varinjlim A_i$存在，则F保持正向极限，即$F(\varinjlim A_i)=\varinjlim F(A_i)$；

(ii) 若$\{B_i,\psi_i^j\}$是$\mathscr{D}$的一个以I为指标集的逆系统，且$\varprojlim B_i$存在，则G保持逆极限，即

$$G(\varprojlim B_i)=\varprojlim G(B_i).$$

证　我们只证明(i)．完全类似地可以证明(ii)。

因为$\{A_i,\varphi_i^j\}$是I到$\mathscr{C}$的共变函子，F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的共变函子，

故它们的积是I到$\mathscr{D}$的共变函子。因此$\{F(A_i), F(\varphi_j^i)\}$是$\mathscr{D}$中一个以$I$为指标集的正向系统。

设$\{\varinjlim A_i, \alpha_i\}$是$\{A_i, \varphi_j^i\}$的正向极限，则$\alpha_i = \alpha_j\varphi_j^i$，$\forall i \leqslant j$，故$F(\alpha_i) = F(\alpha_j)F(\varphi_j^i)$，$\forall i \leqslant j$。我们证明$\{F(\varinjlim A_i), F(\alpha_i)\}$是$\{F(A_i), F(\varphi_j^i)\}$的正向极限。

为此，设X是$\mathscr{D}$的任意对象，并设态射$\{g_i: F(A_i) \longrightarrow X \mid i \in I\}$满足$g_jF(\varphi_j^i) = g_i$，$\forall i \leqslant j$。因为$(F, G)$是附加对，故对每一个$i \in I$，有双射$\sigma_i$: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_i), X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, G(X))$使有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_j), X) & \xrightarrow{\sigma_j} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, G(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\varphi_j^i)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi_j^i)^*} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_i), X) & \xrightarrow{\sigma_i} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, G(X)), \end{array} \qquad \forall i \leqslant j$$

由此交换图知$(\varphi_j^i)^*\sigma_j(g_j) = \sigma_iF(\varphi_j^i)^*(g_j)$，从而$\sigma_j(g_j)\varphi_j^i = \sigma_i(g_i)$，$\forall i \leqslant j$。因此，可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim A_i & \xrightarrow{\ \ \beta\ \ } & G(X) \\ & {\scriptstyle \alpha_i}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \sigma_i(g_i)} & \\ & A_i & \end{array} \qquad \forall i \in I$$

因为(F, G)是附加对，故有双射τ使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\varinjlim A_i), X) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim A_i, G(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\alpha_i)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_i^*} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_i), X) & \xrightarrow{\sigma_i} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, G(X)), \end{array}$$

$$\forall i \in I.$$

命$\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\varinjlim A_i), X)$使$\tau(\gamma) = \beta$，则由$\alpha_i^*\tau(\gamma) = \sigma_iF(\alpha_i)^*(\gamma)$知$\alpha_i^*(\beta) = \sigma_i(\gamma F(\alpha_i))$，从而$\beta\alpha_i = \sigma_i(\gamma F(\alpha_i))$。但$\beta\alpha_i = \sigma_i(g_i)$，故$\sigma_i(g_i) = \sigma_i(\gamma F(\alpha_i))$。由于$\sigma_i$是双射，故

$\gamma F(\alpha_i)=g_i$，$\forall i\in I$。因此有交换图：

$$\begin{array}{ccc} F(\varinjlim A_i) & \xrightarrow{\gamma} & X \\ {\scriptstyle F(\alpha_i)}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle g_i} \\ & F(A_i) & \end{array} \qquad \forall i\in I$$

容易知道，能使上图交换的γ唯一。事实上，若$\gamma':F(\varinjlim A_i)\longrightarrow X$ 满足 $\gamma' F(\alpha_i)=g_i$，$\forall i\in I$，则 $\tau(\gamma')\alpha_i=\alpha_i^*\tau(\gamma')=\sigma_i F(\alpha_i)^*(\gamma')=\sigma_i(\gamma' F(\alpha_i))=\sigma_i(g_i)$，$\forall i\in I$。故$\tau(\gamma')=\beta$，从而$\gamma'=\gamma$。因此$\{F(\varinjlim A_i),F(\alpha_i)\}$是$\{F(A_i),F(\varphi_i^j)\}$的正向极限。故$F(\varinjlim A_i)=\varinjlim F(A_i)$。

2.7　对偶原理

细心的读者可能已经看出，在单态射与满态射之间有一种关系，这种关系和积与上积之间的关系以及正向极限与逆极限之间的关系十分类似。为了弄清这种关系，我们先引入一个范畴的逆范畴的概念。

设$\mathscr{C}$ 是一个范畴，则由$\mathscr{C}$可以作出一个新的范畴$\mathscr{C}^{OP}$如下：

命$\text{obj}\mathscr{C}^{OP}=\text{obj}\mathscr{C}$。于是当$A$是$\mathscr{C}$的一个对象时，它也是$\mathscr{C}^{OP}$的一个对象。这同一个$A$，作为$\mathscr{C}^{OP}$的对象时用$A^{OP}$来记。

再命$\text{Hom}_{\mathscr{C}^{OP}}(A^{OP},B^{OP})=\text{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$。于是当$f$是$\mathscr{C}$的对象$B$到$A$的一个态射时，它也是$\mathscr{C}^{OP}$的对象$A^{OP}$到$B^{OP}$的一个态射。这同一个$f$，作为$A^{OP}$到$B^{OP}$的态射时用$f^{OP}$来记。

最后，当$f^{OP}\in\text{Hom}_{\mathscr{C}^{OP}}(A^{OP},B^{OP})$，$g^{OP}\in\text{Hom}_{\mathscr{C}^{OP}}(B^{OP},C^{OP})$时，定义$g^{OP}\cdot f^{OP}=(fg)^{OP}$，可知$g^{OP}\cdot f^{OP}\in\text{Hom}_{\mathscr{C}^{OP}}(A^{OP},C^{OP})$。

易知$\mathscr{C}^{OP}$是一个范畴，它叫做$\mathscr{C}$的逆范畴。

我们立刻看出，$(\mathscr{C}^{OP})^{OP}=\mathscr{C}$。

设S是一个陈述语。若它对任何范畴都有意义，即组成S的

用语中仅涉及对象、态射及态射积等概念，则称S是一个范畴陈述语。

今设S是一个范畴陈述语．若$\mathscr{C}$是一个范畴（它可能是一个具体的范畴如R-mod，Set等等），则当将S应用于$\mathscr{C}$时，就得到一个仅涉及$\mathscr{C}$的对象、态射及态射积的陈述语，我们用$S(\mathscr{C})$来记它。这样，当将S应用于范畴$\mathscr{C}^{op}$时，就得到$S(\mathscr{C}^{op})$。

例如，设范畴陈述语S是：

“X是一个对象，对于每一个对象Y，有且仅有一个态射$f: Y\longrightarrow X$”

则$S(\mathscr{C})$是：

“X是$\mathscr{C}$的一个对象，对于$\mathscr{C}$的每一个对象Y，$\mathscr{C}$中有且仅有一个态射$f: Y\longrightarrow X$”

而$S(\mathscr{C}^{op})$则是：

“X^{op}是$\mathscr{C}^{op}$的一个对象，对于$\mathscr{C}^{op}$的每一个对象Y^{op}，$\mathscr{C}^{op}$中有且仅有一个态射$f: Y^{op}\longrightarrow X^{op}$”

因为$\mathscr{C}^{op}$的对象也是$\mathscr{C}$的对象，$\mathscr{C}^{op}$的态射也是$\mathscr{C}$的态射，故实际上$S(\mathscr{C}^{op})$也给出了关于$\mathscr{C}$的对象、态射及态射积的一个陈述语．我们将$S(\mathscr{C}^{op})$译成关于$\mathscr{C}$的陈述语，这个陈述语叫做$S(\mathscr{C})$的对偶陈述语，用$S^{op}(\mathscr{C})$来记．根据$\mathscr{C}^{op}$的定义可知，为了将$S(\mathscr{C}^{op})$译成$S^{op}(\mathscr{C})$，只要将$S(\mathscr{C}^{op})$中所涉及到的$\mathscr{C}^{op}$的对象A^{op}，B^{op}，C^{op}，…等等分别换成$\mathscr{C}$的对象$A, B, C,$…等等，将$S(\mathscr{C}^{op})$中所涉及到的$\mathscr{C}^{op}$的态射f^{op}, g^{op}, h^{op}，…等等分别换成$\mathscr{C}$的态射$f, g, h,$…等等，并同时对调源及靶的位置，即当将f^{op}换成f时，同时将箭头的指向反转，则就得到了$S^{op}(\mathscr{C})$。

继续使用上面的例子，可知$S^{op}(\mathscr{C})$是：

“X是$\mathscr{C}$的一个对象，对于$\mathscr{C}$的每一个对象Y，$\mathscr{C}$中有且仅有一个态射$f: X\longrightarrow Y$”。

容易看出；$S^{op}(\mathscr{C})$的对偶陈述语恰是$S(\mathscr{C})$。故关于$\mathscr{C}$的两个范畴陈述语之为对偶的，乃是相互的。

若范畴陈述语S定义了一个概念，则$S(\mathscr{C})$定义了$\mathscr{C}$中一个概念。这时$S^{op}(\mathscr{C})$也定义了$\mathscr{C}$中一个概念，叫做$S(\mathscr{C})$所定义的概念的对偶概念。根据刚才所说，$\mathscr{C}$中两个范畴概念之为对偶的，是相互的。

作为例子，我们说明，对于任何范畴，单态射与满态射是互相对偶的概念。

为此，命范畴陈述语S是：

"f：$A\longrightarrow B$是态射，对于任何对象X，及任何$\varphi,\psi\in \mathrm{Hom}(X,A)$，由$f\varphi=f\psi$必有$\varphi=\psi$"。

若$\mathscr{C}$是一个范畴，则$S(\mathscr{C})$是：

"$f:A\longrightarrow B$ 是$\mathscr{C}$的态射，对于$\mathscr{C}$的任何对象X，及任何$\varphi,\psi\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$，由$f\varphi=f\psi$必有$\varphi=\psi$"。

这时$S(\mathscr{C}^{op})$是

"f^{op}：$A^{op}\longrightarrow B^{op}$是$\mathscr{C}^{op}$的态射，对于$\mathscr{C}^{op}$的任何对象$X^{op}$，及任何$\varphi^{op},\psi^{op}\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(X^{op}, A^{op})$，由$f^{op}\cdot\varphi^{op}=f^{op}\cdot\psi^{op}$必有$\varphi^{op}=\psi^{op}$"

于是$S^{op}(\mathscr{C})$是：

"f：$B\longrightarrow A$ 是$\mathscr{C}$的态射，对于$\mathscr{C}$的任何对象X，及任何$\varphi,\psi\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$，由$\varphi f=\psi f$必有$\varphi=\psi$"。

我们知道，$S(\mathscr{C})$定义了$\mathscr{C}$中态射f是单态射，而$S^{op}(\mathscr{C})$则定义了$\mathscr{C}$中态射f是满态射。故对于任何范畴，单态射与满态射是互相对偶的概念。

同样，易知积与上积是互相对偶的概念，正向极限与逆极限（从而上核与核）是互相对偶的概念。

若范畴陈述语S提出了一个命题，则$S(\mathscr{C})$提出了$\mathscr{C}$中一个命题。这时$S^{op}(\mathscr{C})$也提出了$\mathscr{C}$中一个命题，叫做$S(\mathscr{C})$所提出的命题的对偶命题。根据前面所说，$\mathscr{C}$中两个范畴命题之为对偶的，是相互的。由$S^{op}(\mathscr{C})$的定义可知，$S^{op}(\mathscr{C})$在$\mathscr{C}$中成立，当且仅当$S(\mathscr{C}^{op})$在$\mathscr{C}^{op}$中成立。

于是我们立即得到范畴的对偶原理如下：

设范畴陈述语S提出一个命题。若对任何范畴$\mathscr{C}$，$S(\mathscr{C})$在$\mathscr{C}$中成立，则对任何范畴$\mathscr{C}$，$S^{op}(\mathscr{C})$在$\mathscr{C}$中也成立。

例如，以前我们曾分别证明过，在任何范畴中，两个单态射的积是单态射，两个满态射的积是满态射。不难看出，“两个单态射的积是单态射”与“两个满态射的积是满态射”这两个命题是互相对偶的。因此，只要我们已经证明了这两个命题中的任何一个在任何范畴中都成立，则据对偶原理即知另一个命题也在任何范畴中都成立而无需再证明。

习 题 一

(1) 设已给左R-模内直和 $A=B\oplus C$，并设M是A的子模，且$M\supseteq B$。证明：$M=B\oplus(M\cap C)$。

(2) 设$f:M\longrightarrow N$是左R-满射，K是左R-模M的子模。证明：

(i) 若$K\cap\ker f=0$，则$f|_K:K\longrightarrow N$是左R-单射；

(ii) 若$K+\ker f=M$，则$f|_K:K\longrightarrow N$是左R-满射。

(3) 设A是左R-模。若$A\neq 0$，且A只有两个子模：0及A，则称A是一个单左R-模。

设M是左R-模，证明以下条件等价：

(i) M是单左R-模；

(ii) 对于任何左R-模X，每一个非零左R-映射$f: M\longrightarrow X$都是单射；

(iii) 对于任何左R-模Y，每一个非零左R-映射$g: Y\longrightarrow M$都是满射。

(4) 设R是交换整环。对于左R-模M，命

$$T(M)=\{x\in M\mid 存在0\neq r\in R 使 rx=0\}.$$

证明：

(i) $T(M)$是M的子模；($T(M)$叫M的挠子模。若$T(M)=M$，则称M是挠模，若$T(M)=0$，则称$T(M)$是非挠模)。

(ii) $T(M/T(M))=0$；

(iii) 设$f:M\longrightarrow N$是左R-映射，若N是非挠模，则$T(M)\subseteq \ker f$；若M是挠模，则$\operatorname{im} f\subseteq T(N)$。

(5) 设已给右R-模外直和$M=R\oplus B$，并设环$S=\operatorname{End}M_R=\operatorname{Hom}_R(M,M)$。对于$s\in S$及$m\in M$，定义

$$sm=s(m)。$$

证明：M是循环左S-模。

(6) 设左$\mathbf{Z}$-模M是挠模，证明：$M\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=0$，其中$\mathbf{Q}$是全体有理数作成的集。

(7) 证明：$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}/\mathbf{Z}=0$。

(8) 设R是交换环，I是R的理想。设M及N都是左R-模，证明：

$$M\otimes_R N/[I(M\otimes_R N)]\cong M/(IM)\otimes_{R/I}N/(IN),$$

其中$IM=\{有限和\sum_{\alpha}i_\alpha m_\alpha \mid i_\alpha\in I, m_\alpha\in M\}$，$IN$及$I(M\otimes_R N)$的意义自明。

(9) 设K是交换环，x,y是K上无关未定元，证明：

$$K[x]\otimes_K K[y]\cong K[x,y]。$$

(10) 利用定理1.13及定理1.23证明交换环是IBN环。

(11) 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ & & & & \downarrow{g} & & \downarrow{h} \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \end{array}$$

其中上、下两行都是正合列，右边正方形是交换图。证明：存在唯一的左R-映射$\varphi:A\longrightarrow A'$使上图中补出的左边正方形是交换图。

(12) 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

其中每一横行都是短正合列，且每一个正方形都是交换图。证明：若中间竖列是短正合列，则右边竖列是短正合列，当且仅当左边竖列是短正合列。

(13) 设$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$是范畴，F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变或逆变函子。证明：若f是$\mathscr{C}$中一个等价态射，则$F(f)$是$\mathscr{D}$中一个等价态射。

(14) 设$f: A\longrightarrow B$是范畴Set中一个态射。证明：f是 Set 中的满态射，当且仅当f是集A到集B的满射。

(15) 设$\mathscr{C}$ = Ring是环范畴，即obj$\mathscr{C}$由所有的环组成，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$由环$A$到环$B$的所有环同态映射组成，$gf$是映射的积。举例说明，范畴$\mathscr{C}$ = Ring中的满态射与环同态满射未必一致，范畴$\mathscr{C}$ = Ring中既单且满的态射与等价态射并不一致。

(16) 设$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$是两个范畴，F是$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的一个共变函子，G是$\mathscr{D}$到$\mathscr{C}$的一个共变函子，且(F, G)是一个附加对。于是对于每一对(C, D)，其中C是$\mathscr{C}$的对象，D是$\mathscr{D}$的对象，有双射$\tau_{C,D}$: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C), D)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, G(D))$使有两组交换图。现在对于$\mathscr{C}$的每一个对象$C$，命$t_C=\tau_{C,F(C)}(1_{F(C)})$。证明：$t$是恒等函子$1_{\mathscr{C}}$到函子$GF$的一个自然变换。

(17) 设1是R-mod到R-mod的恒等函子，并设1到1的全体自然变换作成一个集合H。对于$s, t\in H$，定义$s+t$是

$$(s+t)_A = S_A + t_A,$$

证明：H是环，且环H与环R的中心$Z(R)$同构。

（18）设（$I,\leqslant$）是拟序集，并设I中有唯一的最大元∞，即$\infty\in I$，且$i\leqslant\infty$，$\forall i\in I$。再设$\mathscr{C}$是一个范畴，$\{A_i,\varphi_i^j\}$是$\mathscr{C}$中一个以I为指标集的正向系统。证明：$\varinjlim A_i = A_\infty$。

（19）设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \\ C & & \end{array}$$

命 $D=\{(b,c)\in B\oplus C\mid f(b)=g(c)\}$，$\alpha$：$D\longrightarrow C$ 是 $(b,c)\longmapsto c$，β：$D\longrightarrow B$是$(b,c)\longmapsto b$，证明：D是一个拉回。

（20）对于每一个左R-模M，命$F(M)$是集M，并对任何左R-映射f：$M\longrightarrow N$，命$F(f)$是集M到集N的映射f。又，对于每一个集X，取定一个以X为基的自由左R-模，记作$G(X)$；当f是集X到集Y的映射时，利用$X\xrightarrow{f}Y$及$Y\overset{\alpha}{\hookrightarrow}G(Y)$，可得映射$X\xrightarrow{\alpha f}G(Y)$，于是由定理1.9可以唯一地确定$G(X)$到$G(Y)$的一个左$R$-映射，记此左$R$-映射为$G(f)$。证明：

(i) F是R-mod到Set的一个共变函子；

(ii) G是Set到R-mod的一个共变函子；

(iii) (G,F)是一个附加对。

第二章　函子 Hom 及 $\otimes$

本章研究模范畴到模范畴的函子，主要是研究函子 Hom 及 $\otimes$。

§3　加法函子

因为模范畴是预加法范畴，因此可以考虑模范畴到模范畴的加法函子。

本节只限于研究模范畴到模范畴的加法函子。

3.1　加法函子保持可裂短正合列

首先我们指出，加法函子保持零映射，即有下面引理。

引理3.1　设 F 是 R-mod到 S-mod 的一个共变或逆变加法函子，则对 $0\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$，有 $F(0)=0$。

证　因为对于 $f\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$，有 $F(f)\in \mathrm{Hom}_S(F(A),F(B))$ 或 $F(f)\in \mathrm{Hom}_S(F(B),F(A))$，且 $F(f)+F(0)=F(f+0)=F(f)$，故 $F(0)=0$。

现在我们指出，加法函子保持可裂短正合列，即有下面定理。

定理3.1　设

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0$$

是左 R-可裂短正合列，并设 F 是 R-mod到 S-mod 的一个共变或逆变加法函子。

(i) 若F是共变的，则

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

是可裂短正合列；

(ii) 若F是逆变的，则

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow 0$$

是可裂短正合列。

证 我们只证 (i) 。完全类似地可以证明 (ii)。

由定理1.27知有左R-映射序列

$$0 \longrightarrow A \underset{\psi}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{\varphi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$$

满足

$$\begin{aligned} &\psi f = 1_A, \quad gf = 0, \\ &g\varphi = 1_C, \quad \psi\varphi = 0, \end{aligned} \qquad f\psi + \varphi g = 1_B.$$

于是有左S-映射序列

$$0 \longrightarrow F(A) \underset{F(\psi)}{\overset{F(f)}{\rightleftarrows}} F(B) \underset{F(\varphi)}{\overset{F(g)}{\rightleftarrows}} F(C) \longrightarrow 0$$

而且有

$$\begin{aligned} &F(\psi)F(f) = F(\psi f) = F(1_A) = 1_{F(A)}, \\ &F(g)F(f) = F(gf) = F(0) = 0, \\ &F(g)F(\varphi) = F(g\varphi) = F(1_C) = 1_{F(C)}, \\ &F(\psi)F(\varphi) = F(\psi\varphi) = F(0) = 0, \\ &F(f)F(\psi) + F(\varphi)F(g) = F(f\psi + \varphi g) = F(1_B) = 1_{F(B)} \end{aligned}$$

故据定理1.27知$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ 是可裂短正合列。

3.2 加法函子保持有限直和

我们指出，加法函子保持有限直和，即有下面定理。

定理3.2 设F是R-mod到S-mod的一个共变或逆变的加法函子，则对任意有限个左R-模$A_1, A_2, \cdots, A_n$，恒有

$$F(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} F(A_i).$$

证 我们只对F是共变的情形证明。完全类似地可以对F是逆变的情形进行证明。

首先有可裂短正合列

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{p_2} A_2 \longrightarrow 0$$

故据定理3.1知有可裂短正合列

$$0 \longrightarrow F(A_1) \xrightarrow{F(\lambda_1)} F(A_1 \oplus A_2) \xrightarrow{F(p_2)} F(A_2) \longrightarrow 0.$$

从而由定理1.27知 $F(A_1 \oplus A_2) \cong F(A_1) \oplus F(A_2)$，再利用数学归纳法即知定理成立。

§4 正合函子

本节研究模范畴到模范畴的一种重要的函子，即正合函子。

4.1 左正合函子

定义4.1 设F是R-mod到S-mod的一个共变函子。若当$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$是左$R$-短正合列时，必定$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$是正合列，则称$F$是左正合的。

由定义容易看出，左正合的共变函子F保持单射，即若$f: A \longrightarrow B$是左R-单射，则$F(f): F(A) \longrightarrow F(B)$是左$S$-单射。这是因为$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker} f \longrightarrow 0$是左$R$-短正合列，其中$\rho$是自然同态映射，故$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(\rho)} F(\mathrm{Coker} f)$是正合列，因此$F(f)$是左$S$-单射。

左正合的共变函子也可以按另一种方式来定义，即有下面定理。

定理4.1 设F是R-mod到S-mod的一个共变函子，则F是左正合的，当且仅当对于每一个左R-正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$，必定$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)$是正合列。

证 设对于每一个左R-正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$，必定$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)$ 是正合列，则当 $0\longrightarrow X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列时，由于$0\longrightarrow X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z$是左$R$-正合列，故$0\longrightarrow F(X)\xrightarrow{F(\alpha)}F(Y)\xrightarrow{F(\beta)}F(Z)$是正合列。因此$F$是左正合的。

反之，设F是左正合的。命$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$是任意一个左$R$-正合列。则首先由左$R$-短正合列$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{\rho}B/\mathrm{im}f\longrightarrow 0$ 可得正合列$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(\rho)}F(B/\mathrm{im}f)$。

因为$\mathrm{im}f=\ker g$，故可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ & {\scriptstyle\rho}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\sigma} & \\ & B/\mathrm{im}f & \end{array}$$

其中补出的σ是左R-映射，且是单射。于是由于F是共变函子，就有交换图：

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \\ & {\scriptstyle F(\rho)}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle F(\sigma)} & \\ & F(B/\mathrm{im}f) & \end{array}$$

因为F是左正合的，故$F(\sigma)$是左S-单射，从而由第一章中的命题Ⅱ知 $\ker F(g)=\ker F(\rho)$，但 $\ker F(\rho)=\mathrm{im}F(f)$，故 $0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)$是正合列。

由这个定理可知，左正合的共变函子F保持核，即若$f: A\longrightarrow B$是左R-映射，则$F(\ker f)\cong\ker F(f)$。这是因为有左R-正合列 $0\longrightarrow\ker f\xhookrightarrow{i}A\xrightarrow{f}B$，故有正合列 $0\longrightarrow F(\ker f)\xrightarrow{F(i)}F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)$。因此$F(\ker f)\cong\mathrm{im}F(i)=\ker F(f)$。

定义4.2　设F是R-mod到 S-mod 的一个逆变函子。若当 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$是左$R$-短正合列时，必定$0\longrightarrow F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)$是正合列，则称$F$是左正合的。

由定义容易看出，左正合的逆变函子F将满射变成单射，即若$f: A\longrightarrow B$是左R-满射，则$F(f): F(B)\longrightarrow F(A)$是左$S$-单射。这是因为 $0\longrightarrow\ker f\xhookrightarrow{i}A\xrightarrow{f}B\longrightarrow 0$ 是左R-短正合列，故$0\longrightarrow F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)\xrightarrow{F(i)}F(\ker f)$ 是正合列，因此$F(f)$是左S-单射。

左正合逆变函子也可以按另一种方式来定义，即有下面定理。

定理4.2　设F是R-mod到S-mod的一个逆变函子，则F是左正合的，当且仅当对于每一个左R-正合列$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$，必定 $0\longrightarrow F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)$是正合列。

证　设对于每一个左R-正合列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$，必定$0\longrightarrow F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)$ 是正合列，则当 $0\longrightarrow X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z\longrightarrow 0$ 是左R-短正合列时，由于$X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z\longrightarrow 0$是左$R$-正合列，故$0\longrightarrow F(Z)\xrightarrow{F(\beta)}F(Y)\xrightarrow{F(\alpha)}F(X)$

是正合列，因此F是左正合的.

反之，设F是左正合的. 命 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ 是任意一个左R-正合列. 则首先由左R-短正合列 $0\longrightarrow \ker g\xhookrightarrow{i} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0$，可得正合列 $0\longrightarrow F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(i)}F(\ker g)$.

因为$\ker g=\operatorname{im} f$，故有交换图：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & {\scriptstyle f'}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle i} & \\ & \ker g & \end{array}$$

这里$f'(a)=f(a)$，$\forall a\in A$. 于是由于F是逆变函子，就有交换图：

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{F(f)} & F(A) \\ & {\scriptstyle F(i)}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle F(f')} & \\ & F(\ker g) & \end{array}$$

因为f'是左R-满射，且F是左正合的，故 $F(f')$是左S-单射. 从而由第一章中的命题Ⅱ知$\ker F(f)=\ker F(i)$. 但$\ker F(i)=\operatorname{im} F(g)$，故 $0\longrightarrow F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)$ 是正合列.

由这个定理可知，左正合逆变函子F将上核变成核，即若f: $A\longrightarrow B$是左R-映射，则$F(\operatorname{Coker} f)\cong\ker F(f)$. 这是因为有左$R$-正合列$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{\rho}\operatorname{Coker} f\longrightarrow 0$，故有正合列 $0\longrightarrow F(\operatorname{Coker} f)\xrightarrow{F(\rho)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)$，因此 $F(\operatorname{Coker} f)\cong \operatorname{im} F(\rho)=\ker F(f)$.

4.2 右正合函子

定义4.3　设F是 R-mod 到 S-mod 的一个共变函子。若当 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ 是左R-短正合列时，必定 $F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\longrightarrow 0$是正合列，则称$F$是右正合的。

由定义容易看出，右正合的共变函子F保持满射，即若$f: A\longrightarrow B$是左R-满射，则$F(f)$是左S-满射。

和左正合的情形相类似，右正合共变函子也可以按另一种方式来定义，即有下面定理。

定理4.3　设F是R-mod到S-mod的一个共变函子，则F是右正合的，当且仅当对于每一个左R-正合列$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$，必定$F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\longrightarrow 0$是正合列。

请读者自己证明之。

由这个定理可知，右正合共变函子F保持上核，即若$f: A\longrightarrow B$是左R-映射，则$F(\mathrm{Coker}f)\cong \mathrm{Coker}F(f)$。

定义4.4　设F是R-mod到S-mod的一个逆变函子。若当 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列时，必定 $F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)\longrightarrow 0$是正合列，则称$F$是右正合的。

易知右正合的逆变函子F将单射变成满射，即若 $f: A\longrightarrow B$是左R-单射，则$F(f)$是左S-满射。

同样，有下面定理。

定理4.4　设F是R-mod到S-mod的一个逆变函子，则F是右正合的，当且仅当对于每一个左R-正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$，必定 $F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)\longrightarrow 0$是正合列。

请读者自己证明之。

由这个定理可知，右正合的逆变函子F将核变成上核：$F(\ker f)\cong \mathrm{Coker}F(f)$。

4.3 正合函子

定义4.5 设F是R-mod到S-mod的一个共变或逆变函子. 若F既是左正合的，又是右正合的，则称F是正合的.

由定义可知，正合的共变函子保持单射、满射、核及上核；正合的逆变函子将单射变成满射，将满射变成单射，将核变成上核，将上核变成核.

我们可以用保持短正合列来刻划函子的正合性，即有下面定理.

定理4.5 设F是R-mod到S-mod的一个共变或逆变函子.

(i) 若F是共变的，则F是正合的，当且仅当对于每一个左R-短正合列$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$，必定$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\longrightarrow 0$是短正合列；

(ii) 若F是逆变的，则F是正合的，当且仅当对于每一个左R-短正合列$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$，必定$0\longrightarrow F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)\longrightarrow 0$是短正合列.

证 我们只证(i). 完全类似地可以证明(ii).

设F是正合的. 若$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列，则因$F$是左正合的，故$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)$是正合列. 又因$F$是右正合的，故$F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\longrightarrow 0$是正合列. 因此$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\longrightarrow 0$是短正合列.

反之，若当$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列时，必定$0\longrightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\longrightarrow 0$是短正

合列，则 $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ 及 $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ 都是正合列，从而F既是左正合的，又是右正合的，故F是正合的。

现在我们要指出正合函子的一个重要性质。为此，先证明下面引理。

引理4.1　设F是R-mod到S-mod 的一个正合的共变或逆变函子，并设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$是左$R$-正合列。

(i) 若F是共变的，则$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ 是正合列；

(ii) 若F是逆变的，则$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$ 是正合列。

证　我们只证明(i)。完全类似地可以证明(ii)。

考虑左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle f'}\big\downarrow & \nearrow{\scriptstyle i} & & & \\ \ker g & & & & \end{array}$$

其中$f'(a) = f(a)$，$\forall a \in A$。可知f'是满射，且上图中左边三角形是交换图。

因为F是共变函子，故有图：

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \\ {\scriptstyle F(f')}\big\downarrow & \nearrow{\scriptstyle F(i)} & & & \\ F(\ker g) & & & & \end{array}$$

其中左边三角形是交换图。

由于F是正合的共变函子，故$F(f')$是满射，从而由第一章中的命题Ⅱ知$\mathrm{im}F(f)=\mathrm{im}F(i)$。又因为$0\longrightarrow \ker g \xhookrightarrow{i} B\xrightarrow{g} C$是左$R$-正合列，且$F$是正合的共变函子，故$0\longrightarrow F(\ker g)\xrightarrow{F(i)} F(B)\xrightarrow{F(g)} F(C)$是正合列。因此$\mathrm{im}F(i)=\ker F(g)$。所以$\mathrm{im}F(f)=\ker F(g)$。这样就得到了正合列$F(A)\xrightarrow{F(f)} F(B)\xrightarrow{F(g)} F(C)$。

由这个引理，立刻得到下面定理。

定理4.6 设F是R-mod到S-mod的一个正合的共变或逆变函子，并设

$$\cdots\longrightarrow A_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}} A_n\xrightarrow{f_n} A_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

是左R-正合列。

(i) 若F是共变的，则

$$\cdots\longrightarrow F(A_{n+1})\xrightarrow{F(f_{n+1})} F(A_n)\xrightarrow{F(f_n)} F(A_{n-1})\longrightarrow\cdots$$

是正合列；

(ii) 若F是逆变的，则

$$\cdots\longrightarrow F(A_{n-1})\xrightarrow{F(f_n)} F(A_n)\xrightarrow{F(f_{n+1})} F(A_{n+1})\longrightarrow\cdots$$

是正合列。

这个定理说明，正合函子保持正合列。

最后，我们给出左正合函子或右正合函子是正合函子的条件，即有下面定理。

定理4.7 设F是R-mod到S-mod的一个共变或逆变函子。

(i) 若F是左正合的共变函子，则F是正合的，当且仅当F保持满射；

(ii) 若F是左正合的逆变函子，则F是正合的，当且仅当F将单射变成满射；

(iii) 若F是右正合的共变函子，则F是正合的，当且仅当F保持单射；

(iv) 若F是右正合的逆变函子，则F是正合的，当且仅当F将满射变成单射。

证　我们只证 (i)。其余情形可类似地证明。

若F正合，则F当然保持满射。今设F保持满射。若$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$是左$R$-短正合列，则由$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$是正合列及$F(g)$是满射，知$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$是短正合列，故$F$是正合的。

4.4　半正合函子

定义4.6　设F是R-mod到S-mod的一个共变函子。若当$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$是左$R$-短正合列时，必定$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$是正合列，则称$F$是半正合的。

由定义可知，左正合的共变函子及右正合的共变函子都是半正合的。

定义4.7　设F是R-mod到S-mod的一个逆变函子。若当$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$是左$R$-短正合列时，必定$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$是正合列，则称$F$是半正合的。

由定义可知，左正合的逆变函子及右正合的逆变函子都是半正合的。

我们指出，半正合函子保持可裂短正合列，即有下面引理。

引理4.2　设F是R-mod到S-mod的半正合的共变或逆变函子，并设$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$是左$R$-可裂短正合列。

(i) 若F是共变的，则$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$是可裂短正合列；

(ii) 若F是逆变的，则 $0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow 0$ 是可裂短正合列。

证 我们只证明 (i)。完全类似地可以证明 (ii)。

因为 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是左R-可裂短正合列，故存在左R-映射$\varphi: B \longrightarrow A$及$\psi: C \longrightarrow B$使

$$\varphi f = 1_A, \quad g\psi = 1_C.$$

因为F是半正合的共变函子，故首先有正合列

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C).$$

因为有$F(\varphi): F(B) \longrightarrow F(A)$使$F(\varphi)F(f) = 1_{F(A)}$，故$F(f)$左可裂，从而$F(f)$是单射。又因为有 $F(\psi): F(C) \longrightarrow F(B)$ 使 $F(g)F(\psi) = 1_{F(C)}$，故$F(g)$是满射。因此 $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ 是可裂短正合列。

现在我们指出，半正合函子是加法函子，即有下面定理。

定理4.8 设F是R-mod到S-mod的半正合的共变或逆变函子，则F是加法函子。

证 我们只对F是共变函子的情形进行证明，完全类似地可以对F是逆变的情形进行证明。

(i) 设A_1, A_2是左R-模，命

$$\begin{aligned} \lambda_1: A_1 &\longrightarrow A_1 \oplus A_2 \\ a_1 &\longmapsto (a_1, 0) \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} p_1: A_1 \oplus A_2 &\longrightarrow A_1 \\ (a_1, a_2) &\longmapsto a_1 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} \lambda_2: A_2 &\longrightarrow A_1 \oplus A_2 \\ a_2 &\longmapsto (0, a_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_2: A_1 \oplus A_2 &\longrightarrow A_2 \\ (a_1, a_2) &\longmapsto a_2 \end{aligned}$$

则首先有

$$p_1\lambda_1 = 1_{A_1}, \quad p_1\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 1_{A_1 \oplus A_2}$$
$$p_2\lambda_2 = 1_{A_2}, \quad p_2\lambda_1 = 0,$$

我们证明：

$$\left.\begin{array}{ll} F(p_1)F(\lambda_1)=1_{F(A_1)}, & F(p_1)F(\lambda_2)=0, \\ F(p_2)F(\lambda_2)=1_{F(A_2)}, & F(p_2)F(\lambda_1)=0, \end{array}\right\} F(\lambda_1)F(p_1)$$
$$+F(\lambda_2)F(p_2)=1_{F(A_1\oplus A_2)}.$$

事实上，由于F是共变函子，立刻得到

$$F(p_1)F(\lambda_1)=F(p_1\lambda_1)=1_{F(A_1)},$$
$$F(p_2)F(\lambda_2)=F(p_2\lambda_2)=1_{F(A_2)}.$$

因为有左R-可裂短正合列：

$$0\longrightarrow A_1\xrightarrow{\lambda_1}A_1\oplus A_2\xrightarrow{p_2}A_2\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow A_2\xrightarrow{\lambda_2}A_1\oplus A_2\xrightarrow{p_1}A_1\longrightarrow 0,$$

故由引理4.2知有可裂短正合列：

$$0\longrightarrow F(A_1)\xrightarrow{F(\lambda_1)}F(A_1\oplus A_2)\xrightarrow{F(p_2)}F(A_2)\longrightarrow 0, \quad (\text{甲})$$
$$0\longrightarrow F(A_2)\xrightarrow{F(\lambda_2)}F(A_1\oplus A_2)\xrightarrow{F(p_1)}F(A_1)\longrightarrow 0,$$

从而就有

$$F(p_1)F(\lambda_2)=0, \quad F(p_2)F(\lambda_1)=0.$$

因为对于（甲），有 $F(p_2)F(\lambda_2)=1_{F(A_2)}$，故 $F(A_1\oplus A_2)=\operatorname{im}F(\lambda_1)\oplus\operatorname{im}F(\lambda_2)$。于是当$x\in F(A_1\oplus A_2)$时，设$x=F(\lambda_1)(u)+F(\lambda_2)(v)$，其中$u\in F(A_1)$，$v\in F(A_2)$，则有

$$(F(\lambda_1)F(p_1)+F(\lambda_2)F(p_2))(x)=x,$$

因此有

$$F(\lambda_1)F(p_1)+F(\lambda_2)F(p_2)=1_{F(A_1\oplus A_2)}.$$

（ii）现在设φ_1,φ_2：$A\longrightarrow B$是左R-映射。命

$$\begin{array}{llll} \lambda_1: & A\longrightarrow A\oplus A, & p_1: & A\oplus A\longrightarrow A \\ & a\longmapsto (a,0) & & (a_1,a_2)\longmapsto a_1, \\ \lambda_2: & A\longrightarrow A\oplus A & p_2: & A\oplus A\longrightarrow A \\ & a\longmapsto (0,a), & & (a_1,a_2)\longmapsto a_2, \end{array}$$

则首先有

$$p_1\lambda_1=1_A,\quad p_1\lambda_2=0,\qquad \lambda_1p_1+\lambda_2p_2=1_{A\oplus A},$$
$$p_2\lambda_2=1_A,\quad p_2\lambda_1=0,$$

且由（i）知有

$$\left.\begin{array}{ll}F(p_1)F(\lambda_1)=1_{F(A)}, & F(p_1)F(\lambda_2)=0,\\ F(p_2)F(\lambda_2)=1_{F(A)}, & F(p_2)F(\lambda_1)=0,\end{array}\right\}F(\lambda_1)F(p_1)$$
$$+F(\lambda_2)F(p_2)=1_{F(A\oplus A)}.$$

于是由

$$(\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)\lambda_1=\varphi_1,\qquad (\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)\lambda_2=\varphi_2$$

可得

$$\varphi_1+\varphi_2=(\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)(\lambda_1+\lambda_2)$$

从而先可得到

$$F(\varphi_1+\varphi_2)=F(\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)F(\lambda_1+\lambda_2)$$

因为$p_1(\lambda_1+\lambda_2)=p_1\lambda_1=1_A$, $p_2(\lambda_1+\lambda_2)=p_2\lambda_2=1_A$，故有

$$F(p_1)F(\lambda_1+\lambda_2)=1_{F(A)},\quad F(p_2)F(\lambda_1+\lambda_2)=1_{F(A)}.$$

从而有

$$\begin{aligned}F(\lambda_1+\lambda_2)&=1_{F(A\oplus A)}F(\lambda_1+\lambda_2)\\&=(F(\lambda_1)F(p_1)+F(\lambda_2)F(p_2))F(\lambda_1+\lambda_2)\\&=F(\lambda_1)(F(p_1)F(\lambda_1+\lambda_2))\\&\quad+F(\lambda_2)(F(p_2)F(\lambda_1+\lambda_2))\\&=F(\lambda_1)+F(\lambda_2).\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}F(\varphi_1+\varphi_2)&=F(\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)(F(\lambda_1)+F(\lambda_2))\\&=F((\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)\lambda_1)+F((\varphi_1p_1+\varphi_2p_2)\lambda_2)\\&=F(\varphi_1)+F(\varphi_2),\end{aligned}$$

故F是加法函子。

由这个定理又可知，R-mod到S-mod的左正合共变或逆变函子及右正合共变或逆变函子都是加法函子。

§5　函子 Hom 及 ⊗

本节集中讨论 R-mod 到 $\mathbf{Z}$-mod 的函子 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$，$\mathrm{Hom}_R(-,B)$，$A\otimes_R$及mod-R到mod-$\mathbf{Z}$ 的函子$\otimes_R B$。我们将指出它们的一些基本的性质。

首先我们知道，$\mathrm{Hom}_R(A,-)$是共变的，$\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 是逆变的，而$A\otimes_R$及$\otimes_R B$都是共变的。

5.1　Hom 及 ⊗ 都是加法函子

定理5.1　$\mathrm{Hom}_R(A,-)$、$\mathrm{Hom}_R(-,B)$、$A\otimes_R$及$\otimes_R B$都是加法函子。

证　当$f\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)$时，前面曾记$f_*=\mathrm{Hom}_R(A,-)(f)$，这里$f_*(\varphi)=f\varphi$，$\forall\varphi\in\mathrm{Hom}_R(A,X)$。因为$(f+g)_*(\varphi)=(f+g)\varphi=f\varphi+g\varphi=(f_*+g_*)(\varphi)$，　故　$(f+g)_*=f_*+g_*$，即$\mathrm{Hom}_R(A,-)(f+g)=\mathrm{Hom}_R(A,-)(f)+\mathrm{Hom}_R(A,-)(g)$。所以 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 是加法函子。同样，$\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 是加法函子。

因为$(A\otimes_R)(f)=1_A\otimes f$，故$(A\otimes_R)(f+g)=1_A\otimes(f+g)=1_A\otimes f+1_A\otimes g=(A\otimes_R)(f)+(A\otimes_R)(g)$，所以 $A\otimes_R$ 是加法函子。同样，$\otimes_R B$是加法函子。

因为加法函子保持可裂短正合列及有限直和，故立刻得到下面两个推论。

推论5.1　(i)设 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ 是左R-可裂短正合列，则对任何左R-模X及右R-模Y，必定

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(X,A)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}_R(X,B)$$

$$\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_R(X,C)\longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, X) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Y \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes f} Y \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes g} Y \otimes_R C \longrightarrow 0$$

都是可裂短正合列；

(ii) 设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是右R-可裂短正合列，则对任何左R-模X，必定

$$0 \longrightarrow A \otimes_R X \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes_R X \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes_R X \longrightarrow 0$$

是可裂短正合列。

推论5.2 (i) 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是左R-模，则对任何左R-模X及右R-模Y，有

$$\mathrm{Hom}_R(X, \bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_R(X, A_i),$$

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i, X) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_R(A_i, X),$$

$$Y \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (Y \otimes_R A_i);$$

(ii) 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是右R-模，则对任何左R-模X，有

$$(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \otimes_R X \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i \otimes_R X).$$

5.2 Hom 是左正合的

定理5.2 对于任意左R-模X，$\mathrm{Hom}_R(X, -)$及$\mathrm{Hom}_R(-, X)$都是左正合的。

证 我们只对$\mathrm{Hom}_R(X, -)$进行证明。对于$\mathrm{Hom}_R(-, X)$可以类似地证明。

设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是左R-短正合列。考虑

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X, C). \tag{甲}$$

若$\varphi\in\ker f_*$，则$f\varphi=0$，故$\mathrm{im}\varphi\subseteq\ker f=0$，从而$\varphi=0$。因此$f_*$是单射。由 $g_*f_*=(gf)_*=0_*=0$ 知 $\mathrm{im}f_*\subseteq\ker g_*$。若$\varphi\in\ker g_*$，我们要找一个 $\psi\in\mathrm{Hom}_R(X,A)$ 使$f_*(\psi)=\varphi$。为此，设$x\in X$。因为$g\varphi=0$，故 $g\varphi(x)=0$。所以 $\varphi(x)\in\ker g=\mathrm{im}f$。因此有$a\in A$使$f(a)=\varphi(x)$，且因 f 是单射，可知 a 由 x 唯一确定。现在命$\psi: X\longrightarrow A$是$x\longmapsto a$，其中 $a\in A$满足 $f(a)=\varphi(x)$，则易知$\psi\in\mathrm{Hom}_R(X,A)$，且$f_*(\psi)=\varphi$。于是$\mathrm{im}f_*=\ker g_*$。因此（甲）是正合列。故$\mathrm{Hom}_R(X,-)$左正合。

因为左正合共变函子保持单射及核，左正合逆变函子将满射变成单射，将上核变成核，故有下面推论。

推论5.3　(i) 若f是左R-单射，则f_*是左 $\mathbf{Z}$-单射。又，对于任何左R-映射g，有$\mathrm{Hom}_R(X,\ker g)\cong\ker g_*$；

(ii) 若f是左R-满射，则f^*是左 $\mathbf{Z}$-单射。又，对于任何左R-映射g，有$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}g,Y)\cong\ker g^*$。

下面我们举例说明$\mathrm{Hom}_R(X,-)$及 $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ 未必是右正合的。

例5.1　$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),-)$不是右正合的。

证　对于左 $\mathbf{Z}$-满射 $\mathbf{Q}\xrightarrow{\rho}\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$，其中$\rho$是自然同态映射，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),\mathbf{Q})\xrightarrow{\rho_*}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

容易知道$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),\mathbf{Q})=0$。但是$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\neq0$，这是因为设 $\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})=\{\bar{0},\bar{1}\}$时，命$g:\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\longrightarrow\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$是$\bar{0}\longmapsto0+\mathbf{Z}$，$\bar{1}\longmapsto\frac{1}{2}+\mathbf{Z}$，则 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$，且$g\neq0$。于是 ρ_*不是满射。故 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),-)$不是右正合的。

例5.2　$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Z})$不是右正合的。

证　对于左 $\mathbf{Z}$-单射$\mathbf{Z}\xhookrightarrow{i}\mathbf{Q}$，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q},\mathbf{Z})\xrightarrow{i^*}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}).$$

容易知道$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q},\mathbf{Z})=0$。但$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}\neq 0$，故$i^*$不是满射。因此$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Z})$不是右正合的。

5.3　⊗ 是右正合的

定理5.3　$X\otimes_R$及$\otimes_R Y$都是右正合的。

证　我们只对$X\otimes_R$进行证明。对于$\otimes_R Y$可以类似地证明。设$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列。考虑

$$X\otimes_R A\xrightarrow{1\otimes f}X\otimes_R B\xrightarrow{1\otimes g}X\otimes_R C\longrightarrow 0,\qquad (甲)$$

若$\sum x_i\otimes c_i\in X\otimes_R C$，其中$x_i\in X$，$c_i\in C$，则因$g$是满射，故有$b_i\in B$使$c_i=g(b_i)$，从而有$(1\otimes g)(\sum_i x_i\otimes b_i)=\sum_i x_i\otimes c_i$。因此$1\otimes g$是满射。

由$(1\otimes g)(1\otimes f)=1\otimes gf=0$　知$\mathrm{im}(1\otimes f)\subseteq\ker(1\otimes g)$，故可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} X\otimes_R B & \xrightarrow{1\otimes g} & X\otimes_R C \\ & {\scriptstyle\rho}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\varphi} & \\ & X\otimes_R B/\mathrm{im}(1\otimes f) & \end{array}$$

其中ρ是自然同态映射，补出的φ是左$\mathbf{Z}$-映射。

只要证明φ是单射，即可得$\mathrm{im}(1\otimes f)=\ker(1\otimes g)$。为此，命

$$\psi:\ X\times C\longrightarrow X\otimes_R B/\mathrm{im}(1\otimes f)$$
$$(x,c)\longmapsto x\otimes b+\mathrm{im}(1\otimes f),$$

其中$b\in B$满足$g(b)=c$。易知ψ是映射，且是R-双加性函数。于是可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} X\times C & \xrightarrow{h} & X\otimes_R C \\ & \searrow^{\psi} \quad \swarrow^{\overline{\psi}} & \\ & X\otimes_R B/\operatorname{im}(1\otimes f) & \end{array}$$

其中$h(x,c)=x\otimes c$，补出的$\overline{\psi}$是左$\mathbf{Z}$-映射。

因为当$b\in B$时有$\overline{\psi}\varphi(x\otimes b+\operatorname{im}(1\otimes f))=\overline{\psi}(x\otimes g(b))=x\otimes b+\operatorname{im}(1\otimes f)$，故$\overline{\psi}\varphi=1$，所以$\varphi$是单射。于是$\operatorname{im}(1\otimes f)=\ker(1\otimes g)$，从而（甲）是正合列。故$X\otimes_R$右正合。

因为右正合共变函子保持满射及上核，故有下面推论。

推论5.4 (i) 若f是左R-满射，则$1_X\otimes f$是左$\mathbf{Z}$-满射。又，对于任何左R-映射g，有$X\otimes_R\operatorname{Coker}g\cong\operatorname{Coker}(1_X\otimes g)$；

(ii) 若f是右R-满射，则$f\otimes 1_Y$是右$\mathbf{Z}$-满射。又，对于任何右R-映射g，有$\operatorname{Coker}g\otimes_R Y\cong\operatorname{Coker}(g\otimes 1_Y)$。

下面我们举例说明$X\otimes_R$及$\otimes_R Y$未必是左正合的。

例5.3 $\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}$不是左正合的。

证 对于左$\mathbf{Z}$-单射$\mathbf{Z}\xrightarrow{i}\mathbf{Q}$，有

$$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\xrightarrow{1\otimes i}\mathbf{Z}(/2\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}.$$

$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}=0$。这是因为对任何$x\in\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}),q\in\mathbf{Q}$，有$x\otimes q=2x\otimes\dfrac{q}{2}=0$。但是$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\neq 0$，故$1\otimes i$不是单射。因此$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}$不是左正合的。

完全类似地可以证明$\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$不是左正合的。

5.4 $\operatorname{Hom}_R(X,-)$保持直积；$\operatorname{Hom}_R(-,X)$将直和变成直积

定理5.4 设X是左R-模，则$\operatorname{Hom}_R(X,-)$保持直积，即对任意一集左$R$-模$\{A_j\mid j\in J\}$，恒有

$$\mathrm{Hom}_R(X, \prod_{j\in J} A_j) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(X, A_j).$$

证 命

$$\theta: \mathrm{Hom}_R(X, \prod_{j\in J} A_j) \longrightarrow \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(X, A_j)$$

$$\varphi \longmapsto (\cdots, p_i\varphi, \cdots, p_j\varphi, \cdots),$$

其中p_j是$\prod_{j\in J} A_j$到A_j的投射，则易知θ是左**Z**-映射。

若 $(\cdots, f_i, \cdots, f_j, \cdots) \in \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(x, A_j)$，则得到一集左$R$-映射$\{f_j: X \longrightarrow A_j \mid j \in J\}$。于是可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j\in J} A_j & \xleftarrow{\varphi} & X \\ & {\scriptstyle p_j}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f_j} & \\ & A_j & \end{array}, \quad \forall j \in J$$

其中补出的φ是左R-映射。于是有$\theta(\varphi) = (\cdots, f_i, \cdots, f_j, \cdots)$。故$\theta$是满射。

若$\theta(\varphi) = \theta(\psi) = (\cdots, f_i, \cdots, f_j, \cdots)$，则$\varphi$及$\psi$都将上图补成交换图。因此$\varphi = \psi$，故$\theta$是单射。这就完成了证明。

定理5.5 设X是左R-模，则 $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ 将直和变成直积，即对任意一集左R-模$\{A_j \mid j \in J\}$，恒有

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} A_j, X) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(A_j, X).$$

证 命

$$\theta: \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} A_j, X) \longrightarrow \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(A_j, X)$$

$$\varphi \longmapsto (\cdots, \varphi\lambda_i, \cdots, \varphi\lambda_j, \cdots)$$

其中λ_j是A_j到$\bigoplus_{j\in J} A_j$的入射。则易知θ是左**Z**-映射。

和定理5.4的证明相类似地可以证明 θ 是双射。这就完成了证明。

5.5　⊗保持直和

定理5.6　(i) 设 X 是右 R-模，则 $X\otimes_R$ 保持直和，即对任意一集左 R-模 $\{A_j \mid j\in J\}$，恒有

$$X\otimes_R\left(\bigoplus_{j\in J} A_j\right)\cong\bigoplus_{j\in J}(X\otimes_R A_j);$$

(ii) 设 Y 是左 R-模，则 $\otimes_R Y$ 保持直和，即对任意一集右 R-模 $\{B_k \mid k\in K\}$，恒有

$$\left(\bigoplus_{k\in K} B_k\right)\otimes_R Y\cong\bigoplus_{k\in K}(B_k\otimes_R Y).$$

证　我们只证明(i)。完全类似地可以证明(ii)。

先命

$$f: X\times\left(\bigoplus_{j\in J} A_j\right)\longrightarrow\bigoplus_{j\in J}(X\otimes_R A_j)$$

$$(x, (\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots))\longmapsto(\cdots, x\otimes a_i, \cdots, x\otimes a_j, \cdots),$$

易知 f 是 R-双加性函数。于是可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc}
X\times\left(\bigoplus_{j\in J} A_j\right) & \xrightarrow{\quad h\quad} & X\otimes_R\left(\bigoplus_{j\in J} A_j\right)\\
 & f\searrow\quad\quad\swarrow\theta & \\
 & \bigoplus_{j\in J}(X\otimes_R A_j) &
\end{array}$$

其中 $h(x, a)=x\otimes a$，补出的 θ 是左 $\mathbf{Z}$-映射。

设 μ_j 是 $X\otimes_R A_j$ 到 $\bigoplus_{j\in J}(X\otimes_R A_j)$ 的入射，λ_j 是 A_j 到 $\bigoplus_{j\in J} A_j$ 的入射，则可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j\in J}(X\otimes_R A_j) & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & X\otimes_R(\bigoplus_{j\in J} A_j) \\ & \nwarrow^{\mu_j} \quad \nearrow^{1\otimes\lambda_j} & \\ & X\otimes_R A_j & \end{array} \qquad \forall j\in J$$

通过简单的直接计算即知$\varphi\theta=1$，$\theta\varphi=1$. 故θ是左**Z**-同构映射。这就完成了证明。

5.6 附加对$(B\otimes_R, \mathrm{Hom}_S(B,-))$

下面我们要证明，当已给(S,R)-双模B时，$(B\otimes_R, \mathrm{Hom}_S(B,-))$是附加对；当已给$(R,S)$-双模B时，$(\otimes_R B, \mathrm{Hom}_S(B,-))$是附加对。为此，我们先证明下面的附加同构定理。

定理5.7（附加同构定理）（i）设已给(S,R)-双模B及左R-模A和左S-模C。当$f\in\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C)$时，对于$a\in A$，命$f_a: B\longrightarrow C$是$b\longmapsto f(b\otimes a)$，则$f_a\in\mathrm{Hom}_S(B,C)$. 然后命$\bar{f}$: $A\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(B,C)$是$a\longmapsto f_a$，则$\bar{f}\in\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$. 最后，命

$$\tau: \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$$
$$f\longmapsto\bar{f},$$

则τ是**Z**-同构映射；

（ii）设已给(R,S)-双模B及右R-模A和右S-模C。当$f\in\mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C)$时，对于$a\in A$，命$f_a: B\longrightarrow C$是$b\longmapsto f(a\otimes b)$，则$f_a\in\mathrm{Hom}_S(B,C)$，然后命$\bar{f}: A\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(B, C)$是$a\longmapsto f_a$，则$\bar{f}\in\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$. 最后，命

$$\tau: \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$$
$$f\longmapsto\bar{f},$$

则τ是$\mathbf{Z}$-同构映射。

证　我们只证明(i)。完全类似地可以证明(ii)。

$B\otimes_R A$ 是左S-模：$s(b\otimes a)=sb\otimes a$，由此立刻可知 $f_a\in \mathrm{Hom}_S(B,C)$。又，$\mathrm{Hom}_S(B,C)$是左$R$-模：$(rg)(b)=g(br)$，$\forall g\in \mathrm{Hom}_S(B,C)$。由此易知$\bar f\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$。容易验证$\tau$是$\mathbf{Z}$-映射。为证$\tau$是$\mathbf{Z}$-同构映射，我们来找它的逆映射。

设$g\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$。命$\xi$：$B\times A\longrightarrow C$是$(b,a)\longmapsto g(a)(b)$，易知$\xi$是$R$-双加性函数。于是可以唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} B\times A & \xrightarrow{\ h\ } & B\otimes_R A \\ & {\scriptstyle\xi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g'} & \\ & C & \end{array}$$

其中 $h(b,a)=b\otimes a$，补出的g'是$\mathbf{Z}$-映射。容易验证$g'\in \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A,C)$。

易知g'由g唯一确定。于是命

$$\sigma:\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A,C)$$

$$g\longmapsto g'$$

时知σ是映射，且可知σ是$\mathbf{Z}$-映射。

现在我们证明σ是τ的逆映射。为此，设$f\in \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A,C)$，则有

$$(\sigma\tau)(f)=\sigma(\tau(f))=\sigma(\bar f)=\bar f'.$$

但$\bar f'(b\otimes a)=\bar f(a)(b)=f_a(b)=f(b\otimes a)$，故$\bar f'=f$，从而$\sigma\tau=1$。

又，当$g\in \mathrm{Hom}_R(A,\ \mathrm{Hom}_S(B,C))$时，有

$$(\tau\sigma)(g)=\tau(\sigma(g))=\tau(g')=\overline{g'}.$$

因为 $g(a)(b)=g'(b\otimes a)$, $g'_a(b)=g'(b\otimes a)$，故 $g(a)=g'_a$，从而 $\overline{g'}(a)=g'_a=g(a)$，因此 $\overline{g'}=g$，故$\tau\sigma=1$。这就证明了τ是Z-同构映射。

定理5.8 (i) 当已给(S,R)-双模B时，$(B\otimes_R, \mathrm{Hom}_S(B,-))$是附加对；

(ii) 当已给 (R,S)-双模B 时，$(\otimes_R B, \mathrm{Hom}_S(B,-))$ 是附加对。

证 我们只证明(i)．类似地可以证明(ii)．

首先，$B\otimes_R$是R-mod到S-mod的共变函子，$\mathrm{Hom}_S(B,-)$是S-mod到R-mod的共变函子．

对于任意左R-模A及左S-模C，根据附加同构定理知有Z-同构映射

$$\tau_{A,C}: \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C))$$

$$f\longmapsto \overline{f}\qquad,$$

其中$\overline{f}$的意义见附加同构定理．于是只要证明下面两个图都是交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C) & \xrightarrow{\tau_{A,C}} & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) \\
\downarrow{\scriptstyle (1\otimes f)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A', C) & \xrightarrow{\tau_{A',C}} & \mathrm{Hom}_R(A', \mathrm{Hom}_S(B,C)),
\end{array}$$

$$\forall A'\xrightarrow{f}A, \qquad (甲)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C) & \xrightarrow{\tau_{A,C}} & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)) \\
\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle (g_*)_*} \\
\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C') & \xrightarrow{\tau_{A,C'}} & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C')),
\end{array}$$

$$\forall C\xrightarrow{g}C', \qquad (乙)$$

为证(甲)是交换图，设$\varphi\in\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C)$，则有

$$(f^*\tau_{A,C})(\varphi)=f^*(\bar{\varphi})=\bar{\varphi}f,$$

$$\tau_{A',C}(1\otimes f)^*(\varphi)=\tau_{A',C}(\varphi\cdot(1\otimes f))=\overline{\varphi\cdot(1\otimes f)}.$$

因为当$a'\in A$，$b\in B$时，有

$(\bar{\varphi}f)(a')(b)=\bar{\varphi}(f(a'))(b)=\varphi_{f(a')}(b)=\varphi(b\otimes f(a'))$,

$\overline{\varphi\cdot(1\otimes f)}(a')(b)=(\varphi\cdot(1\otimes f))_{a'}(b)=\varphi\cdot(1\otimes f)(b\otimes a')=\varphi(b\otimes f(a'))$，故 $f^*\cdot\tau_{A,C}=\tau_{A',C}\cdot(1\otimes f)^*$. 因此（甲）是交换图。

类似地可以证明(乙)是交换图。这就证明了(i)。

当已给右R-模B时，因为恒有$(\mathbf{Z},R)$-双模B，故$(B\otimes_R, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B,-))$及$(\otimes_{\mathbf{Z}}B, \mathrm{Hom}_R(B,-))$都是附加对。

当已给左R-模B时，因为恒有$(R,\mathbf{Z})$-双模B，故$(B\otimes_{\mathbf{Z}}, \mathrm{Hom}_R(B,-))$及$(\otimes_R B, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B,-))$都是附加对。

5.7 模范畴中的正向极限及逆极限

我们在第一章中曾经证明，当(F, G)是附加对时，在正向极限存在的前提下，F保持正向极限；在逆极限存在的前提下，G保持逆极限。现在我们对模范畴中的正向极限及逆极限作进一步讨论。

我们先来证明模范畴中以任意拟序集为指标集的正向系统的正向极限及逆系统的逆极限恒存在。

定理5.9 对于任意拟序集$(I,\leqslant)$，R-mod中每一个以I为指标集的正向系统都有正向极限，每一个以I为指标集的逆系统都有逆极限。

证 设$\{F_i,\varphi_i^j\}$是R-mod中以I为指标集的一个正向系统。命S是$\bigoplus_{i\in I}F_i$的由一切元素

$$\lambda_j\varphi_i^j(a_i)-\lambda_i(a_i),\quad \forall i\leqslant j,\ a_i\in F_i$$

生成的子模，其中λ_i是F_i到$\bigoplus_{i\in I}F_i$的入射，则得到左R-模$(\bigoplus_{i\in I}F_i)/$

命

$$S. \alpha_i: F_i \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} F_i)/S$$

$$a_i \longmapsto \lambda_i(a_i) + S,$$

则易知α_i是左R-映射，且易知$\alpha_j\varphi_j^i = \alpha_i$，$\forall i \leqslant j$。

我们来证明$\{(\bigoplus_{i\in I} F_i)/S, \alpha_i\}$是$\{F_i, \varphi_j^i\}$的正向极限。

为此，设X是任意左R-模，并设一集左R-映射$\{f_i: F_i \longrightarrow X \mid i\in I\}$满足$f_i = f_j\varphi_j^i$，$\forall i \leqslant j$，命

$$\rho: \quad \bigoplus_{i\in I} F_i \longrightarrow X$$

$$(\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots) \longmapsto \sum_{i\in I} f_i(a_i),$$

易知ρ是左R-映射。又由$f_i = f_j\varphi_j^i$，$\forall i \leqslant j$，可知

$$\rho(\lambda_j\varphi_j^i(a_i) - \lambda_i(a_i)) = 0, \quad \forall i \leqslant j, \ a_i \in F_i.$$

故$S \subseteq \ker\rho$。于是可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} F_i & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & X \\ & {\scriptstyle \sigma}\searrow \qquad \nearrow{\scriptstyle \beta} & \\ & (\bigoplus_{i\in I} F_i)/S & \end{array}$$

其中σ是自然同态映射，补出的β是左R-映射。

现在容易证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i\in I} F_i)/S & \xrightarrow{\quad \beta \quad} & X \\ & {\scriptstyle \alpha_i}\nwarrow \qquad \nearrow{\scriptstyle f_i} & \\ & F_i & \end{array} \qquad \forall i \in I$$

事实上，若$a_i \in F_i$，则有$\beta\alpha_i(a_i) = \beta(\lambda_i(a_i) + S) = \beta\sigma(\lambda_i(a_i)) = \rho(\lambda_i(a_i)) = f_i(a_i)$，故$\beta\alpha_i = f_i$，$\forall i \in I$。因此上图是交换图。

又，若左R-映射$\beta': (\bigoplus_{i\in I} F_i)/S \longrightarrow X$满足$\beta'\alpha_i = f_i$，$\forall i \in I$，

则 $\beta'(\sum_{i\in I}\lambda_i(a_i)+S)=\beta'(\sum_{i\in I}\alpha_i(a_i))=\sum_{i\in I}\beta'\alpha_i(a_i)=\sum_{i\in I}f_i(a_i)$。但 $\beta(\sum_{i\in I}\lambda_i(a_i)+S)=\rho(\sum_{i\in I}\lambda_i(a_i))=\sum_{i\in I}f_i(a_i)$，故 $\beta'=\beta$。这就证明了$\{(\bigoplus_{i\in I}F_i)/S,\alpha_i\}$是$\{F_i,\varphi_i^j\}$的正向极限。

现在设$\{F_i,\psi_i^j\}$是 R-mod中以I为指标集的一个逆系统。命

$$A=\{(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)\in\prod_{i\in I}F_i\,|\,a_i=\psi_i^j(a_j),\ \forall i\leqslant j\},$$

易知A是$\prod_{i\in I}F_i$的子模。再命

$$\alpha_i:\ A\longrightarrow F_i$$
$$(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)\longmapsto a_i$$

易知α_i是左R-映射，且$\psi_i^j\alpha_j=\alpha_i$，$\forall i\leqslant j$。

和正向极限情形的证明类似，可以证明 $\{A,\alpha_i\}$是$\{F_i,\psi_i^j\}$的逆极限。

由这个定理及定理5.8和定理2.3，立刻得到下面推论。

推论5.5 (i) $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 保持逆极限，即 $\mathrm{Hom}_R(X,\varprojlim A_i)=\varprojlim \mathrm{Hom}_R(X,A_i)$；

(ii) $X\otimes_R$及 $\otimes_R Y$ 都保持正向极限，即 $X\otimes_R(\varinjlim A_i)=\varinjlim(X\otimes_R A_i)$，$(\varinjlim B_i)\otimes_R Y=\varinjlim(B_i\otimes_R Y)$。

作为本章的结束，我们来证明“正向极限保持短正合列”.为此先引入一些概念。

设$(I,\leqslant)$是任意拟序集，$\{F_i,\varphi_i^j\}$及$\{G_i,\psi_i^j\}$是R-mod中以I为指标集的两个正向系统。于是可设 $\{\bigoplus_{i\in I}F_i/S,\alpha_i\}$及$\{\bigoplus_{i\in I}G_i/T,\beta_i\}$ 分别是$\{F_i,\varphi_i^j\}$及$\{G_i,\psi_i^j\}$的正向极限，其中 S,α_i及T,β_i的意义见定理5.9。

设s是$\{F_i,\varphi_i^j\}$到$\{G_i,\psi_i^j\}$的一个自然变换，则对于每一个$i\in I$，都有一个左R-映射s_i: $Fi\longrightarrow G_i$，且有交换图：

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{s_i} & G_i \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_j^i} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_j^i} \\ F_j & \xrightarrow{s_j} & G_j \end{array} \qquad \forall i \leqslant j.$$

，

于是得到一集左 R-映射$\{f_i=\beta_i s_i: F_i \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} G_i)/T \mid i \in I\}$，满足 $f_j\varphi_j^i=f_i$，$\forall i\leqslant j$. 故可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i\in I} F_i)/S & \overset{\vec{s}}{\dashrightarrow} & (\bigoplus_{i\in I} G_i)/T \\ & {\scriptstyle \alpha_i}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \beta_i s_i} & \\ & F_i & \end{array} \qquad \forall i \in I$$

其中补出的$\vec{s}$是左R-映射. 可知有

$$\vec{s}\,(\sum_{i\in I}\lambda_i(a_i)+S)=\sum_{i\in I}\mu_i s_i(a_i)+T,$$

其中λ_i是F_i到$\bigoplus_{i\in I} F_i$的入射，μ_i是G_i到$\bigoplus_{i\in I} G_i$的入射.

以后写成

$$\varinjlim F_i \xrightarrow{\vec{s}} \varinjlim G_i.$$

当 $(I,\leqslant)$ 是正向拟序集时，$(\bigoplus_{i\in I} F_i)/S$ 的元素可以有简洁的表示法，即有下面定理.

定理5.10 设 $(I,\leqslant)$ 是正向拟序集，$\{F_i,\varphi_j^i\}$ 是 R-mod 中以I为指标集的一个正向系统，则有

(i) $(\bigoplus_{i\in I} F_i)/S=\{\lambda_i(a_i)+S \mid a_i\in F_i, i\in I\}$；

(ii) $\lambda_i(a_i)+S=0$，当且仅当存在$t\geqslant i$ 使$\varphi_t^i(a_i)=0$. 其中λ_i是F_i到$\bigoplus_{i\in I} F_i$的入射.

证 (i) 设$\lambda_{i_1}(a_{i_1})+\cdots+\lambda_{i_k}(a_{i_k})+S\in(\bigoplus_{i\in I} F_i)/S$.因为$I$是

正向拟序集，故有$j\in I$使$i_1,\cdots,i_k$都$\leqslant j$。命$b^{i_l}=\varphi_j^{i_l}(a_{i_l})$，$l=1,\cdots,k$，并命$b=b^{i_1}+\cdots+b^{i_k}$，则$b\in F_j$。由于$\lambda_j(b)=\lambda_j(b^{i_1})+\cdots+\lambda_j(b^{i_k})=\lambda_j\varphi_j^{i_1}(a_{i_1})+\cdots+\lambda_j\varphi_j^{i_k}(a_{i_k})$，故$\lambda_j(b)-(\lambda_{i_1}(a_{i_1})+\cdots+\lambda_{i_k}(a_{i_k}))\in S$。从而$\lambda_{i_l}(a_{i_l})+\cdots+\lambda_{i_k}(a_{i_k})+S=\lambda_j(b)+S$。这就证明了(i)。

(ii) 若存在$t\geqslant i$使$\varphi_t^i(a_i)=0$，则$\lambda_i(a_i)=\lambda_i(a_i)-\lambda_t\varphi_t^i(a_i)\in S$，故$\lambda_i(a_i)+S=0$。

反之，设$\lambda_i(a_i)+S=0$。则$\lambda_i(a_i)\in S$。故可设

$$\lambda_i(a_i)=[\lambda_{k_1}\varphi_{k_1}^{j_1}(a_{j_1})-\lambda_{j_1}(a_{j_1})]+\cdots+[\lambda_{k_n}\varphi_{k_n}^{j_n}(a_{j_n})-\lambda_{j_n}(a_{j_n})].$$

命$t\in I$使i及$j_1,\cdots,j_n,k_1,\cdots,k_n$都小于或等于$t$，则有

$$\begin{aligned}\lambda_t\varphi_t^i(a_i)&=[\lambda_t\varphi_t^i(a_i)-\lambda_i(a_i)]+\lambda_i(a_i)\\&=[\lambda_t\varphi_t^i(a_i)-\lambda_i(a_i)]+[\lambda_{k_1}\varphi_{k_1}^{j_1}(a_{j_1})-\lambda_{j_1}(a_{j_1})]\\&\quad+\cdots+[\lambda_{k_n}\varphi_{k_n}^{j_n}(a_{j_n})-\lambda_{j_n}(a_{j_n})].\end{aligned}$$

因为 $\lambda_k\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l})-\lambda_{j_l}(a_{j_l})=\lambda_t\varphi_t^{j_l}(a_{j_l})-\lambda_{j_l}(a_{j_l})-\lambda_t\varphi_t^{j_l}(a_{j_l})+\lambda_t\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l})$，且$\varphi_t^{k_l}\varphi_{k_l}^{j_l}=\varphi_t^{j_l}$，故有

$$\begin{aligned}\lambda_{k_l}\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l})-\lambda_{j_l}(a_{j_l})&=[\lambda_t\varphi_t^{j_l}(a_{j_l})-\lambda_{j_l}(a_{j_l})]\\&\quad+[\lambda_t\varphi_t^{k_l}(-\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l}))-\lambda_{k_l}(-\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l}))]\end{aligned}$$

记$b_{k_l}=-\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l})$，则有

$$\begin{aligned}\lambda_{k_l}\varphi_{k_l}^{j_l}(a_{j_l})-\lambda_{j_l}(a_{j_l})&=[\lambda_t\varphi_t^{j_l}(a_{j_l})-\lambda_{j_l}(a_{j_l})]\\&\quad+[\lambda_t\varphi_t^{k_l}(b_{k_l}))-\lambda_{k_l}(b_{k_l})].\end{aligned}$$

因此总有

$\lambda_t\varphi_t^i(a_i)=[\lambda_t\varphi_t^i(c_i)-\lambda_i(c_i)]+[\lambda_t\varphi_t^{m_1}(c_{m_1})-\lambda_{m_1}(c_{m_1})]+\cdots+[\lambda_t\varphi_t^{m_p}(c_{m_p})-\lambda_{m_p}(c_{m_p})]$，其中$i,m_1,\cdots,m_p$互不相同。

若$i=t$，则$\lambda_t\varphi_t^i(c_i)-\lambda_i(c_i)=0$。同样，若$m_l=t$，则$\lambda_t\varphi_t^{m_l}(c_{m_l})-\lambda_{m_l}(c_{m_l})=0$。故可认为$i$，$m_1,\cdots m_p$都不等于$t$。

因为"向量"$\lambda_t\varphi_t^i(a_i)$除了"第$t$个分量"是$\varphi_t^i(a_i)$以外，其余"分量"都是0，因此$c_i$，$c_{m_1},\cdots,c_{m_p}$都是0，从而$\lambda_t\varphi_t^i(a_i)=0$。由于$\lambda_t$是单射，故$\varphi_t^i(a_i)=0$。

现在我们来证明"正向极限保持短正合列".

定理5.11 设 $(I,\leqslant)$是正向拟序集, $\{F_i,\varphi_j^i\},\{G_i,\psi_j^i\}$ 及 $\{H_i,\zeta_j^i\}$ 是 R-mod 中以 I 为指标集的三个正向系统. 再设 s 是 $\{F_i,\varphi_j^i\}$到$\{G_i,\psi_j^i\}$的自然变换, t 是$\{G_i,\psi_j^i\}$到$\{H_i,\zeta_j^i\}$的自然变换. 若对每一个$i\in I$,

$$0\longrightarrow F_i\xrightarrow{s_i}G_i\xrightarrow{t_i}H_i\longrightarrow 0$$

都是短正合列, 则

$$0\longrightarrow\varinjlim F_i\xrightarrow{\vec{s}}\varinjlim G_i\xrightarrow{\vec{t}}\varinjlim H_i\longrightarrow 0$$

也是短正合列.

证 先设$\{(\bigoplus_{i\in I}F_i)/S,\alpha_i\},\{(\bigoplus_{i\in I}G_i)/T,\beta_i\}$及$\{(\bigoplus_{i\in I}H_i)/W,\gamma_i\}$分别是$\{F_i,\varphi_j^i\},\{G_i,\varphi_j^i\}$及$\{H_i,\zeta_j^i\}$的正向极限, 其中$S,\alpha_i$; T, β_i及W,γ_i的意义见定理5.9, 再分别用λ_i,μ_i及σ_i表示F_i到$\bigoplus_{i\in I}F_i$, G_i到$\bigoplus_{i\in I}G_i$及H_i到$\bigoplus_{i\in I}H_i$的入射. 于是有

$$\vec{s}\,\alpha_i=\beta_i s_i,\ \vec{s}\,(\lambda_i(a_i)+S)=\mu_i s_i(a_i)+T,\quad \forall i\in I;$$

$$\vec{t}\,\beta_i=\gamma_i t_i,\ \vec{t}\,(\mu_i(b_i)+T)=\sigma_i t_i(b_i)+W,\quad \forall i\in I;$$

$$s_j\varphi_j^i=\psi_j^i s_i,\quad t_j\psi_j^i=\zeta_j^i t_i,\quad \forall i\leqslant j.$$

为证$\vec{s}$是单射, 设$x\in\ker\vec{s}$. 则由定理 5.10 知先可设$x=\lambda_i(a_i)+S$. 由于$\vec{s}\,(x)=0$, 故 $\mu_i(s_i(a_i))+T=0$. 于是由定理5.10知存在$j\geqslant i$ 使 $\psi_j^i(s_i(a_i))=0$. 从而 $s_j\varphi_j^i(a_i)=0$. 因为 s_j是单射, 故 $\varphi_j^i(a_i)=0$. 因此仍由定理5.10知 $\lambda_i(a_i)+S=0$. 所以$\vec{s}$是单射.

为证$\vec{t}$是满射, 设$z\in(\bigoplus_{i\in I}H_i)/W$, 则可设$z=\sigma_i(c_i)+W$, 因为$t_i$是满射, 故有$b_i\in G_i$使$c_i=t_i(b_i)$, 从而$z=\sigma_i t_i(b_i)+W$. 因此有$\mu_i(b_i)+T\in(\bigoplus_{i\in I}G_i)/T$使$\vec{t}\,(\mu_i(b_i)+T)=z$. 所以$\vec{t}$是满射.

因为$\vec{t}\,\vec{s}\,(\lambda_i(a_i)+S)=\sigma_i t_i s_i(a_i)+W=0$，故$\vec{t}\,\vec{s}=0$.因此$\mathrm{im}\,\vec{s}\subseteq\ker\vec{t}$。

最后，设$y\in\ker\vec{t}$，则可设$y=\mu_i(b_i)+T$，由$\vec{t}\,(y)=0$知$\sigma_i(t_i(b_i))+W=0$。故存在$j\geqslant i$使$\zeta_j^i t_i(b_i)=0$，因此$t_j\psi_j^i(b_i)=0$，从而$\psi_j^i(b_i)\in\ker t_j=\mathrm{im}\,s_j$.故有$a_j\in F_j$使$s_j(a_j)=\psi_j^i(b_i)$.于是有$\lambda_j(a_j)+S\in(\bigoplus_{i\in I}F_i)/S$使$\vec{s}\,(\lambda_j(a_j)+S)=y$，故$\ker\vec{t}\subseteq\mathrm{im}\,\vec{s}$. 到此就完成了证明。

这是一个很有用的定理。在第三章中我们将看到它的用处。

习　题　二

(1) 设F是R-mod到S-mod的一个共变或逆变函子. 证明：若F是加法函子，则F将零模变成零模，即当0是左R-零模时，$F(0)$是左S-零模。

(2) 设R是一个环，e是R的一个非零幂等元，则$eRe=\{ere\mid r\in R\}$是环，其单位元是e.若M是一个左R-模，则M自然地成为左eRe-模。命$eM=\{em\mid m\in M\}$，则eM是左eRe-模M的一个子模，从而是左eRe-模。现在命$F(M)$是左eRe-模eM，并对左R-映射f，命$F(f)=f|_{eM}$. 证明：F是R-mod到eRe-mod的正合共变函子。

(3) 设F是R-mod到S-mod的一个加法共变函子。证明：F是正合的，当且仅当对于每一个左R-正合列$M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''$，必定$F(M')\xrightarrow{F(f)}F(M)\xrightarrow{F(g)}F(M'')$是正合列。

(4) 设F是R-mod到S-mod的一个共变或逆变函子，G是S-mod到T-mod的一个共变或逆变函子。若F，G都是正合的，证明：GF是正合的。

(5) 设F, G是R-mod到S-mod的两个函子，都是共变的或都是逆变的，且$F\cong G$。证明：F正合，当且仅当G正合。

(6) 设F是R-mod到S-mod 的一个加法共变函子。若M是(R,T)-双模，且$M\neq 0$。试将$F(M)$作成(S,T)-双模。

(7) 举例说明 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 未必将直和变成直和，即$\mathrm{Hom}_R(X,\bigoplus_{i\in I}A_i)$未必与$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(X,A_i)$同构。

(8) 证明：若X是f.g.左R-模，则$\mathrm{Hom}_R(X,-)$保持直和，即$\mathrm{Hom}_R(X,\bigoplus_{i\in I}A_i)\cong\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(X,A_i)$。

(9) 举例说明，$X\otimes_R$未必将直积变成直积，即$X\otimes_R(\prod_{i\in I}A_i)$未必与$\prod_{i\in I}(X\otimes_R A_i)$同构。

(10) 设V是域K上无限维向量空间，R是V的所有线性变换作成的环。证明：R不是IBN环。

第三章　投射模、内射模及平坦模

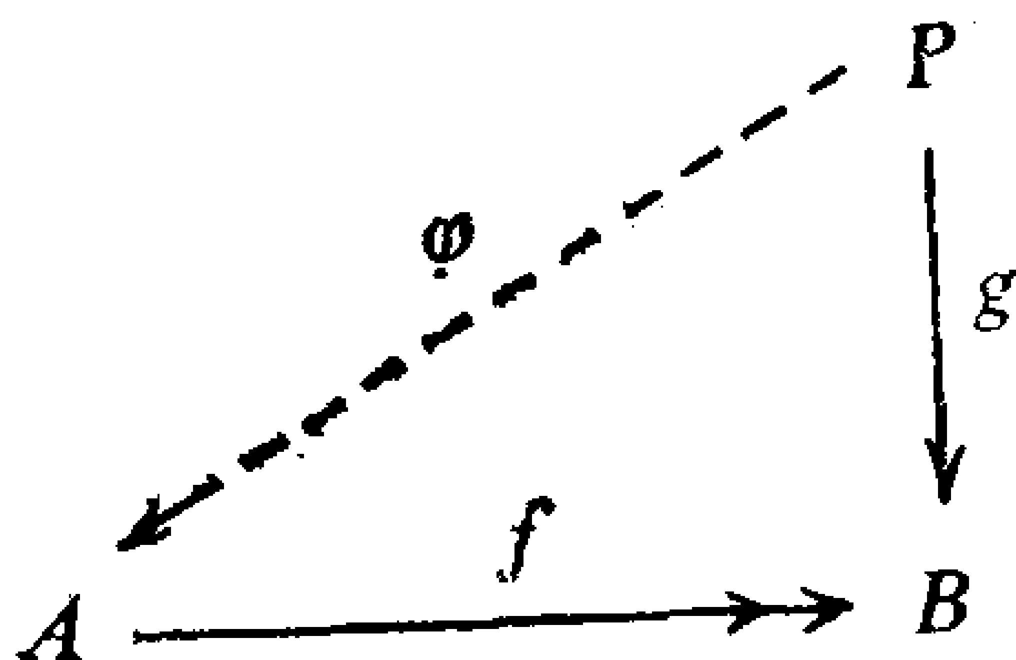
本章研究三类特殊的模，即投射模、内射模及平坦模．这三类模在同调代数中有着十分重要的作用．

§6　投　射　模

6.1　投射模的定义

投射模的概念是自由模的概念的推广．

定义6.1　设P是左R-模。若恒可补成交换图：



其中 A,B 是任意左R-模，f是任意左R-满射，g 是任意左R-映射，补出的φ是左R-映射，则称P是一个投射左R-模．

由定理1.11知自由左R-模必是投射左R-模．

容易知道，若P是投射左R-模，左R-模X与左R-模P同构，则X也是投射左R-模．

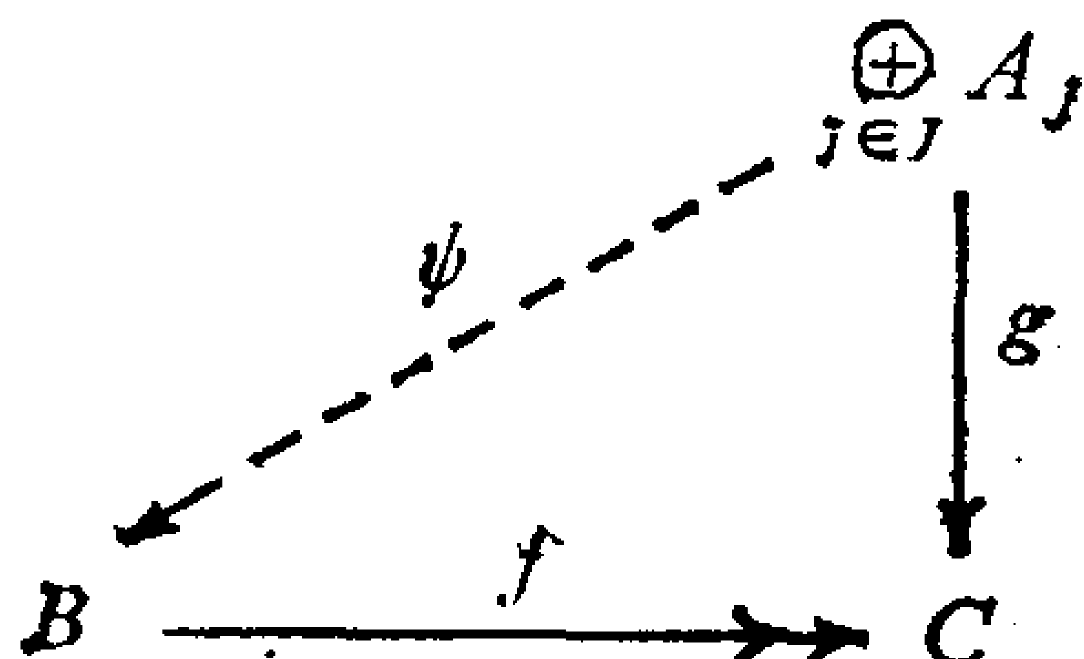
6.2　直和与诸直和项的投射性之间的关系

直和的投射性与诸直和项的投射性之间有着密切的关系．我

们有下面定理。

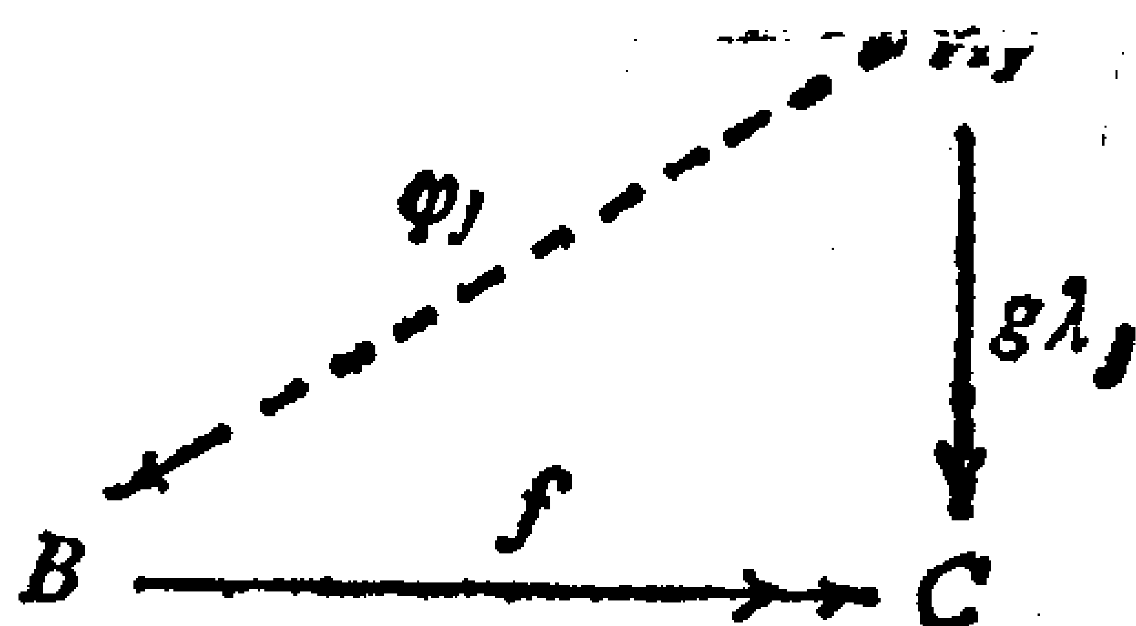
定理6.1 设$\{A_j \mid j\in J\}$是一集左R-模，则$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$是投射模，当且仅当每一个$A_j$都是投射模。

证 设每一个A_j都是投射模。我们来证明恒可补成交换图：

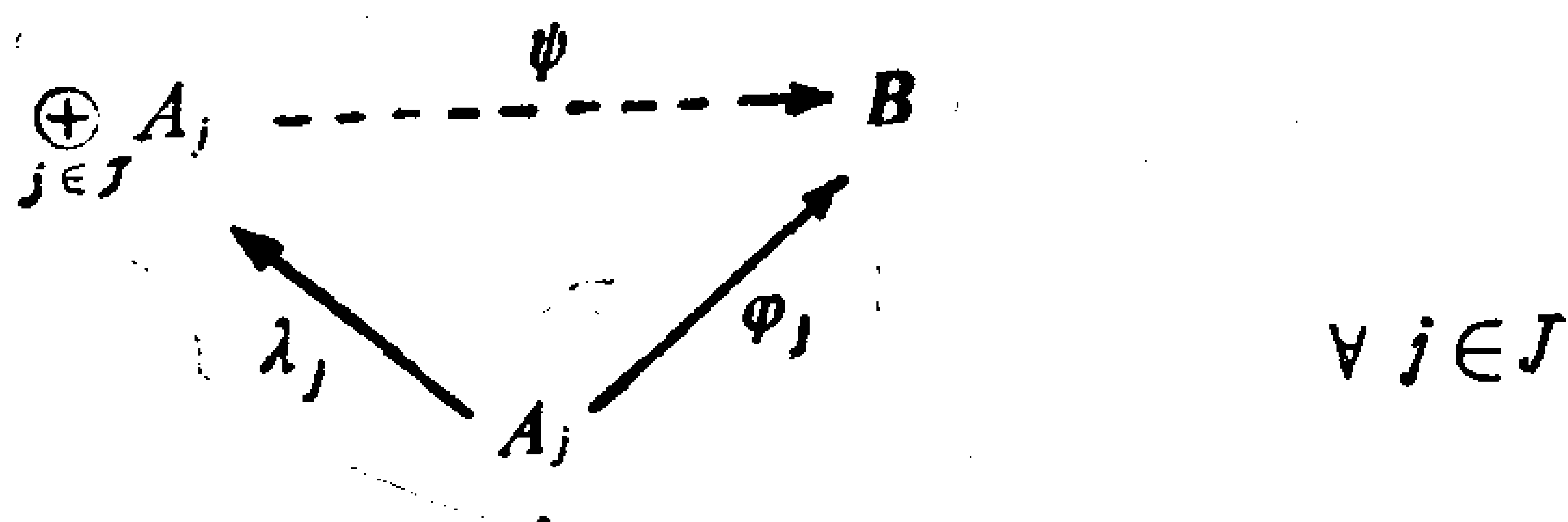


其中B,C是任意左R-模，f是任意左R-满射，g是任意左R-映射，补出的ψ是左R-映射。

因为A_j是投射模，故对每一个$j\in J$，先可补成交换图：

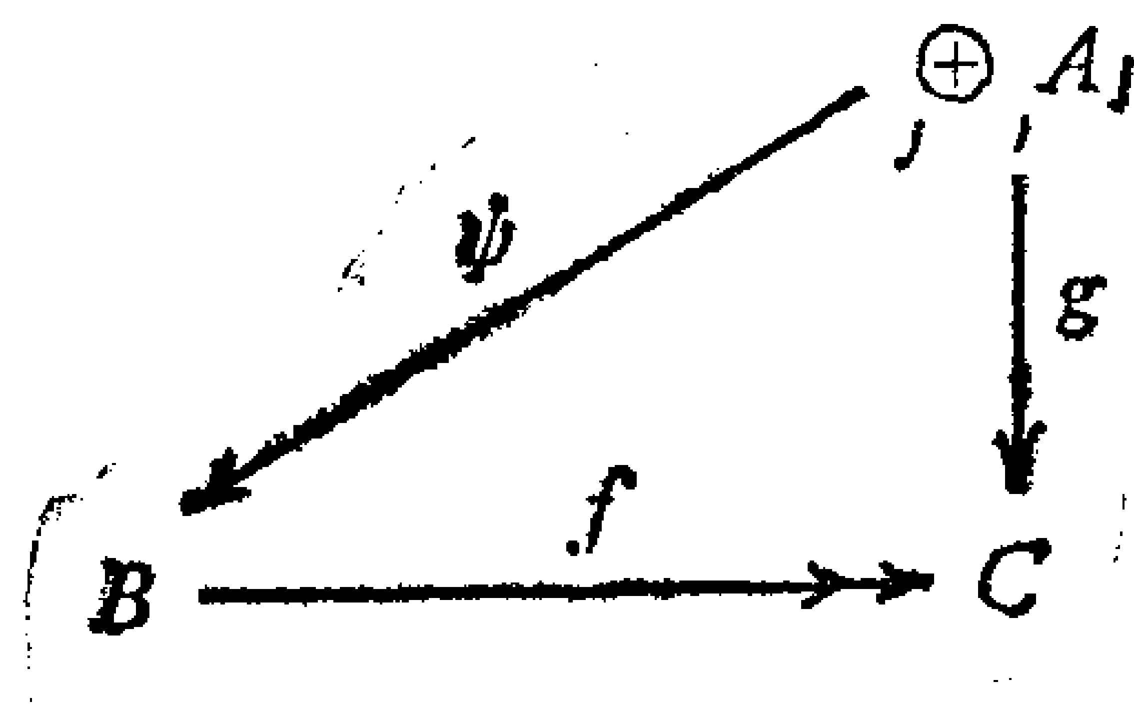


其中λ_j是A_j到$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$的入射，补出的$\varphi_j$是左$R$-映射。于是又可补成交换图：



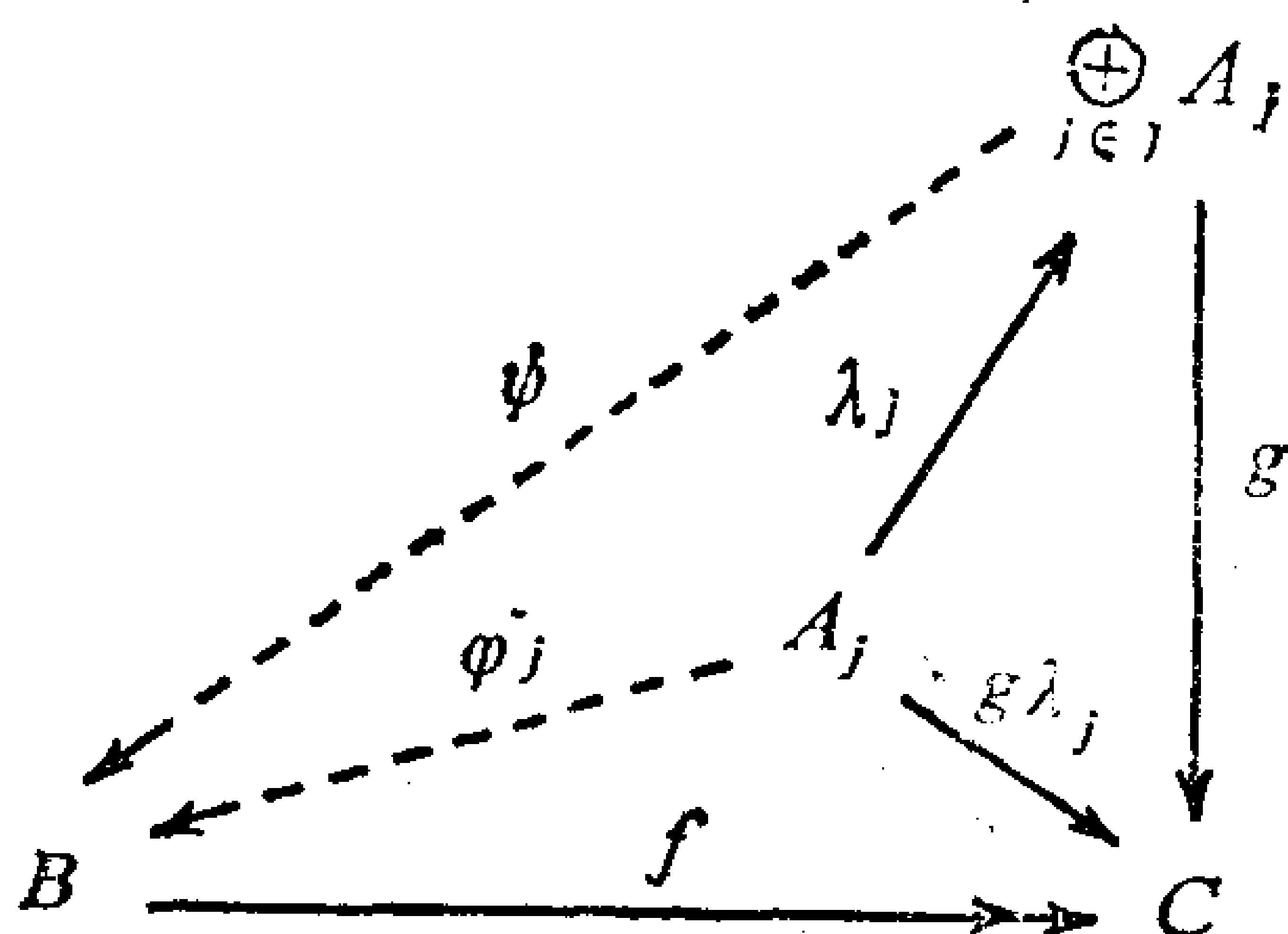
其中补出的ψ是左R-映射。

现在立刻看出下图交换：

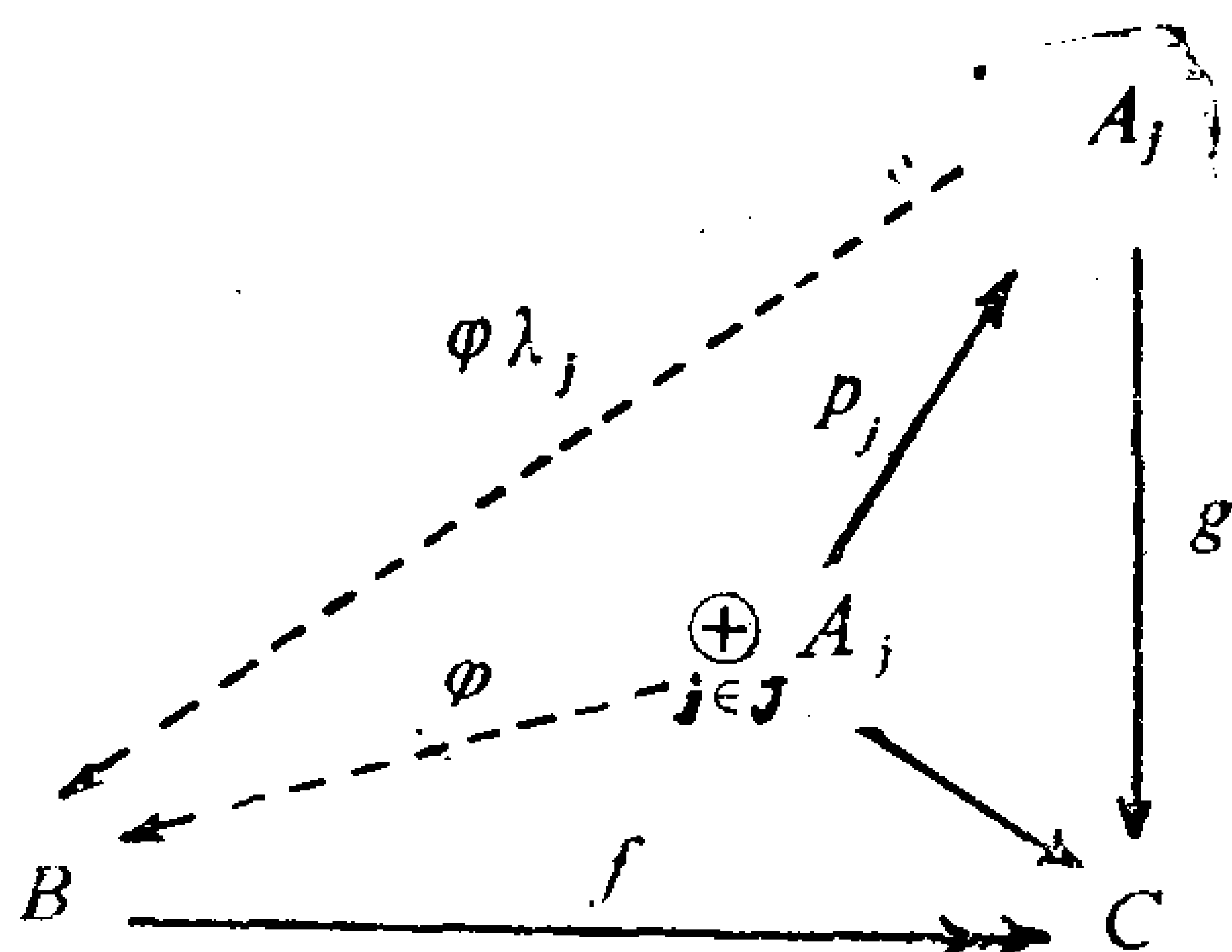


这是因为 $(f\psi)\lambda_j = f(\psi\lambda_j) = f\varphi_j = g\lambda_j$, $\forall j \in J$，故 $f\psi = g$. 这就证明了 $\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$是投射模.

以上证明的思路及过程可以用下面一个图来表达：



反之，设 $\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$是投射模. 我们可用下图来说明每一个$A_j$是投射模：



其中p_j是 $\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$到$A_j$的投射. 事实上，由于 $\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$ 是投射模， 故

存在左R-映射φ使上图中下面的三角形是交换图：$f\varphi = gp_j$。于是有$f(\varphi\lambda_j) = (f\varphi)\lambda_j = gp_j\lambda_j = g$。因此$A_j$是投射模。

根据这个定理，容易得到下面推论。

推论6.1 设P是投射左R-模，$f: P \longrightarrow A$ 是左R-映射。若f右可裂，则A是投射左R-模。

证 设左R-映射$g: A \longrightarrow P$满足$fg = 1$，则 $P = \ker f \oplus \mathrm{img}$，故$\mathrm{img}$是投射模。但$g$是单射，故$A \cong \mathrm{img}$，因此$A$是投射模。

例6.1 命 $R = \mathbf{Z}/(6\mathbf{Z})$，易知有左 R-模同构$R \cong \mathbf{Z}/(2\mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}/(3\mathbf{Z})$.因为自由左$R$-模$R$是投射左$R$-模，故$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$及$\mathbf{Z}/(3\mathbf{Z})$都是投射左$R$-模。

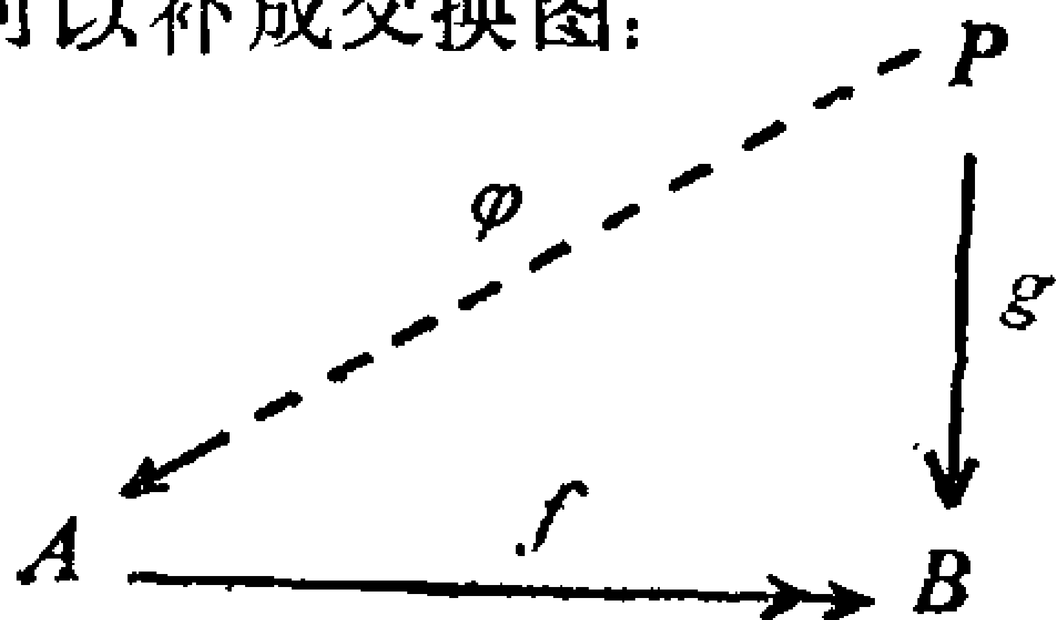
由例1.13知$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$不是自由左R-模，其中 $R = \mathbf{Z}/(6\mathbf{Z})$.因此，投射模概念是自由模概念的真正推广。当然，对于某些特殊的环类来说，可能投射模与自由模是一致的。比如，除环上的投射模与自由模就是一致的。不过这是极端的情形。在第四章中我们将证明主理想整环上的投射模与自由模是一致的。

6.3 左R-模P的投射性与函子 $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ 的正合性之间的关系

对于一个任意的左R-模A来说，我们仅能肯定函子 $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ 是左正合的。现在有下面定理。

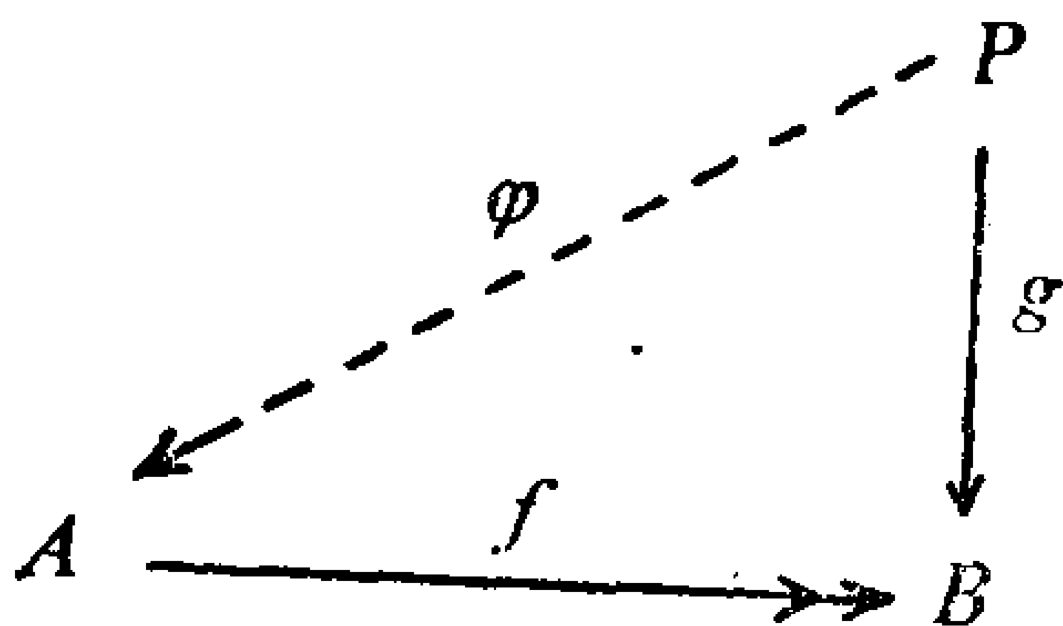
定理6.2 左R-模P是投射模，当且仅当$\mathrm{Hom}_R(P, -)$ 是正合的。

证 设左R-模P是投射模。当$f: A \longrightarrow B$是左R-满射时，容易看出 f_*: $\mathrm{Hom}_R(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, B)$是满射。这是因为当$g \in \mathrm{Hom}_R(P, B)$时，可以补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射．故有$\varphi\in\mathrm{Hom}_R(P,A)$使$f_*(\varphi)=f\varphi=g$．因此$\mathrm{Hom}_R(P,-)$是正合的．

反之，设$\mathrm{Hom}_R(P,-)$是正合的．则恒可补成交换图：



其中 A,B是任意左R-模，f是任意左R-满射，g是任意左R-映射，补出的φ是左R-映射．这是因为f_*: $\mathrm{Hom}_R(P,A)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(P,B)$是满射，故有$\varphi\in\mathrm{Hom}_R(P,A)$使$f_*(\varphi)=g$，即$f\varphi=g$．故$P$是投射模．

6.4　模的投射性的刻划

定理6.2说明可以用函子$\mathrm{Hom}_R(P,-)$的正合性来刻划左R-模P的投射性．现在我们再从另外角度来刻划模的投射性．有下面定理．

定理6.3　设P是左R-模，则以下条件等价：

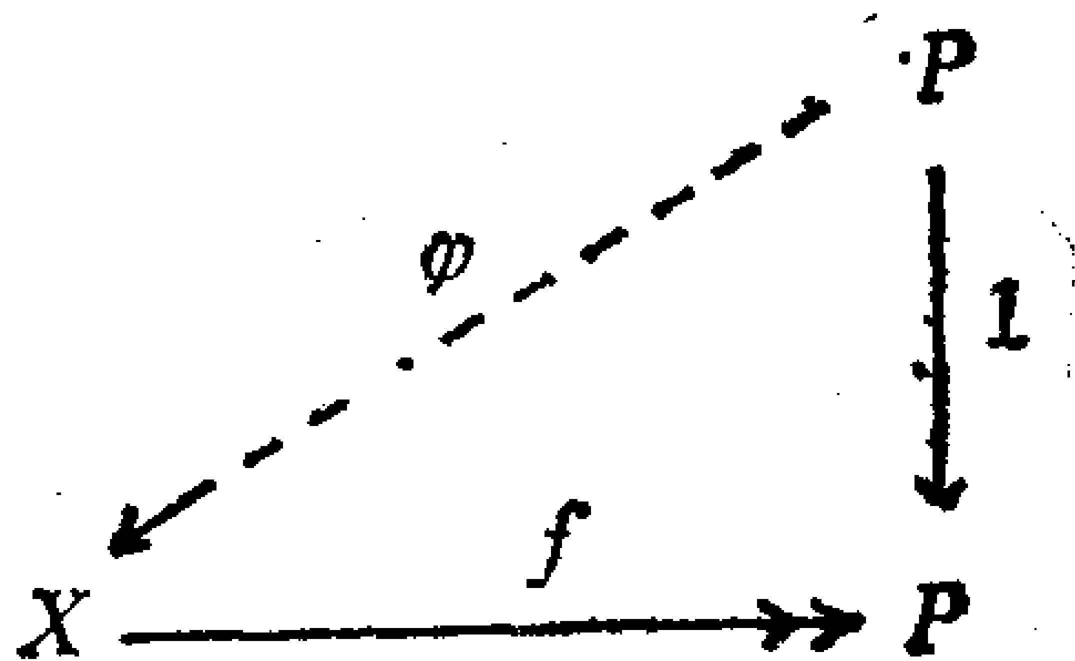
(i)　P是投射模；

(ii)　对于任意左R-模X，若左R-映射$f: X\longrightarrow P$是满射，则f是右可裂的；

(iii)　每一个左R-短正合列$0\longrightarrow X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}P\longrightarrow0$都是可裂的；

(iv)　P是一个自由左R-模的一个直和项．

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)．设$f: X\longrightarrow P$是左R-满射，则可补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射．于是$f\varphi=1$．故f右可裂．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．这是明显的．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)．首先总有一个自由左R-模F及一个左R-满射$f: F\longrightarrow P$．于是左R-短正合列 $0\longrightarrow \mathrm{ker}f \overset{i}{\hookrightarrow} F \overset{f}{\longrightarrow} P \longrightarrow 0$可裂．故$F\cong P\oplus \mathrm{ker}f$．因此$P$是自由左$R$-模$P\oplus\mathrm{ker}f$的一个直和项．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)．因为投射模的直和项是投射模，故自由模的直和项是投射模．因此P是投射模．

6.5 投射基定理

现在证明一个重要的定理，即下面的投射基定理．

定理6.4（投射基定理）左R-模P是投射模，当且仅当P有一个子集$X=\{a_k|k\in K\}$及一集左R-映射$\{\varphi_k: P\longrightarrow R|k\in K\}$满足对于任何$x\in P$，几乎所有$\varphi_k(x)=0$，使得$x=\sum\limits_{k\in K}\varphi_k(x)a_k$，$\forall x\in P$．

证 设P是投射模．则首先总存在一个自由左R-模$F\neq 0$及一个左R-满射$f: F\longrightarrow P$．于是f右可裂，从而存在左R-映射$\varphi: P\longrightarrow F$使$f\varphi=1$．命$\{e_k|k\in K\}$是$F$的一个基，则当$x\in P$时，$\varphi(x)$有唯一的表达式$\varphi(x)=\sum\limits_{k\in K}r_ke_k$，且几乎所有$r_k=0$．现在对于每一个$k\in K$，命$\varphi_k: P\longrightarrow R$是$x\longmapsto r_k$，则易知$\varphi_k$是左$R$-映射，且对任何$x\in P$，几乎所有$\varphi_k(x)=0$．再命$a_k=f(e_k)$．于是

得到P的一个子集$X=\{a_k|k\in K\}$及一集左R-映射$\{\varphi_k|k\in K\}$。又，当$x\in P$时，设$\varphi(x)=\sum_{k\in K}r_k e_k$，则有 $x=1(x)=f\varphi(x)=\sum_{k\in K}r_k f(e_k)=\sum_{k\in K}\varphi_k(x)a_k$。

反之，设满足定理中条件的 $X=\{a_k|k\in K\}$ 及 $\{\varphi_k: P\longrightarrow R|k\in K\}$存在。命$F$是有基$\{e_k|k\in K\}$的自由左$R$-模，则存在左$R$-映射$f: F\longrightarrow P$满足$f(e_k)=a_k$，$\forall k\in K$。可知$f$是满射。为证$P$是投射模，只要证明$f$右可裂。为此，命 $\varphi: P\longrightarrow F$ 是 $x\longmapsto\sum_{k\in K}\varphi_k(x)e_k$，易知$\varphi$ 是左 R- 映射。因为当 $x\in P$ 时，有

$$
\begin{aligned}
(f\varphi)(x) &= f\left(\sum_{k\in K}\varphi_k(x)e_k\right)\\
&=\sum_{k\in K}\varphi_k(x)f(e_k)=\sum_{k\in K}\varphi_k(x)a_k=x,
\end{aligned}
$$
故$f\varphi=1$，

从而f右可裂。因此P是投射模。

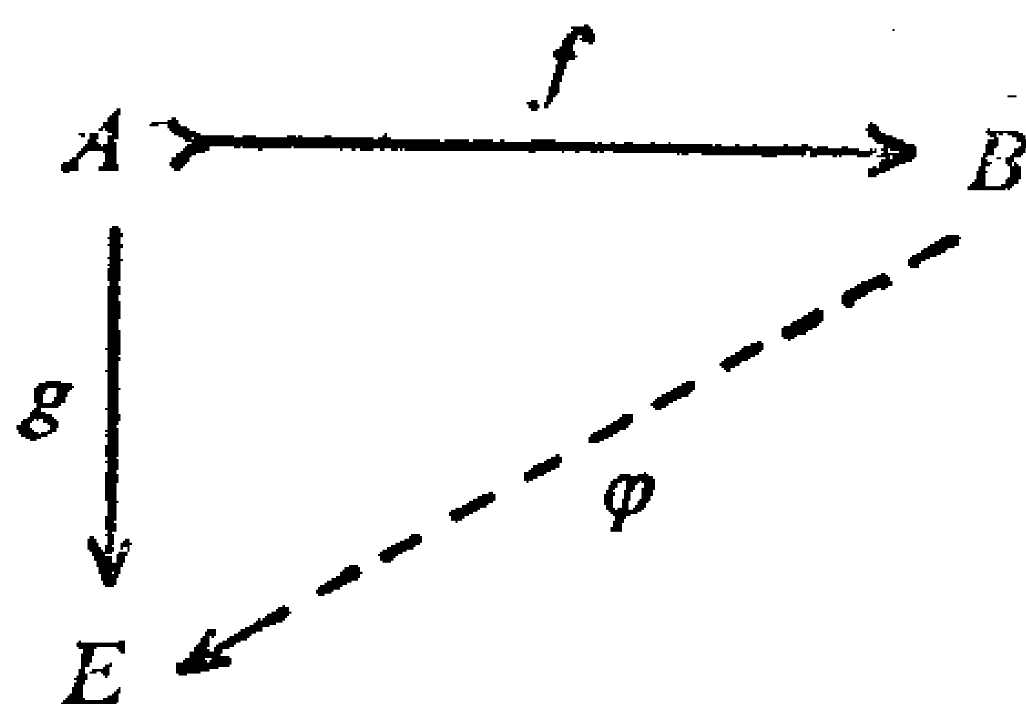
注：由定理的证明可知，若P是$f.g.$投射模，则定理中的X可取成有限集。反之，若定理中的X可取成有限集，则P是$f.g.$投射模。

§7　内　射　模

7.1　内射模的定义

将定义投射模时所用的图中的箭头反向，并将满射换成单射，所得到的投射模概念的对偶概念就是内射模的概念，也即有下面定义。

定义7.1　设E是左R-模。若恒可补成交换图：



其中 A,B 是任意左R-模，f是任意左R-单射，g 是任意左R-映射，补出的φ是左R-映射，则称E是一个内射左R-模。

与投射模不同，内射模没有明显的例子。待对内射模作一些讨论以后，我们再给出例子。

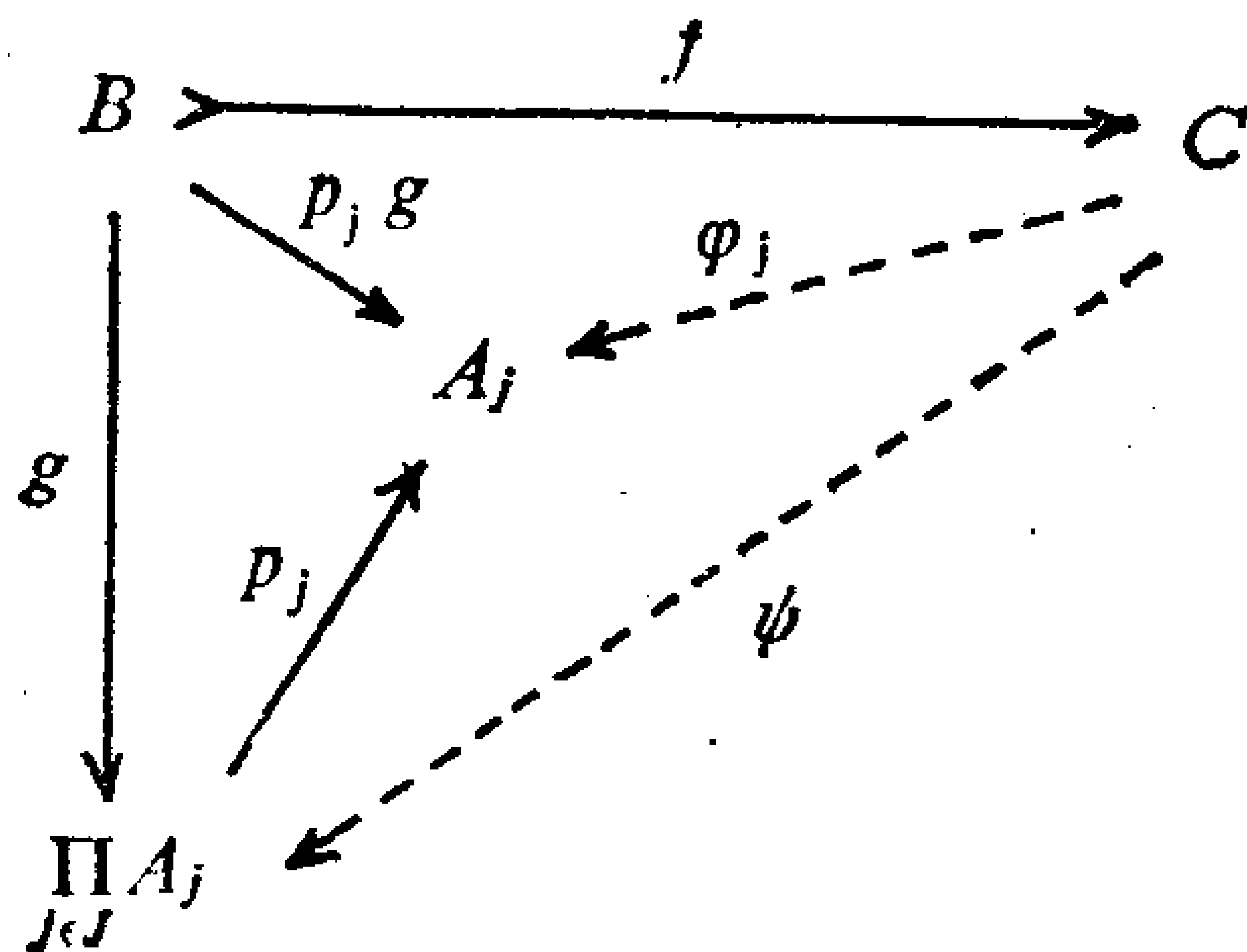
容易知道，若E是内射左R-模，左R-模A与左R-模E同构，则 A也是内射左R-模。

7.2 直积与诸直积因子的内射性之间的关系

直积的内射性与诸直积因子的内射性之间有着密切的关系。我们有下面定理。

定理7.1 设$\{A_j|j\in J\}$是一集左R-模，则$\prod\limits_{j\in J}A_j$是内射模，当且仅当每一个A_j都是内射模。

证 设每一个A_j都是内射模。我们可用下图来说明$\prod\limits_{j\in J}A_j$是内射模：



其中p_j是$\prod_{j\in J}A_j$到A_j的投射。事实上，因为A_j是内射模，故对每一个$j\in J$，存在左R-映射φ_j使图中上面的三角形是交换图。于是有左R-映射ψ使图中右边的三角形是交换图。从而有$p_j(\psi f)=(p_j\psi)f=\varphi_j f=p_j g$，$\forall\ j\in J$。因此 $\psi f=g$。故 $\prod_{j\in J}A_j$ 是内射模。

类似地可以证明，当$\prod_{j\in J}A_j$ 是内射模时，每一个A_j都是内射模。

由这个定理容易得到下面推论。

推论7.1　设E是内射左R-模，$f: A\longrightarrow E$是左R-映射。若f左可裂，则A是内射左R-模。

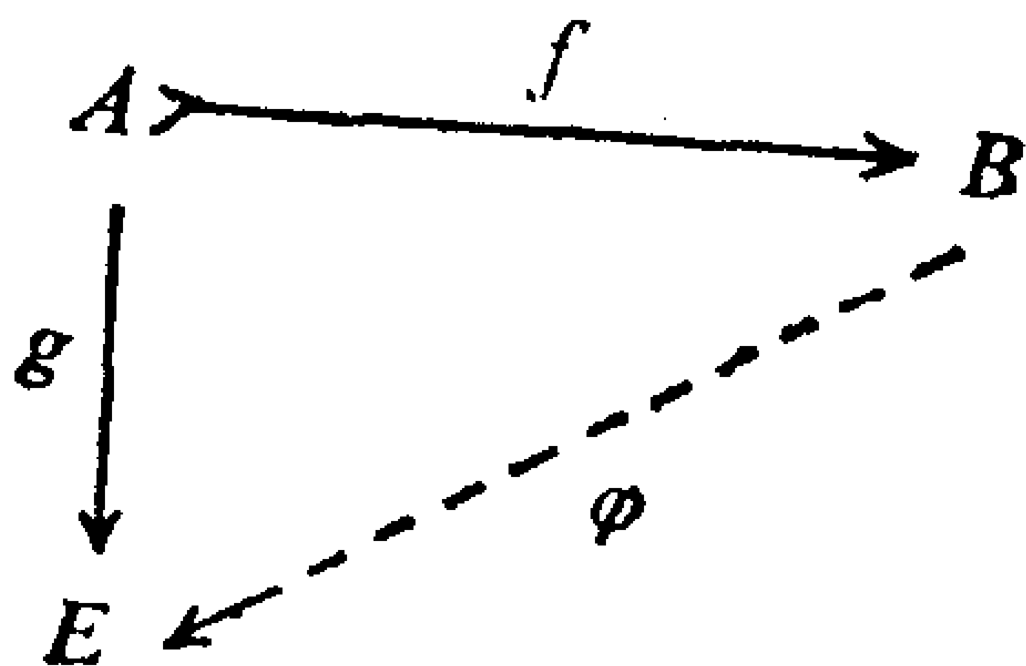
证　设左R-映射$g: E\longrightarrow A$满足$gf=1$。则 $E=\mathrm{im}f\oplus\ker g$。于是由定理7.1知$\mathrm{im}f$是内射模。因为$f$是单射，故 $A\cong\mathrm{im}f$。因此A是内射模。

7.3　左R-模E的内射性与函子 $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 的正合性之间的关系

对于任意的左R-模A来说，我们仅能肯定函子$\mathrm{Hom}_R(-, A)$是左正合的。现在有下面定理。

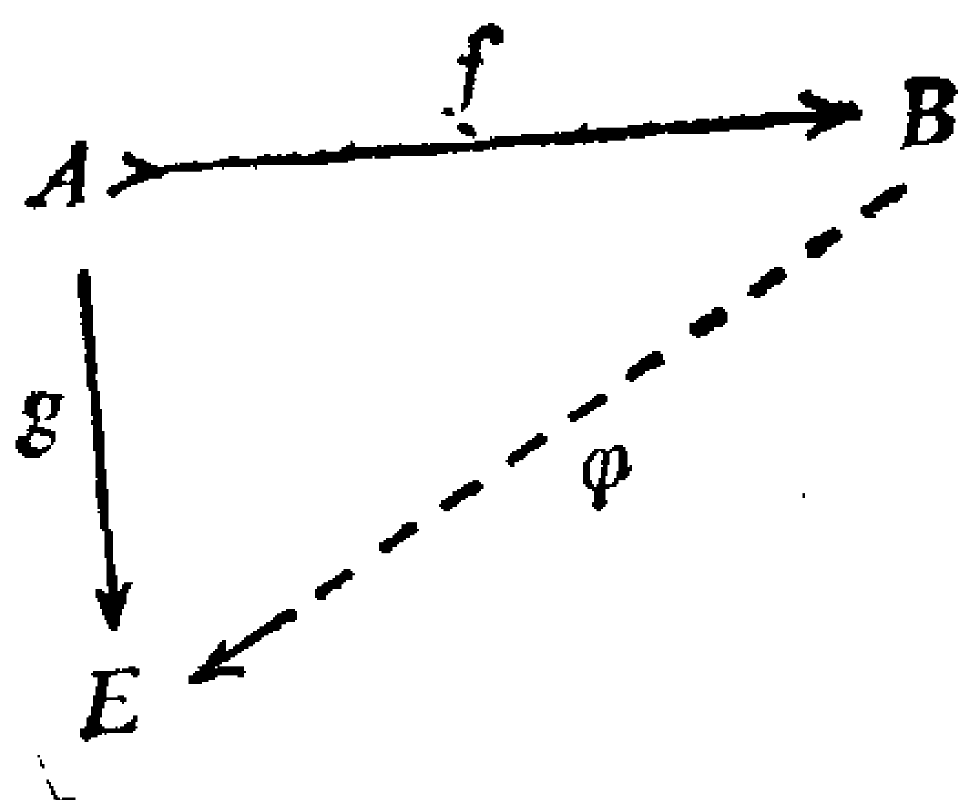
定理7.2　左R-模E是内射模，当且仅当$\mathrm{Hom}_R(-, E)$是正合的。

证　设E是内射模，则当$f: A\longrightarrow B$是左R-单射时，容易看出 f^*: $\mathrm{Hom}_R(B, E)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(A, E)$ 是满射。事实上，当$g\in\mathrm{Hom}_R(A, E)$时，可以补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射。于是有$\varphi\in\mathrm{Hom}_R(B,E)$ 使 $f^*(\varphi)=\varphi f=g$，故$\mathrm{Hom}_R(-,E)$是正合的。

反之，设$\mathrm{Hom}_R(-,E)$是正合的。则当$f: A\longrightarrow B$是左R-单射时，$f^*: \mathrm{Hom}_R(B, E)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(A, E)$ 是满射。故对任何$g\in\mathrm{Hom}_R(A, E)$，有$\varphi\in\mathrm{Hom}_R(B,E)$ 使 $f^*(\varphi)=g$， 于是有交换图：



因此E是内射模。

7.4 模的内射性的刻划

定理7.2说明可以用函子$\mathrm{Hom}_R(-,E)$的正合性来刻划左R-模E的内射性。现在我们再从另外角度来刻划模的内射性，即有下面定理。

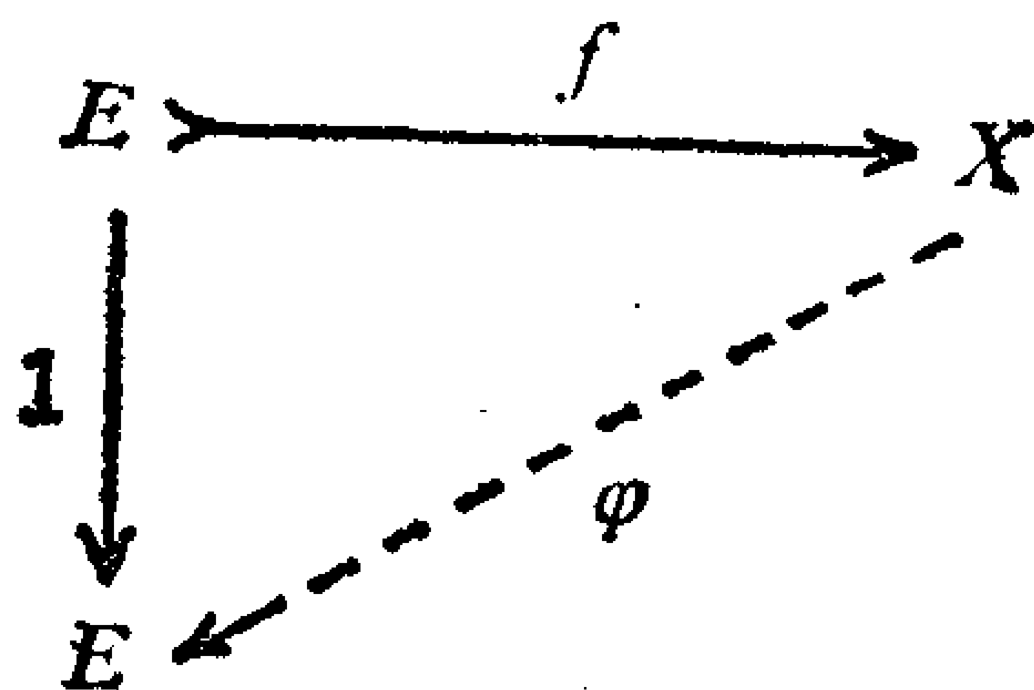
定理7.3 设E是左R-模，则以下条件等价：

(i) E是内射模；

(ii) 对于任意左R-模X，若$f: E\longrightarrow X$是左R-单射， 则f是左可裂的；

(iii) 每一个左R-短正合列 $0\longrightarrow E\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Y\longrightarrow 0$ 都是可裂的。

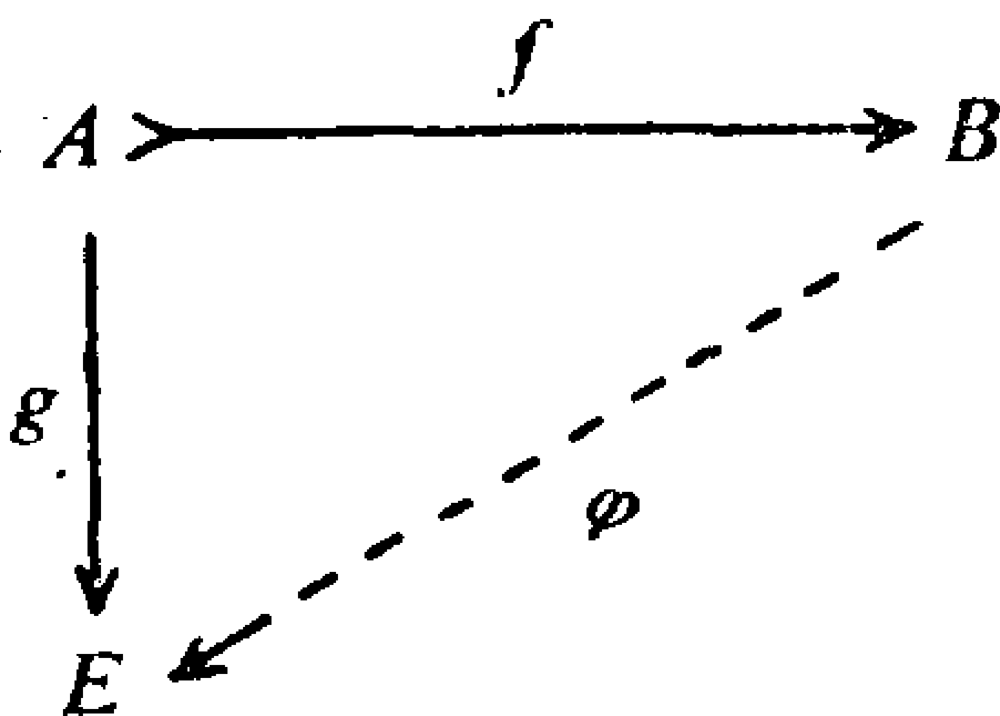
证 (i)$\Longrightarrow$(ii)。 设 $f: E\longrightarrow X$是左R-单射，则可补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射．于是$\varphi f=1$．故f左可裂．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．　这是明显的．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)．　这就是要证明恒可补成交换图：



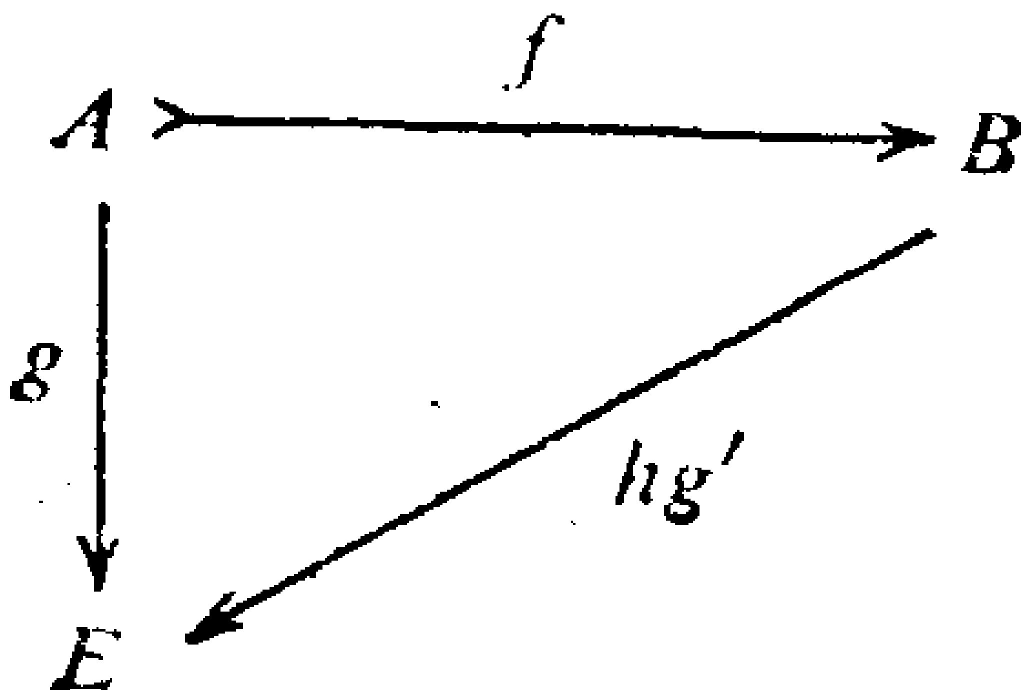
其中 A,B 是任意左R-模，f是任意左R-单射，g 是任意左R-映射，补出的φ是左R-映射．

为此，先命 $W=\{(g(a),\ f(-a))\mid a\in A\}$，则易知$W$是$E\oplus B$的子模．再命$f':E\longrightarrow(E\oplus B)/W$是$e\longmapsto(e,0)+W$，$g'$：$B\longrightarrow(E\oplus B)/W$是$b\longmapsto(0,b)+W$，则易知$f'g'$皆是左$R$-映射．直接验证即知$f'g=g'f$，且$f'$是单射．

于是有左R-短正合列

$$0\longrightarrow E\xrightarrow{f'}(E\oplus B)/W\xrightarrow{\rho}\mathrm{Coker}f'\longrightarrow 0,$$

其中ρ是自然同态映射．由已给条件知此短正合列可裂，从而f'左可裂．故有左R-映射h：$(E\oplus B)/W\longrightarrow E$ 使$hf'=1$.现在容易看出下图交换：



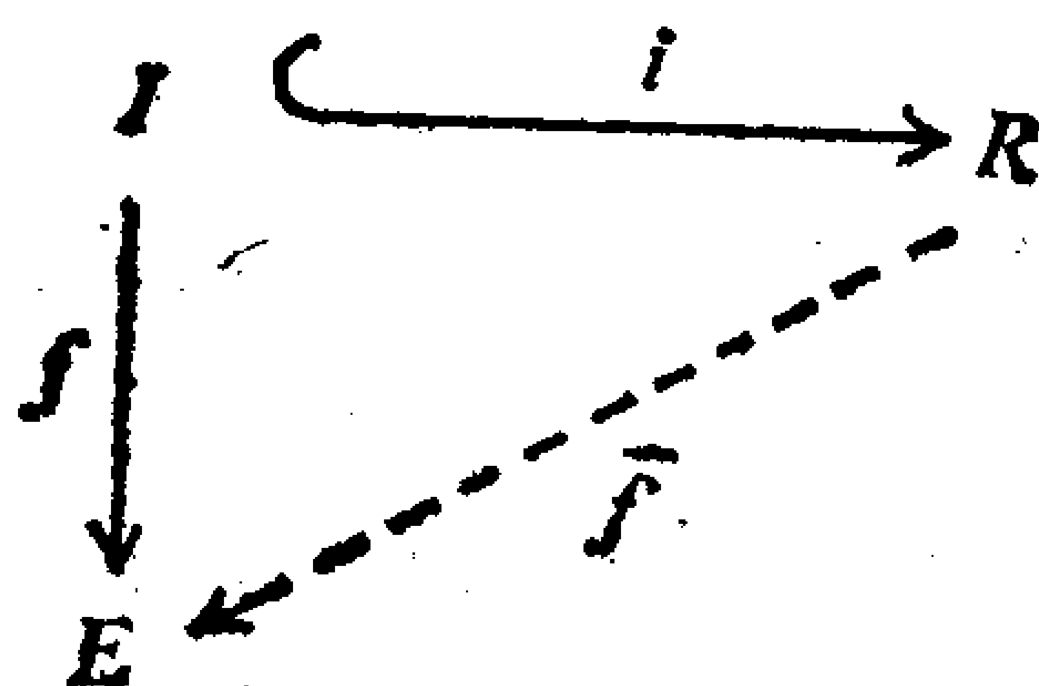
这是因为 $(hg')f=h(g'f)=h(f'g)=(hf')g=g$。故$E$是内射模。

由这个定理可知，任何模的内射子模恒是原模的一个直和项。

7.5 Baer 准则

有一个很有用的判断一个模是否是内射模的准则，叫做Baer准则。这就是下面的定理。

定理7.4（Baer准则） 左R-模E是内射模，当且仅当对于环R的任意左理想I，恒可补成交换图：

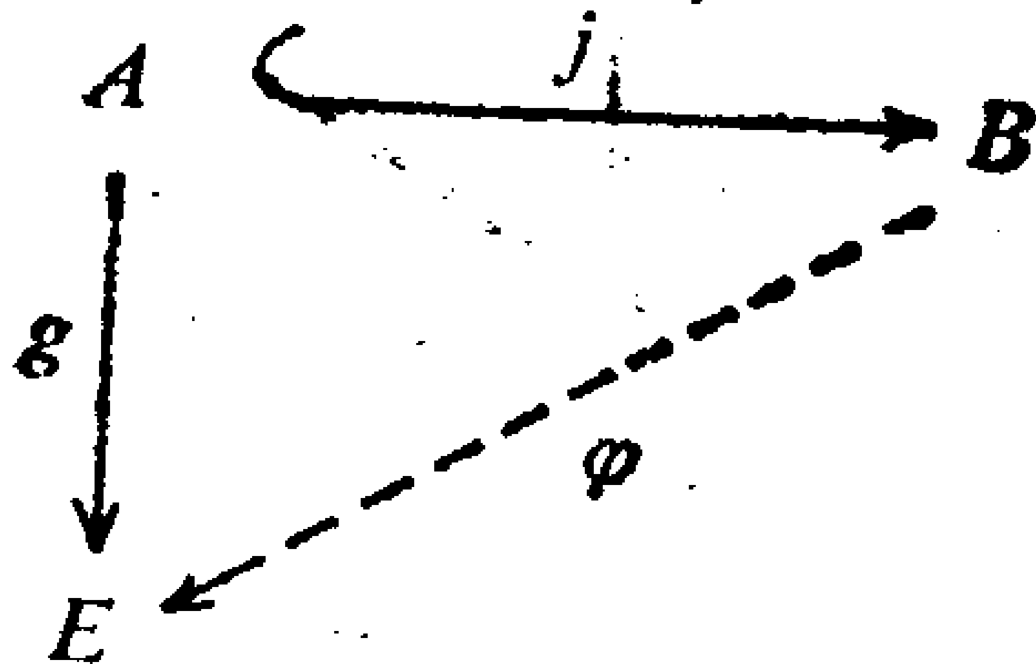


其中f是任意左R-映射，补出的$\bar{f}$是左R-映射。

证 当E是内射模时，对于环R的任意左理想 I， 当然可以补成上述交换图。

现在设对于环R的任意左理想I，恒可补成上述交换图。

为证E是内射模，我们先证明恒可补成交换图：



其中B是任意左R-模，A是B的任意子模，g 是任意左R-映射，补出的φ是左R-映射。

为此，命

$\Omega=\{(A',g')\mid A'$是B的子模且$A'\supseteq A$；左R-映射g'：
$A'\longrightarrow E$满足$g'(a)=g(a),\ \forall\, a\in A\}$。

因为$(A,g)\in\Omega$，故Ω不空。再规定

$$(A',g')\leqslant(A'',g'')$$

当且仅当$A'\subseteq A''$，且$g''(a')=g'(a'),\ \forall\, a'\in A'$，则易知$\Omega$成为偏序集。

若$\{(A_\alpha,g_\alpha)\mid\alpha\in J\}$是$\Omega$的一个有序子集.命$\bar{A}=\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$，则$\bar{A}$是$B$的子模，且$\bar{A}\supseteq A$，当$x\in\bar{A}$时，必有一个$\alpha\in J$使$x\in A_\alpha$，从而有$g_\alpha(x)\in E$。命$\bar{g}$：$\bar{A}\longrightarrow E$是$x\longmapsto g_\alpha(x)$，则易知$\bar{g}$是左$R$-映射，且$\bar{g}(a)=g(a),\ \forall\, a\in A$。从而$(\bar{A},\ \bar{g})\in\Omega$，且明显有$(A_\alpha,\ g_\alpha)\leqslant(\bar{A},\ \bar{g}),\ \forall\,\alpha\in J$。故$(\bar{A},\ \bar{g})$是$\{A_\alpha,g_\alpha)\mid\alpha\in J\}$在$\Omega$中的一个上界。于是据 Zorn 引理知$\Omega$有极大元素。

设(A_0,g_0)是Ω的一个极大元素，我们来证明$A_0=B$。

若$A_0\neq B$，则存在$x_0\in B$，而$x_0\notin A_0$。命$I=\{r\in R\mid rx_0\in A_0\}$，则易知$I$是环$R$的一个左理想。再命$h$：$I\longrightarrow E$是$r\longmapsto g_0(rx_0)$，则易知$h$是左$R$-映射。于是可补成交换图：

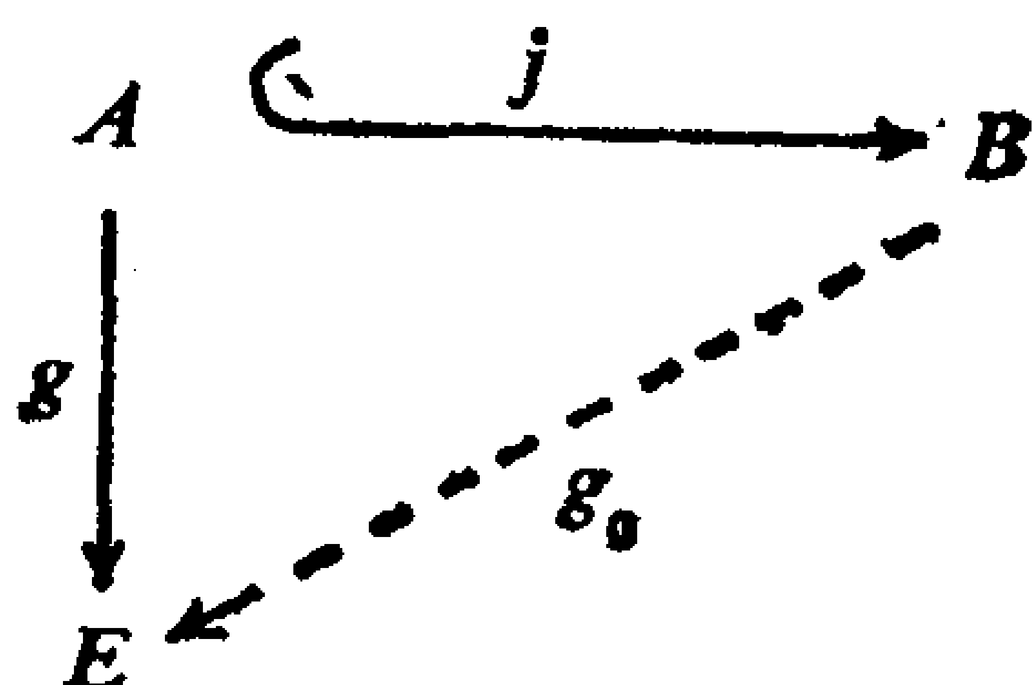
$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\ i\ } & R \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \bar{h}} & \\ E & & \end{array}$$

其中补出的$\bar{h}$是左R-映射。

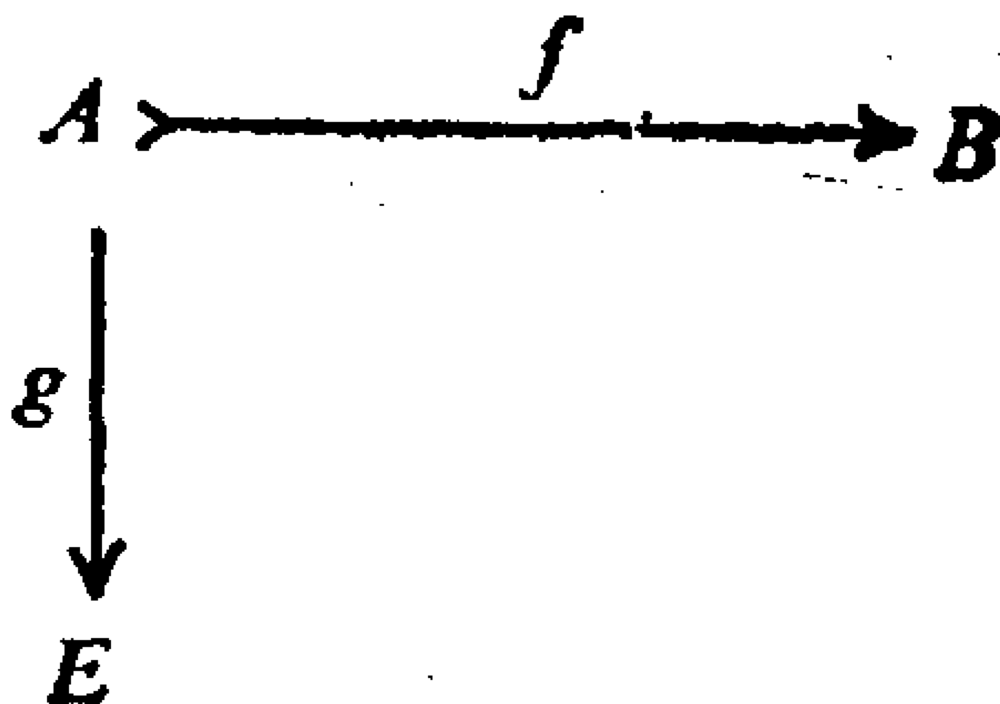
命$A_1=A_0+Rx_0$，则A_1是B的子模，且$A_1\supseteq A_0$。因为$x_0\notin A_0$，故$A_1\neq A_0$。现在命g_1：$A_1\longrightarrow E$是$a_0+rx_0\longmapsto g_0(a_0)+r\bar{h}(1)$，其中$a_0\in A_0$，1是环$R$的单位元。容易验证$g_1$是映射，且是左$R$-映射,并且$g_1(a_0)=g_0(a_0),\ \forall\, a_0\in A_0$。于是$(A_1,g_1)\in\Omega$，

$(A_0, g_0) \leqslant (A_1, g_1)$，但$(A_0, g_0) \neq (A_1, g_1)$. 这与"$(A_0, g_0)$ 是Ω的一个极大元素"矛盾。故$A_0 = B$。

从而g_0是B到E的左 R-映射，且 $g_0(a) = g(a)$，$\forall a \in A$。故有交换图：

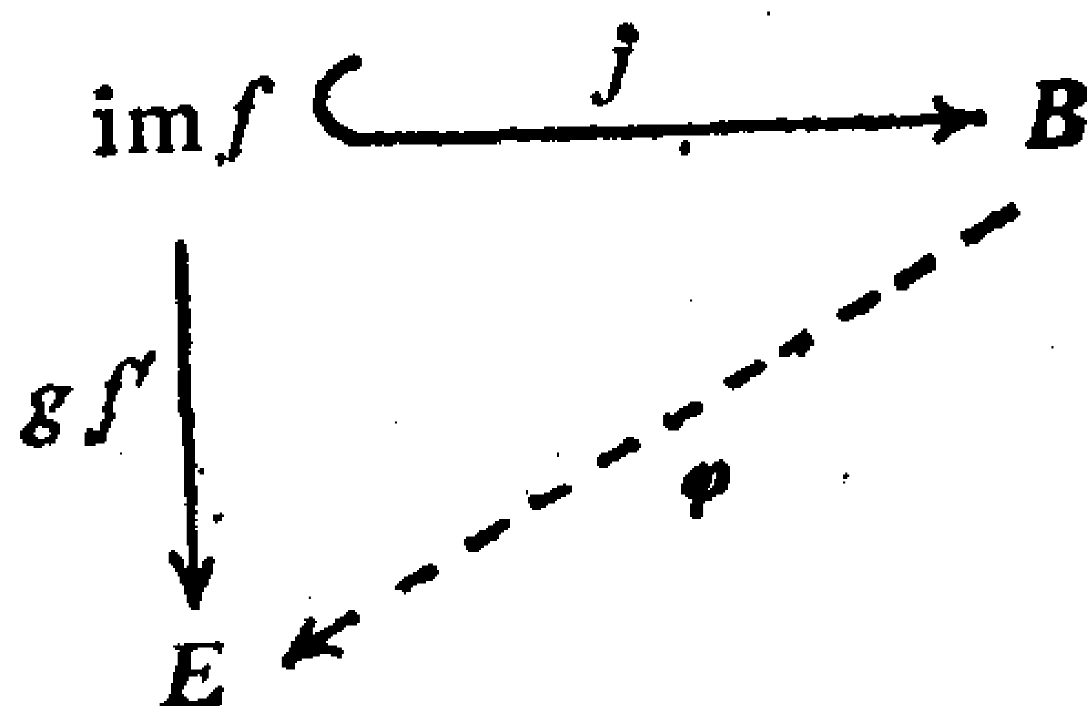


现在容易证明E是内射模。为此，设已给图：

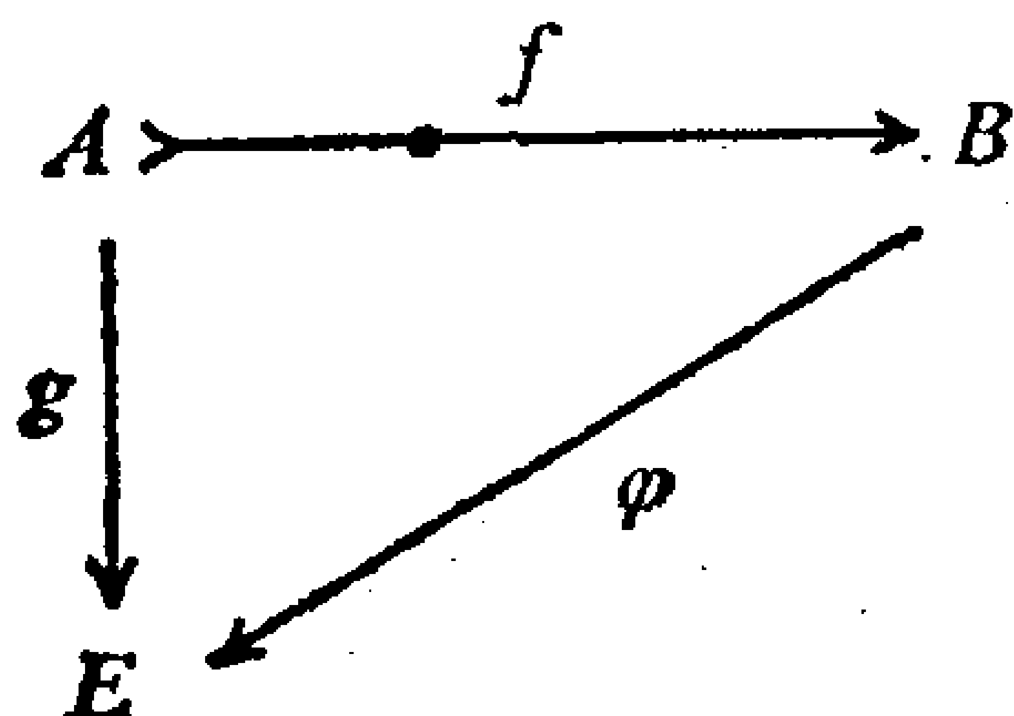


其中A, B 是任意左R-模，f 是任意左R-单射，g 是任意左 R-映射。

命$f' : \mathrm{im}f \longrightarrow A$是$f(a) \longmapsto a$，$\forall a \in A$，则 f'是左R-映射。于是由刚才所证明的，知可补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射。从而知下图交换：



因此E是内射模.

由定理 7.3 知，对于左R-模E，当每一个左R-短正合列 $0\longrightarrow E\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Y\longrightarrow 0$ 都可裂时，则E是内射模. 下面我们要证明，只要每一个左R-短正合列 $0\longrightarrow E\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$（其中$C$是循环左$R$-模）都可裂，则$E$就是内射模. 为此，先证明下面引理.

引理7.1 设已给左R-映射图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & & & & & \\ & & E & & & & & & \end{array}$$

其中的横行是短正合列，则恒可补成交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

且补出的下面横行是左R-短正合列，γ'是左R-映射.

证 先由定理7.3的证明知，命 $B'=(E\oplus B)/W$，其中 $W=\{(\gamma(a),f(-a))\mid a\in A\}$，并命$f':E\longrightarrow B'$是$e\longmapsto(e,0)+W$，$\gamma':B\longrightarrow B'$是$b\longmapsto(0,b)+W$，则$f'$及$\gamma'$都是左$R$-映射，$f'$是单射，且$\gamma'f=f'\gamma$. 再命$g':B'\longrightarrow C$是$(e,b)+W\longmapsto g(b)$，则易知$g'$是左$R$-满射，且$g'\gamma'=g$. 这就补出了交换图.

为证图中下面横行是短正合列，由于f'是单射，g'是满射，故只要再证明$\mathrm{im}f'=\mathrm{ker}g'$。

因为当$e\in E$时，$g'f'(e)=g'((e,0)+W)=g(0)=0$，故$g'f'=0$。从而$\mathrm{im}f'\subseteq\mathrm{ker}g'$。又，当$(e,b)+W\in\mathrm{ker}g'$时，由于$g'((e,b)+W)=0$，故$g(b)=0$。于是$b\in\mathrm{ker}g=\mathrm{im}f$。因此有$a\in A$使$b=f(-a)$。命$e'=\gamma(a)$，则$(e',b)=(\gamma(a),f(-a))\in W$，故$(e,b)-(e-e',0)=(e',b)\in W$，从而$(e,b)+W=(e-e',0)+W=f'(e-e')\in\mathrm{im}f'$。因此$\mathrm{im}f'=\mathrm{ker}g'$。

定理7.5 设E是左R-模。若每一个左R-短正合列$0\longrightarrow E\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$（其中$C$是循环左$R$-模）都可裂，则$E$是内射模。

证 我们用Baer准则来证明E是内射模。为此，设I是环R的任意左理想，并设$f: I\longrightarrow E$是任意左R-映射，则据引理7.1知可补成交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \xhookrightarrow{i} & R & \xrightarrow{g} & R/I & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\tau} & R/I & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中g是自然同态映射，上面横行原是左R-短正合列，补出的σ,τ及φ都是左R-映射，补出的下面横行是短正合列。

因为R/I是循环左R-模，故据定理所给的条件知上图中下面横行是可裂短正合列，从而σ左可裂。故有左R-映射$h: B\longrightarrow E$使$h\sigma=1$。于是有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
I & \xhookrightarrow{i} & R\\
{\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle h\varphi} & \\
E & &
\end{array}$$

因此E是内射模。

7.6 可除模；可除模与内射模之间的关系

将可除 Abel 群的概念推广到模的情形，就得到可除模的概念。它是一种与内射模有密切关系的模。

定义7.2 设A是一个左R-模，$a\in A$，$r\in R$。若存在 $b\in A$ 使$a=rb$，则称a被r可除。

定义7.3 设A是左R-模。若A的每一个元都被环R中每一个非右零因子可除，则称A是可除左R-模。

由定义可知，可除左$\mathbf{Z}$-模与可除 Abel群一致。

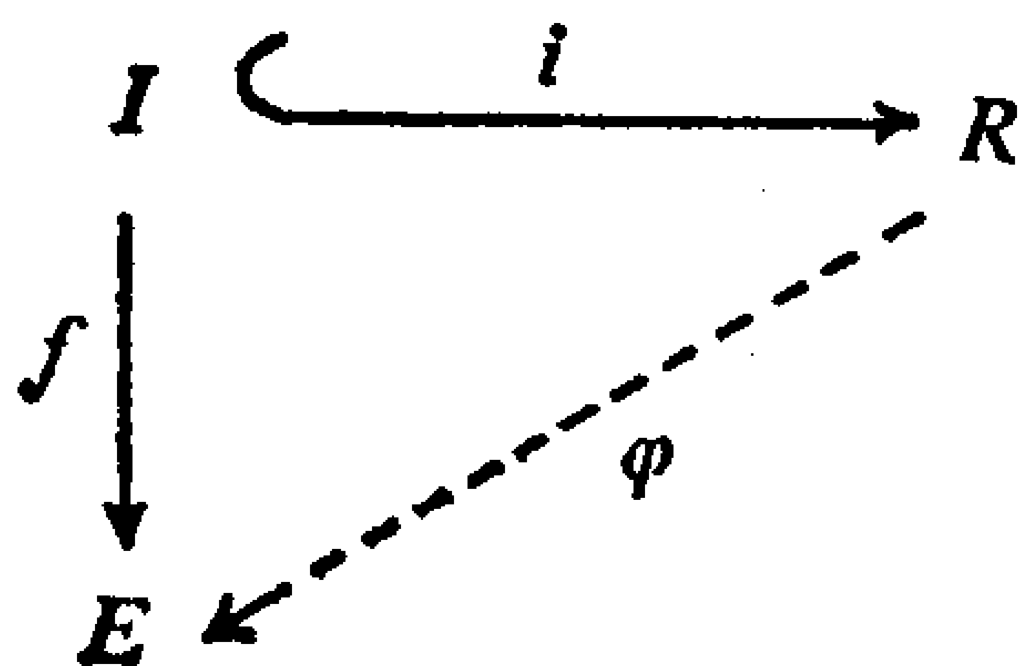
例7.1 $\mathbf{Q}$是可除左$\mathbf{Z}$-模。

容易知道，任意一集可除模的直和及直积都是可除模，可除模的同态象是可除模。

关于可除模与内射模之间的关系，首先有下面定理。

定理7.6 内射左R-模必是可除左R-模。

证 设E是内射左R-模。任给$x_0\in E$，并任给$r_0\in R$，但r_0不是右零因子。命$I=Rr_0$，则I是环R的左理想。再命$f: I\longrightarrow E$是$rr_0\longmapsto rx_0$，则因r_0不是右零因子，可知f是映射，且易知f是左R-映射。于是可补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射。从而就有$x_0=f(r_0)=\varphi(r_0)=r_0\varphi(1)$，即$x_0$被$r_0$可除。故$E$是可除模。

当R是主理想整环时，还有更进一步的结果，即有下面定理。

定理7.7 主理想整环上的可除模是内射模。

证 设R是主理想整环，D是可除左R-模。考虑图：

$$\begin{array}{ccc} I & \stackrel{i}{\hookrightarrow} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

其中I是环R的任意左理想，f是任意左R-映射。

若$I=0$，则当然有左R-映射$\varphi: R\longrightarrow D$使上图交换。

今设$I\neq 0$。由于R是主理想整环，故可设$I=Rr_0$，这里$0\neq r_0\in R$。可知r_0不是右零因子。因此，对于$f(r_0)\in D$，由于D是可除左R-模，故有$d\in D$使$f(r_0)=r_0d$。现在命$\varphi: R\longrightarrow D$是$r\longmapsto rd$，则易知$\varphi$是左$R$-映射，且当$rr_0\in I$时，有$\varphi i(rr_0)=\varphi(rr_0)=rr_0d=rf(r_0)=f(rr_0)$，故$\varphi i=f$。因此$\varphi$将上图补成交换图。所以$D$是内射模。

例7.2 **Q**是内射左**Z**-模。

我们知道，对于任意环R，每一个左R-模必是一个投射左R-模的一个同态象。对偶地，我们能够证明，每一个左R-模必可嵌入一个内射左R-模，即可R-单射到一个内射左R-模。我们先处理$R=\mathbf{Z}$的特殊情形。有下面定理。

定理7.8 每一个左**Z**-模必可嵌入一个内射左**Z**-模。

证 设A是一个左**Z**-模，则A首先总是一个自由左**Z**-模的一个同态象。故可设有一个基数α及一个左**Z**-满射$\varphi: \mathbf{Z}^{(\alpha)}\longrightarrow A$。于是$A\cong\mathbf{Z}^{(\alpha)}/\ker\varphi$。再利用$\mathbf{Z}^{(\alpha)}/\ker\varphi\stackrel{i}{\hookrightarrow}\mathbf{Q}^{(\alpha)}/\ker\varphi$，就有左**Z**-单射$f: A\rightarrowtail\mathbf{Q}^{(\alpha)}/\ker\varphi$。容易知道$\mathbf{Q}^{(\alpha)}/\ker\varphi$是内射左**Z**-模，这是因为**Q**是可除左**Z**-模，故$\mathbf{Q}^{(\alpha)}$是可除左**Z**-模，从而$\mathbf{Q}^{(\alpha)}/\ker\varphi$是可除左**Z**-模，因此$\mathbf{Q}^{(\alpha)}/\ker\varphi$是内射左**Z**-模。

现在我们可以对任意环R，给出一个内射左R-模的例子，

即有下面定理。

定理7.9 对于任意环R，命D是可除左$\mathbf{Z}$模，则$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D)$是内射左$R$-模。

证 因为R是（$\mathbf{Z}$，R）-双模，故首先知$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D)$是左$R$-模。为证$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D)$是内射左$R$-模，只要证明函子$\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D))$是正合的。而这只要证明当$f$：$A\longrightarrow B$是左$R$-单射时，$f^*$：$\mathrm{Hom}_R(B,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D))\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D))$是满射。

因为$(R\otimes_R,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,-))$是附加对，故有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R\otimes_R B,D) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Hom}_R(B,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D)) \\
\downarrow{\scriptstyle (1\otimes f)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R\otimes_R A,D) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D))
\end{array},$$

其中τ及σ是定理5.7中给出的左$\mathbf{Z}$-同构映射。于是有$f^*\tau=\sigma(1\otimes f)^*$。由此可知，为证$f^*$是满射，只要证明$(1\otimes f)^*$是满射。

由例2.10知有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
R\otimes_R A & \xrightarrow{h} & A \\
{\scriptstyle 1\otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
R\otimes_R B & \xrightarrow{k} & B
\end{array},$$

其中h,k是左$\mathbf{Z}$-同构映射。故由于f是单射，知$1\otimes f$是左R-单射。因为D是内射左$\mathbf{Z}$-模，故函子$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-,D)$是正合的，因此$(1\otimes f)^*$是满射。这就证明了$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R,D)$是内射左$R$-模。

最后，我们来证明每一个左R-模必可嵌入一个内射左R-模，即有下面定理。

定理7.10 对于任意环R，每一个左R-模必可嵌入一个内射左R-模。

证 设A是左R-模。先可将左$\mathbf{Z}$-模A嵌入一个内射左$\mathbf{Z}$-

模D，即有左$\mathbf{Z}$-单射f': $A \longrightarrow D$。然后对于$a \in A$，命f_a: $R \longrightarrow D$是$r \longmapsto f'(ra)$，则易知f_a是左$\mathbf{Z}$-映射。现在命φ: $A \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$是$a \longmapsto f_a$，则易知$\varphi$是左$R$-映射。容易知道$\varphi$是单射，这是因为若$f_a = 0$，则$f_a(1) = 0$，但是$f_a(1) = f'(a)$，故$f'(a) = 0$。因此$a = 0$。这就证明了左$R$-模$A$可以嵌入内射左$R$-模$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, D)$。

7.7 内射包络

当B是左R-模A的子模时，称A是B的一个扩张。若左R-模B的一个扩张A是内射左R-模，则称A是B的一个内射扩张。由定理7.10知每一个左R-模都有内射扩张。

由于每一个模都有内射扩张，因此一个模可能有越来越大的内射扩张。例如，左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Q}$是左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$的内射扩张，左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{R}$也是左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$的内射扩张，左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{C}$也是左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$的内射扩张，这里$\mathbf{C}$是全体复数作成的集。这样，我们自然希望得到一个模的尽可能小的内射扩张。

定义7.4 设左R-模E是左R-模A的一个内射扩张。若E没有内射子模E'满足$A \subseteq E' \subset E$，则称E是A的一个极小内射扩张。

明显知道，左R-模A是内射模，当且仅当A本身是A的一个极小内射扩张。

现在我们引入模的另一种扩张，它与模的极小内射扩张有着密切的联系。

定义7.5 设左R-模E是左R-模A的一个扩张。若对E的每一个非零子模H，恒有$A \cap H \neq 0$，则称E是A的一个本质扩张，并称A是E的一个本质子模。当E是A的一个本质扩张，且$E \neq A$时，称E是A的一个真本质扩张。

例7.3 左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Q}$是左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$的一个真本质扩张。

关于模的本质扩张，我们有下面定理。

定理7.11　设左R-模E是左R-模A的一个扩张，则E是A的本质扩张，当且仅当对于每一个$e\in E$，且$e\neq 0$，恒存在$r\in R$使$re\in A$，且$re\neq 0$。

证　设E是A的本质扩张，则当$e\in E$，且$e\neq 0$时，Re是E的非零子模，从而$A\cap Re\neq 0$。故有$r\in R$使$re\in A$，且$re\neq 0$。

反之，设对任何$e\in E$，且$e\neq 0$，恒存在$r\in R$使$re\in A$且$re\neq 0$。命E'是E的任意一个非零子模，则有$e\in E'$，且$e\neq 0$。于是有$r\in R$使$re\in A$，且$re\neq 0$。从而知$A\cap E'\neq 0$。故E是A的本质扩张。

定理7.12　设A,E,F是三个左R-模，并设E是A的扩张，F是E的扩张。

(i) 若F是A的本质扩张，则E是A的本质扩张，F是E的本质扩张；

(ii) 若E是A的本质扩张，且F是E的本质扩张，则F是A的本质扩张。

证　(i) 设E'是E的一个非零子模，则因E'也是F的一个非零子模，就有$A\cap E'\neq 0$. 故E是A的本质扩张。

设F'是F的一个非零子模，则先有$A\cap F'\neq 0$。但$E\supseteq A$，故$E\cap F'\neq 0$。因此F是E的本质扩张。

(ii) 设F'是F的非零子模，则$E\cap F'$是E的非零子模，故$A\cap(E\cap F')\neq 0$。从而$A\cap F'\neq 0$。因此F是A的本质扩张。

定理7.13　设M,N是两个左R-模，且$\varphi: M\longrightarrow N$是左$R$-同构映射。若$M$是$A$的本质扩张，则$N$是$\varphi(A)$的本质扩张。

证　设W是N的一个非零子模。命$V=\varphi^{-1}(W)=\{x\in M\mid \varphi(x)\in W\}$，则$V$是$M$的一个非零子模，从而$A\cap V\neq 0$。故有$0\neq a\in A\cap V$，于是$0\neq\varphi(a)\in\varphi(A)\cap W$。因此$\varphi(A)\cap W\neq 0$。所以$N$是$\varphi(A)$的本质扩张。

推论7.2　设A,B是两个左R-模，且$A\cong B$。若A没有真本质扩张，则B也没有真本质扩张。

证 设N是B的一个本质扩张，则A有一个扩张M使得N到M有一个左R-同构映射ψ满足$\psi(B)=A$。于是由定理7.13知M是A的本质扩张，从而$M=A$。故$N=B$。因此B没有真本质扩张。

现在我们给出内射模的又一种刻划，即有下面定理。

定理7.14 左R-模A是内射模，当且仅当A没有真本质扩张。

证 设A是内射左R-模。若E是A的一个本质扩张，则因任何模的内射子模必是其一个直和项，故E有一个子模N使$E=A\oplus N$，于是$A\cap N=0$，从而$N=0$，因此$E=A$，故A没有真本质扩张。

反之，设A没有真本质扩张。因为每一个模都有内射扩张，故可设左R-模E是A的一个内射扩张。我们来证明E有一个子模N使$E=A\oplus N$，从而即可知A是内射模。为此，命

$$\Omega=\{X \mid X\text{是}E\text{的子模，且}A\cap X=0\}.$$

因为$0\in\Omega$，故Ω不空。Ω对于集的"$\subseteq$"当然成为偏序集。若$\{X_\alpha \mid \alpha\in J\}$是$\Omega$的一个有序子集，则易知$\bigcup_{\alpha\in J}X_\alpha\in\Omega$，且$\bigcup_{\alpha\in J}X_\alpha$是$\{X_\alpha \mid \alpha\in J\}$在$\Omega$中的一个上界。故$\Omega$有极大元素。命$N$是$\Omega$的一个极大元素，则首先有$A\oplus N$。

由$A\xrightarrow{i}E$及$E\xrightarrow{\rho}E/N$，其中ρ是自然同态映射，有左R-映射

$$\rho i:\quad A\longrightarrow E/N.$$

因为当$x\in\ker\rho i$时，$\rho i(x)=0$，故$x+N=0$，于是$x\in A\cap N$，从而$x=0$，因此ρi是单射。

不难证明E/N是$\operatorname{im}\rho i$的本质扩张。事实上，设S/N是E/N的一个非零子模，其中S是E的子模，则$S\supset N$。因为N是Ω的一个极大元素，故$A\cap S\neq 0$。命$x\in A\cap S$，且$x\neq 0$。因为$A\cap N=0$，故$x\overline{\in}N$。于是有$0\neq x+N\in S/N$，且$x+N=\rho i(x)$

$\in \mathrm{im}\rho i$，从而$\mathrm{im}\rho i \cap S/N \neq 0$。故$E/N$是$\mathrm{im}\rho i$的本质扩张。

因为$\mathrm{im}\rho i \cong A$，而$A$没有真本质扩张，故由推论7.2知$\mathrm{im}\rho i$没有真本质扩张。因此$\mathrm{im}\rho i = E/N$。从而$\rho i$是左$R$-同构映射。

到此容易证明$E = A \oplus N$。这是因为当$e \in E$时，由$e + N \in E/N$，就有$a \in A$使$e + N = \rho i(a) = a + N$，故$e - a = y \in N$，从而$e = a + y \in A \oplus N$。所以$E = A \oplus N$。由于$E$是内射模，故$A$是内射模。

若左R-单射$f: A \longrightarrow B$使得$\mathrm{im}f$是B的一个本质子模，则称f是一个本质左R-单射。

推论7.3 左R-模A是内射模，当且仅当每一个本质左R-单射$f: A \longrightarrow X$都是同构映射。

证 设A是内射左R-模，则A没有真本质扩张。若$f: A \longrightarrow X$是本质左R-单射，则X是$\mathrm{im}f$的本质扩张。因为$\mathrm{im}f \cong A$，故$\mathrm{im}f$没有真本质扩张，因此$\mathrm{im}f = X$，所以f是同构映射。

反之，设每一个本质左R-单射$f: A \longrightarrow X$都是同构映射。若左R-模M是A的一个本质扩张，则$f: A \hookrightarrow M$是本质左R-单射，故f是同构映射。从而$M = A$，因此A没有真本质扩张。所以A是内射模。

由$\mathbf{Z}$不是可除左$\mathbf{Z}$-模已可知$\mathbf{Z}$不是内射左$\mathbf{Z}$-模。而根据定理7.14，又可从左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$有真本质扩张$\mathbf{Q}$推知$\mathbf{Z}$不是内射左$\mathbf{Z}$-模。

由定理7.12知，当左R-模F是左R-模A的一个本质扩张时，F的任意一个子模，只要它包含A，就是A的一个本质扩张。因此我们自然希望得到一个模的尽可能大的本质扩张。

定义7.6 设左R-模E是左R-模A的一个本质扩张。若A的本质扩张$F \supseteq E$时必有$F = E$，则称E是A的一个极大本质扩张。

我们先证明下面引理。

引理7.2 设左R-模E是左R-模A的一个内射扩张。命

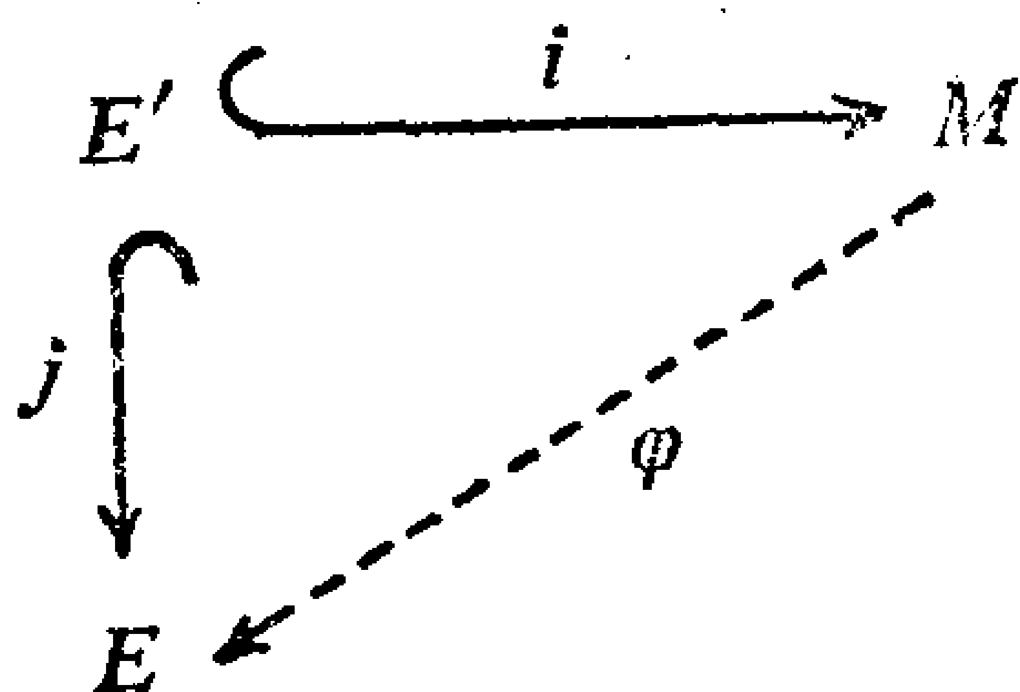
$\Omega = \{X \mid X$是E的子模，$X \supseteq A$，且X是A的本质扩张$\}$，则Ω

对于集的“$\subseteq$”成为偏序集，且Ω有极大元素，并且Ω的任一极大元素都是A的一个极大本质扩张。

证 因为$A\in\Omega$，故Ω不空。对于集的“$\subseteq$”，Ω当然成为偏序集。设$\{E_j|j\in J\}$是Ω的一个有序子集，则利用定理7.11容易证明$\bigcup\limits_{j\in J}E_j$是$\{E_j|j\in J\}$在$\Omega$中的一个上界。故据Zorn引理知$\Omega$有极大元素。

设E'是Ω的任一极大元素，则E'当然首先是A的一个本质扩张。我们来证明E'是A的一个极大本质扩张。为此，只要证明，当M是A的一个本质扩张，且$M\supseteq E'$时，必定$E'=M$。

因为E是内射模，故首先可以补成交换图：



其中补出的φ是左R-映射。于是由$\varphi i=j$先可知有$\varphi(e')=e'$，$\forall e'\in E'$。从而又有$\varphi(E')=E'$。

不难证明φ是单射。事实上，因为M是A的本质扩张，而E'是M的子模且$E'\supseteq A$，故由定理7.12知M是E'的本质扩张。于是由定理7.11知，当$x\in M$且$x\neq0$时，恒存在$r\in R$使$rx\in E'$，且$rx\neq0$。从而$\varphi(rx)=rx\neq0$。因此$r\varphi(x)\neq0$。故$\varphi(x)\neq0$。所以φ是单射。

这样，$\varphi: M\longrightarrow \mathrm{im}\varphi$是同构映射。因为$M$是$A$的本质扩张，故由定理7.13知$\mathrm{im}\varphi$是$\varphi(A)$的本质扩张。但$\varphi(A)=A$，故$\mathrm{im}\varphi$是$A$的本质扩张。又因为明显可知$\mathrm{im}\varphi\supseteq E'$，故由$E'$是$\Omega$的极大元素知$\mathrm{im}\varphi=E'$。于是当$x\in M$时，由于$\varphi(x)=e'\in E'$，且$\varphi(e')=e'$，故$x=e'\in E'$，从而$M=E'$。因此$E'$是$A$的一个

极大本质扩张。

因为每一个模都有内射扩张，故由这个引理立刻得到下面的推论。

推论7.4 每一个左R-模都有极大本质扩张。

若一个模的一个扩张既是内射扩张，又是本质扩张，则这个扩张叫内射本质扩张。我们证明下面定理。

定理7.15 设左R-模E是左R-模A的一个扩张，则以下条件等价：

(i) E是A的极大本质扩张；

(ii) E是A的内射本质扩张；

(iii) E是A的极小内射扩张。

证 (i)$\Longrightarrow$(ii)。设E是A的极大本质扩张。若F是E的一个本质扩张，则由定理7.12知F是A的本质扩张。于是$F=E$，故E没有真本质扩张，因此E是内射模。所以E是A的内射本质扩张。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)。设E是A的内射本质扩张。若E有一个内射子模E'满足$A\subseteq E'\subset E$，则因任何模的内射子模必是其一个直和项，故E有一个子模E''使$E=E'\oplus E''$。由$E'\subset E$知$E''\neq 0$。但$A\cap E''\subseteq E'\cap E''=0$。这与"$E$是$A$的本质扩张"矛盾。故$E$是$A$的极小内射扩张。

(iii)$\Longrightarrow$(i)。设E是A的极小内射扩张。命

$\Omega=\{X\mid X$是E的子模，$X\supseteq A$，且X是A的本质扩张$\}$，

则由引理7.2知Ω对于集的"$\subseteq$"成为偏序集，且Ω有极大元素，并且Ω的任一极大元素都是A的一个极大本质扩张。

今设E'是Ω的一个极大元素，则E'是A的极大本质扩张。于是由(i)$\Longrightarrow$(ii)知E'是A的内射本质扩张。故E'是内射模。因此由$A\subseteq E'\subseteq E$及E是A的极小内射扩张知$E=E'$。但E'是A的极大本质扩张，故E是A的极大本质扩张。

定义7.7 左R-模A的一个扩张E满足定理7.15的(i)、(ii)、

(iii)中任意一条时，叫做A的一个内射包络。

由推论7.4及定理7.15，立刻得到下面推论。

推论7.5 每一个左R-模都有内射包络。

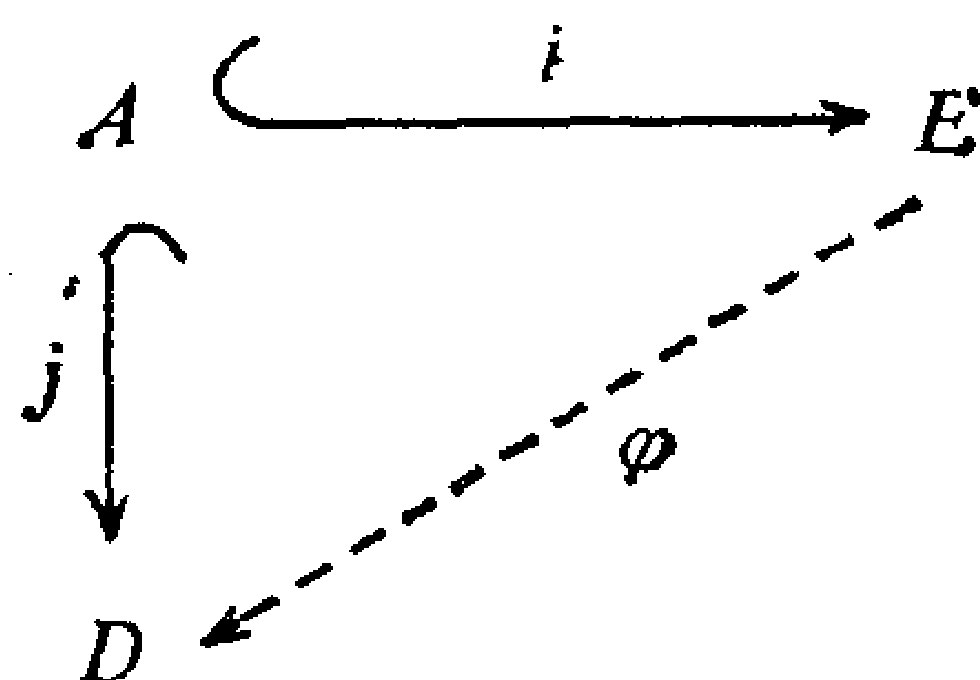
例7.4 左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Q}$是左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}$的一个内射包络。

证 因为$\mathbf{Q}$是$\mathbf{Z}$的内射本质扩张。

我们可以证明，一个模本质上只有一个内射包络。为此，先证明下面引理。

引理7.3 设E是左R-模A的一个内射包络。若D是A的任意一个内射扩张，则存在左R-单射$\varphi: E\longrightarrow D$满足$\varphi(a)=a$，$\forall\, a\in A$。

证 因为D是内射左R-模，故可补成交换图：



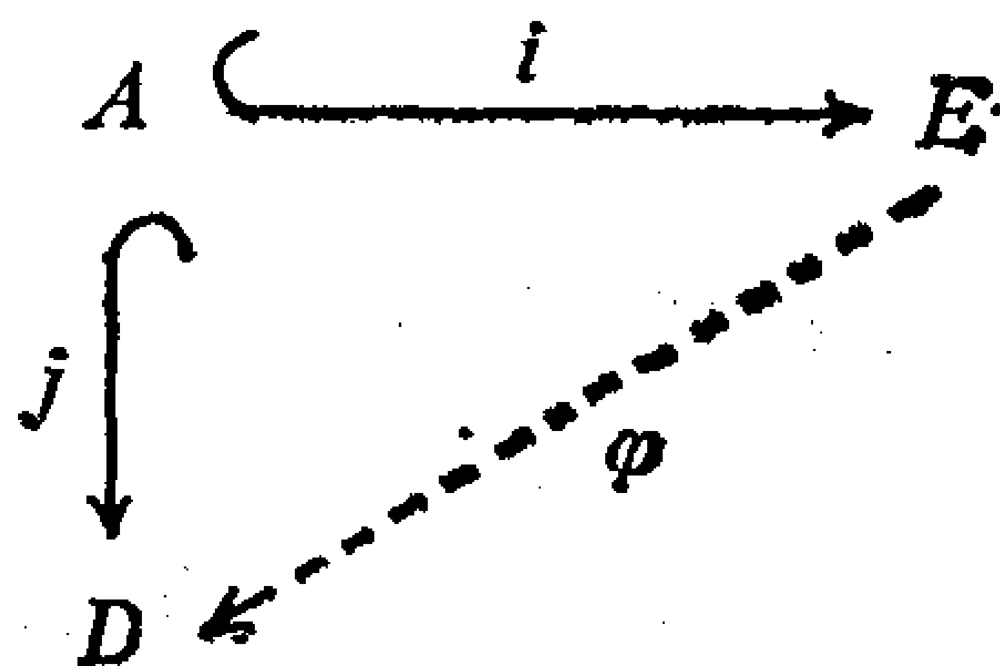
其中补出的φ是左R-映射。于是有$\varphi(a)=a$，$\forall\, a\in A$。

因为E是A的本质扩张，故当$x\in E$且$x\neq 0$时，由定理7.11知存在$r\in R$使$rx\in A$，且$rx\neq 0$。于是$\varphi(rx)=rx\neq 0$，故$r\varphi(x)\neq 0$，从而$\varphi(x)\neq 0$。因此φ是单射。

在下面定理的意义下，一个模只有一个内射包络。

定理7.16 设E及D是左R-模A的任意两个内射包络，则必存在左R-同构映射$\varphi: E\longrightarrow D$满足$\varphi(a)=a$，$\forall\, a\in A$。

证 由引理7.3知可以补成交换图：



其中补出的φ是左R-单射，且满足$\varphi(a)=a$，$\forall a\in A$。

因为当$a\in A$时有 $a=\varphi(a)\in \mathrm{im}\varphi$，故$D$的子模 $\mathrm{im}\varphi\supseteq A$。因为$D$是$A$的本质扩张，故由定理7.12知$D$是 $\mathrm{im}\varphi$ 的本质扩张。因此φ是本质左R-单射。于是由推论7.3知φ是同构映射。

7.8　投射覆盖

本质子模也叫大子模。现在我们引入小子模的概念。

定义7.8　设A是左R-模，N是A的一个子模。若当A的子模L使$N+L=A$时必定有$L=A$，则称N是A的一个小子模，记作$N\ll A$。

明显知零子模是小子模。

类似于模的内射包络的概念，我们引入模的投射覆盖的概念

定义7.9　设A是左R-模。若投射左R-模P及左R-满射 f $P \twoheadrightarrow A$使得$\mathrm{ker}f\ll P$，则称(P,f)是A的一个投射覆盖，简称P是A的一个投射覆盖。

由定义可知，左R-模A是投射模，当且仅当A本身是A的一个投射覆盖。

对于任意环R，每一个左R-模都有内射包络。但未必每一个左R-模都有投射覆盖。例如，左$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$就没有投射覆盖。后面的习题将指引读者自己去证明。

§8　平　坦　模

8.1　平坦模的定义

投射模概念是自由模概念的推广，内射模概念是投射模概念的对偶概念。当且仅当函子$\mathrm{Hom}_R(P,-)$正合时，P是投射左R-模；当且仅当函子$\mathrm{Hom}_R(-,E)$正合时，E是内射左R-模。

现在我们给出下面定义。

定义8.1 设A是右R-模。若函子$A\otimes_R$是正合的，则称A是一个平坦右R-模。

因为对于任意右R-模A，函子$A\otimes_R$总是右正合的，故右R-模A是平坦模，当且仅当对于任何左R-单射$f: X\longrightarrow Y$，必定$1\otimes f: A\otimes_R X\longrightarrow A\otimes_R Y$是$\mathbf{Z}$-单射。

容易知道，若A是平坦右R-模，右R-模X与A同构，则X也是平坦右R-模。

同样，当函子$\otimes_R B$正合时，定义B是平坦左R-模。

8.2 直和与诸直和项的平坦性之间的关系

直和的平坦性与诸直和项的平坦性之间有密切的联系。我们有下面定理。

定理8.1 设$\{A_k | k\in K\}$是一集右R-模，则$\bigoplus_{k\in K} A_k$是平坦模，当且仅当每一个A_k都是平坦模。

证 设$f: X\longrightarrow Y$是任意左R-单射。我们用1表示$\bigoplus_{k\in K} A_k$的恒等映射，则$\bigoplus_{k\in K} A_k$是平坦模，当且仅当$1\otimes f$是单射。我们用1_k表示A_k的恒等映射，则A_k是平坦模，当且仅当$1_k\otimes f$是单射。

命λ_k是$A_k\otimes_R X$到$\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X)$的入射，$\mu_k$是$A_k\otimes_R Y$到$\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R Y)$的入射，则可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X) & \overset{g}{\dashrightarrow} & \bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R Y) \\ \nwarrow{\scriptstyle\lambda_k} & & \nearrow{\scriptstyle\mu_k(1_k\otimes f)} \\ & A_k\otimes_R X & \end{array},\ \forall k\in K$$

其中补出的g是$\mathbf{Z}$-映射。

又，由定理5.6知存在唯一的$\mathbf{Z}$-同构映射

$$\varphi_X:(\bigoplus_{k\in K}A_k)\otimes_R X\longrightarrow\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X)$$

满足

$$(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)\otimes x\longmapsto(\cdots,a_i\otimes x,\cdots,a_j\otimes x,\cdots)$$

通过简单的直接验证即知下图交换:

$$\begin{array}{ccc}(\bigoplus_{k\in K}A_k)\otimes_R X & \xrightarrow{1\otimes f} & (\bigoplus_{k\in K}A_k)\otimes_R Y\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_X} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_Y}\\ \bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X) & \xrightarrow{g} & \bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R Y)\end{array}$$

因此，$1\otimes f$ 是单射，当且仅当 g 是单射。但是由 $g\lambda_k=\mu_k(1_k\otimes f)$，$\forall k\in K$，可知 g 是单射，当且仅当每一个 $1_k\otimes f$ 都是单射。故 $\bigoplus_{k\in K}A_k$是平坦模，当且仅当每一个A_k都是平坦模。

8.3 平坦模与投射模之间的关系

首先我们证明下面定理。

定理8.2 R是平坦右R-模。

证 由例2.10知$R\otimes_R$与R-mod到R-mod的恒等函子自然等价，有交换图:

$$\begin{array}{ccc}R\otimes_R X & \xrightarrow{t_X} & X\\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes f} & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ R\otimes_R Y & \xrightarrow{t_Y} & Y\end{array},\quad\forall X\xrightarrow{f}Y$$

其中t_X及t_Y都是 $\mathbf{Z}$-同构映射。因此，当 f 是左R-单射时，$1\otimes f$ 是单射。故R是平坦右R-模。

由这个定理立刻可以得到下面两个推论。

推论8.1 自由模是平坦模。

证 设F是自由右R-模，则有基数α使 $F\cong R^{(\alpha)}$，于是由定理8.1及定理8.2知F是平坦模。

推论8.2 投射模是平坦模。

证 设P是投射右R-模，则有一个自由右R-模F及F的一个子模N使$F=P\oplus N$。故P是平坦模。

8.4 平坦模的正向极限

关于平坦模的正向极限，有下面定理。

定理8.3 设$(K,\leqslant)$是一个正向拟序集，$\{A_k,\varphi_j^k\}$是mod-R中以K为指标集的一个正向系统。若每一个A_k都是平坦模，则$\varinjlim A_k$是平坦模。

证 设$f: X\longrightarrow Y$是任意左R-单射，我们来证明$1\otimes f$是单射，这里1是$\varinjlim A_k$的恒等映射。

因为$\{A_k,\varphi_j^k\}$是K到mod-R的共变函子，$\otimes_R X$及$\otimes_R Y$是mod-R到mod-$\mathbf{Z}$的共变函子，而两个共变函子的积是共变函子，故首先得到mod-$\mathbf{Z}$中以K为指标集的两个正向系统：

$$\{A_k\otimes_R X,\psi_j^k\}, \text{其中}\psi_j^k=\varphi_j^k\otimes 1_X,\quad \forall k\leqslant j;$$
$$\{A_k\otimes_R Y,\theta_j^k\}, \text{其中}\theta_j^k=\varphi_j^k\otimes 1_Y,\quad \forall k\leqslant j.$$

因为每一个A_k都是平坦右R-模，故得到一集右R-短正合列

$$0\longrightarrow A_k\otimes_R X\xrightarrow{1_k\otimes f}A_k\otimes_R Y\xrightarrow{\rho_k} A_k\otimes_R Y/\mathrm{im}(1_k\otimes f)\longrightarrow 0,\quad \forall k\in K,$$

其中ρ_k是自然同态映射。

现在我们要以上述短正合列中的$A_k\otimes_R Y/\mathrm{im}(1_k\otimes f)$为基础来作mod-$\mathbf{Z}$中以$K$为指标集的第三个正向系统。为此，先命

$$C_k=A_k\otimes_R Y/\mathrm{im}(1_k\otimes f),\qquad \forall k\in K.$$

因为对于任何$a_k\in A_k$，$x\in X$，当$k\leqslant j$时，有$\rho_j\theta_j^k(1_k\otimes f)(a_k\otimes x)=\rho_j(\varphi_j^k\otimes 1_Y)(1_k\otimes f)(a_k\otimes x)=(1_j\otimes f)(\varphi_j^k(a_k)\otimes x)+\mathrm{im}(1_j\otimes f)=0$，故$\mathrm{im}(1_k\otimes f)\subseteq\ker\rho_j\theta_j^k$。于是可以唯一地补成交

换图：

$$\begin{array}{ccc} A_k\otimes_R Y & \xrightarrow{\rho_j\theta_j^k} & A_j\otimes_R Y/\operatorname{im}(1_j\otimes f) \\ & \searrow^{\rho_k} & \nearrow_{\zeta_j^k} \\ & A_k\otimes_R Y/\operatorname{im}(1_k\otimes f) & \end{array}\qquad \forall k\leqslant j,$$

其中补出的ζ_j^k是 **Z**-映射。

容易验证，当$k\leqslant j\leqslant i$时，$\zeta_i^j\zeta_j^k=\zeta_i^k$，故$\{C_k, \zeta_j^k\}$是 mod-**Z** 中以$K$为指标集的一个正向系统。

现在命$t_k=1_k\otimes f, s_k=\rho_k, \forall k\in K$，易知有交换图：

$$\begin{array}{ccc} A_k\otimes_R X & \xrightarrow{t_k} & A_k\otimes_R Y \\ \downarrow{\psi_j^k} & & \downarrow{\theta_j^k} \\ A_j\otimes_R X & \xrightarrow{t_j} & A_j\otimes_R Y \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} A_k\otimes_R Y & \xrightarrow{s_k} & C_k \\ \downarrow{\theta_j^k} & & \downarrow{\zeta_j^k} \\ A_j\otimes_R Y & \xrightarrow{s_j} & C_j \end{array},\qquad \forall k\leqslant j$$

故 t: $\{A_k\otimes_R X, \psi_j^k\}\longrightarrow\{A_k\otimes_R Y, \theta_j^k\}$及$s$: $\{A_k\otimes_R Y,\theta_j^k\}\longrightarrow\{C_k,\zeta_j^k\}$都是自然变换。

因为对于每一个$k\in K$，有**Z**-短正合列

$$0\longrightarrow A_k\otimes_R X\xrightarrow{t_k}A_k\otimes_R Y\xrightarrow{s_k}C_k\longrightarrow 0,$$

故由定理5.11知有**Z**-短正合列

$$0\longrightarrow\varinjlim(A_k\otimes_R X)\xrightarrow{\vec{t}}\varinjlim(A_k\otimes_R Y)\xrightarrow{\vec{s}}\varinjlim C_k\longrightarrow 0.$$

因此$\vec{t}$是单射。

由推论5.5知$\otimes_R X$保持正向极限：$(\varinjlim A_k)\otimes_R X=\varinjlim(A_k\otimes_R X)$。根据定理2.3及其证明，可知这就是：设$\{\varinjlim A_k,\alpha_k\}$是$\{A_k,\varphi_k^j\}$的正向极限，$\{\varinjlim(A_k\otimes_R X),\beta_k\}$是$\{A_k\otimes_R X,\psi_k^j\}$的正向极限，则可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc}(\varinjlim A_k)\otimes_R X & \overset{\sigma_X}{\dashrightarrow} & \varinjlim(A_k\otimes_R X)\\ {\scriptstyle \alpha_k\otimes 1_X}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle \beta_k}\\ & A_k\otimes_R X & \end{array}\qquad \forall k\in K$$

其中补出的σ_X是$\mathbf{Z}$-同构映射。

由定理5.9知$\varinjlim A_k=\bigoplus_{k\in K}A_k/S$，$S$的意义见该定理；$\alpha_k: A_k\longrightarrow\bigoplus_{k\in K}A_k/S$是$a_k\longmapsto\lambda_k(a_k)+S$，其中$\lambda_k$是$A_k$到$\bigoplus_{k\in K}A_k$的入射。同样，$\varinjlim(A_k\otimes_R X)=\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X)/T$，$T$的意义见该定理；$\beta_k$：$A_k\otimes_R X\longrightarrow\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X)/T$是$z_k\longmapsto\mu_k(z_k)+T$，其中$\mu_k$是$A_k\otimes_R X$到$\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R X)$的入射。再由定理5.10知，$\bigoplus_{k\in K}A_k/S=\{\lambda_k(a_k)+S\,|\,a_k\in A_k,k\in K\}$。

于是由$\sigma_X(\alpha_k\otimes 1_Y)=\beta_k$，$\forall k\in K$可知，当$a_k\in A_k$，$x\in X$时，有$\sigma_X(\alpha_k\otimes 1_Y)(a_k\otimes x)=\beta_k(a_k\otimes x)$，从而有

$$\sigma_X((\lambda_k(a_k)+S)\otimes x)=\mu_k(a_k\otimes x)+T,\quad \forall k\in K.$$

同样，$\varinjlim(A_k\otimes_R Y)=\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R Y)/W$，并设$\eta_k$是$A_k\otimes_R Y$到$\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes_R Y)$的入射，则当$a_k\in A_k$，$y\in Y$时，有

$$\sigma_Y((\lambda_k(a_k)+S)\otimes y)=\eta_k(a_k\otimes y)+W,\quad \forall k\in k.$$

现在容易证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc}(\varinjlim A_k)\otimes_R X & \xrightarrow{1\otimes f} & (\varinjlim A_k)\otimes_R Y\\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_X} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_Y}\\ \varinjlim(A_k\otimes_R X) & \xrightarrow{\vec{t}} & \varinjlim(A_k\otimes_R Y)\end{array}\quad.$$

这是因为当$a_k \in A_k$, $x \in X$时，有

$$\begin{aligned}\vec{t}\sigma_X((\lambda_k(a_k)+S)\otimes x) &= \vec{t}\,(\mu_k(a_k\otimes x)+T)\\ &= \eta_k t_k(a_k\otimes x)+W\\ &= \eta_k(a_k\otimes f(x))+W,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y(1\otimes f)((\lambda_k(a_k)+S)\otimes x) &= \sigma_Y((\lambda_k(a_k)+S)\otimes f(x))\\ &= \eta_k(a_k\otimes f(x))+W.\end{aligned}$$

于是由于$\vec{t}$是单射，且σ_X，σ_Y都是**Z**-同构映射，故$1\otimes f$是单射。因此$\varinjlim A_k$是平坦模。

由这个定理可以得到下面两个推论。

推论8.3　若R是交换整环，则其分式域Q是平坦右R-模。

证　由例2.17知$Q=\varinjlim F_i$，其中每一个F_i都是右R-模Q的非零循环子模：$F_i = x_iR$, $0 \neq x_i \in Q$。因为R是交换整环，故$F_i \cong R$是平坦右R-模。因此$Q=\varinjlim F_i$是平坦右R-模。

由这个推论知道，**Q**是平坦右**Z**-模。

推论8.4　若右R-模A的每一个$f.g.$子模都是平坦模，则A是平坦模。

证　由例2.15及定理8.3即得。

8.5　模的平坦性与其特征标模的内射性之间的关系

我们将通过一个模的特征标模的内射性来判断此模的平坦性。为此，先引入两个概念，并证明三个引理。

定义8.2　设B是右R-模。命

$$B^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

则B^*是左R-模，它叫做B的特征标模。

定义8.3　设A是左R-模。若对任意非零左R-模X及任意$0 \neq x \in X$，恒存在左R-映射$f: X \longrightarrow A$满足$f(x) \neq 0$，则称A是R-mod的一个上生成对象。

引理8.1 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$是$\mathbf{Z}$-mod的一个上生成对象。

证 设X是非零左$\mathbf{Z}$-模，$x\in X$，且$x\neq 0$。

若 x 的阶$=\infty$，则命 φ：$\mathbf{Z}x\longrightarrow\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 是 $kx\longmapsto\frac{k}{2}+\mathbf{Z}$ 时，φ是左$\mathbf{Z}$-映射。因为$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$是内射左$\mathbf{Z}$-模，故可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Z}x & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle f} & \\ \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & & \end{array}$$

其中补出的f是左 $\mathbf{Z}$-映射，且$f(x)=\varphi(x)=\frac{1}{2}+\mathbf{Z}\neq 0$。

若 x的阶$=n$，则命 φ：$\mathbf{Z}x\longrightarrow\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 是 $kx\longmapsto\frac{k}{n}+\mathbf{Z}$，则同样得到一个左$\mathbf{Z}$-映射 f：$X\longrightarrow\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 满足 $f(x)\neq 0$。故 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Z}$-mod 的一个上生成对象。

引理8.2 $0\longrightarrow A\overset{f}{\longrightarrow}B\overset{g}{\longrightarrow}C\longrightarrow 0$是右$R$-短正合列，当且仅当 $0\longrightarrow C^*\overset{g^*}{\longrightarrow}B^*\overset{f^*}{\longrightarrow}A^*\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列。

证 若 $0\longrightarrow A\overset{f}{\longrightarrow}B\overset{g}{\longrightarrow}C\longrightarrow 0$是右$R$-短正合列，则因$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$是正合的，故 $0\longrightarrow C^*\overset{g^*}{\longrightarrow}B^*\overset{f^*}{\longrightarrow}A^*\longrightarrow 0$ 是左R-短正合列。

反之，设 $0\longrightarrow C^*\overset{g^*}{\longrightarrow}B^*\overset{f^*}{\longrightarrow}A^*\longrightarrow 0$ 是左R-短正合列。

若f不是单射，则有$0\neq a\in A$ 使$f(a)=0$。因为 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$是$\mathbf{Z}$-mod的一个上生成对象，故有左 $\mathbf{Z}$-映射 σ：$A\longrightarrow\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 使$\sigma(a)\neq 0$。因为f^*是满射，故对$\sigma\in A^*$，有 $\delta\in B^*$ 使 $\sigma=f^*(\delta)=\delta f$。于是 $\sigma(a)=\delta f(a)=0$。矛盾。

若g不是满射，则有 $c\in C$且 $c\overline{\in}\mathrm{im}g$。于是有左 $\mathbf{Z}$-映射τ：

$C/\mathrm{im}g \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$使$\tau(c+\mathrm{im}g)\neq 0$. 命 ρ': $C \longrightarrow C/\mathrm{im}g$ 是自然同态映射，则 $\tau\rho' \in C^*$. 因为 $\rho' g=0$，故 $g^*(\tau\rho')=0$. 从而 $\tau\rho' \in \ker g^*=0$，因此$\tau(c+\mathrm{im}g)=\tau\rho'(c)=0$. 矛盾.

若 $\mathrm{im}f \not\subseteq \ker g$，则$gf\neq 0$. 于是有$a\in A$使 $gf(a)\neq 0$. 故有左$\mathbf{Z}$-映射 φ: $C\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 使 $\varphi(gf(a))\neq 0$. 因此 $\varphi gf\neq 0$. 从而 $f^*g^*(\varphi)\neq 0$，这导致$f^*g^*\neq 0$. 矛盾.

最后，若$\ker g\not\subseteq \mathrm{im}f$，则存在 $b\in\ker g$ 且 $b\bar{\in}\mathrm{im}f$. 于是存在左 $\mathbf{Z}$-映射ψ: $B/\mathrm{im}f\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 使$\psi(b+\mathrm{im}f)\neq 0$. 命 ρ: $B\longrightarrow B/\mathrm{im}f$是自然同态映射，则$\psi\rho\in B^*$，且$\psi\rho(b)=\psi(b+\mathrm{im}f)\neq 0$. 但是$\rho f=0$，故$\psi\rho f=0$，从而 $f^*(\psi\rho)=0$，因此 $\psi\rho\in\ker f^*=\mathrm{im}g^*$. 于是有$\zeta\in C^*$使 $\psi\rho=g^*(\zeta)=\zeta g$. 这样就导致 $\psi\rho(b)=\zeta g(b)=0$. 矛盾.

因此 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0$ 是右R-短正合列.

引理8.3　设B是 (S,R) -双模，且B作为右R-模是平坦模. 若C是内射左S-模，则$\mathrm{Hom}_S(B,C)$是内射左R-模.

证　首先$\mathrm{Hom}_S(B,C)$是左R-模. 为证它是内射模，只要证明函子$\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,C))$ 是正合的.

由定理5.8知函子 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,C))$ 与 $\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R, C)$自然等价. 因为 $\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R, C)=\mathrm{Hom}_S(-,C)\cdot B\otimes_R$，而 $\mathrm{Hom}_S(-,C)$及$B\otimes_R$都是正合的，故易知 $\mathrm{Hom}_S(B\otimes_R, C)$ 是正合的，从而易知$\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,C))$是正合的. 故 $\mathrm{Hom}_S(B,C)$是内射左R-模.

现在我们给出通过一个模的特征标模的内射性来确定此模的平坦性的判断准则. 有下面定理.

定理8.4　右R-模B是平坦模，当且仅当B^*是内射左R-模.

证　若B是平坦模，则因 B 是$(\mathbf{Z},R)$-双模，$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 是内射左$\mathbf{Z}$-模，故据引理8.3知$B^*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$是内射左$R$-模.

反之，设B^*是内射模. 为证B是平坦模，命 f: $X\longrightarrow Y$是任意左R-单射，只要证明$1\otimes f$: $B\otimes_R X\longrightarrow B\otimes_R Y$ 是单射.

因为 $(B\otimes_R, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B,-))$ 是附加对，故有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B\otimes_R X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \\
\downarrow{\scriptstyle (1\otimes f)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B\otimes_R Y, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Hom}_R(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})),
\end{array}$$

其中 τ 及 σ 都是 $\mathbf{Z}$-同构映射。

因为 $B^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$，故此交换图就是下面的交换图：

$$\begin{array}{ccc}
(B\otimes_R X)^* & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Hom}_R(X, B^*) \\
\downarrow{\scriptstyle (1\otimes f)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
(B\otimes_R Y)^* & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Hom}_R(Y, B^*)
\end{array}$$

因为 $\mathrm{Hom}_R(-, B^*)$ 正合，故 f^* 是满射。这样，我们先证得 $(1\otimes f)^*$ 是满射。

为了最终证得 $1\otimes f$ 是单射，我们来证明

$$0 \longrightarrow B\otimes_R X \xrightarrow{1\otimes f} B\otimes_R Y \xrightarrow{\rho} B\otimes_R Y/\mathrm{im}(1\otimes f) \longrightarrow 0 \qquad \text{(甲)}$$

是短正合列，其中 ρ 是自然同态映射。

根据引理8.2，只要证明

$$0 \longrightarrow (B\otimes_R Y/\mathrm{im}(1\otimes f))^* \xrightarrow{\rho^*} (B\otimes_R Y)^* \xrightarrow{(1\otimes f)^*} (B\otimes_R X)^* \longrightarrow 0 \qquad \text{(乙)}$$

是短正合列。

因为 $B\otimes_R X \xrightarrow{1\otimes f} B\otimes_R Y \xrightarrow{\rho} B\otimes_R Y/\mathrm{im}(1\otimes f) \longrightarrow 0$

总是正合列，而 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ 总是左正合的，故先可知

$$0 \longrightarrow (B\otimes_R Y/\mathrm{im}\,(1\otimes f))^* \xrightarrow{\rho^*} (B\otimes_R Y)^* \xrightarrow{(1\otimes f)^*} (B\otimes_R X)^*$$

总是正合列。但刚才已证明了 $(1\otimes f)^*$ 是满射，故（乙）是短正合

列. 从而（甲）是短正合列. 因此$1\otimes f$是单射. 所以B是平坦模.

根据这个定理，我们可以得到模的平坦性的一个判断准则，它和模的内射性的Baer判断准则十分相似. 即有下面定理.

定理6.5　右R-模B是平坦模，当且仅当对于环R的每一个$f.g.$左理想I及$\rho: I\hookrightarrow R$，必定$1\otimes\rho: B\otimes_R I\longrightarrow B\otimes_R R$是单射.

证　若B是平坦模，则对环R的每一个$f.g.$左理想I及$\rho: I\hookrightarrow R$，当然$1\otimes\rho: B\otimes_R I\longrightarrow B\otimes_R R$是单射.

反之，设对于环R的每一个$f.g.$左理想I及$\rho: I\hookrightarrow R$，必定$1\otimes\rho: B\otimes_R I\longrightarrow B\otimes_R R$是单射. 为证$B$是平坦模，只要证明$B^*$是内射模. 为此，设$I$是环$R$的任意一个左理想，并设$f: I\longrightarrow B^*$是任意左$R$-映射，我们要证明可以补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} I & \overset{\rho}{\hookrightarrow} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \varphi} & \\ B^* & & \end{array}$$

其中补出的φ是左R-映射. 而这只要证明

$$\rho^*:\ \mathrm{Hom}_R(R,B^*)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(I,B^*)$$

是满射.

我们先来证明$1\otimes\rho: B\otimes_R I\longrightarrow B\otimes_R R$是单射. 其证明和定理 8.3 的证明类似.

命$\{F_j\mid j\in J\}$是左R-模I的所有$f.g.$子模. 对于$i, j\in J$，规定$i\leqslant j$当且仅当$F_i\subseteq F_j$，则$(J,\leqslant)$成为正向拟序集. 当$i\leqslant j$时，命$\varphi_i^j: F_i\hookrightarrow F_j$，则由例2.15知$\{F_i,\varphi_i^j\}$是$R$-mod中以$J$为指标集的一个正向系统，且当命$\alpha_i: F_i\hookrightarrow I$时，$\{I,\alpha_i\}$是$\{F_i,\varphi_i^j\}$的正向极限. 于是可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim F_i & \overset{\xi}{\dashrightarrow} & I \\ & \nwarrow \overline{\alpha}_i \quad \alpha_i \nearrow & \\ & F_i & \end{array} \qquad \forall i \in J,$$

其中$\overline{\alpha}_i$: $F_i \longrightarrow \varinjlim F_i = (\bigoplus_{i \in J} F_i)/S$是$a_i \longmapsto \lambda_i(a_i) + S$，$\lambda_i$是 F_i到$\bigoplus_{i \in J} F_i$的入射；补出的ξ是左R-同构映射。

由$\xi\overline{\alpha}_i = \alpha_i$可知当$a_i \in F_i$时，有

$$\xi(\lambda_i(a_i) + S) = a_i.$$

对于$i \in J$，命$G_i = R$，并对$i \leqslant j$，命$\psi_i^j = 1_R$: $G_i \longrightarrow G_j$，则易知$\{G_i, \psi_i^j\}$是 R-mod 中以 J 为指标集的一个正向系统。再命$\beta_i = 1_R$: $G_i \longrightarrow R$，则易知 $\{R, \beta_i\}$是$\{G_i, \psi_i^j\}$的正向极限。于是可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim G_i & \overset{\eta}{\dashrightarrow} & R \\ & \nwarrow \overline{\beta}_i \quad \beta_i \nearrow & \\ & G_i & \end{array} \qquad \forall i \in J,$$

其中$\overline{\beta}_i$: $G_i \longrightarrow \varinjlim G_i = (\bigoplus_{i \in J} G_i)/T$是 $c_i \longmapsto \mu_i(c_i) + T$，$\mu_i$ 是G_i 到$\bigoplus_{i \in J} G_i$的入射；补出的η是左R-同构映射。

由$\eta\overline{\beta}_i = \beta_i$可知当 $c_i \in G_i$时，有

$$\eta(\mu_i(c_i) + T) = c_i.$$

对于每一个$i \in J$，命ζ_i: $F_i \hookrightarrow G_i = R$，则易知$\zeta$是$\{F_i, \varphi_i^j\}$到$\{G_i, \psi_i^j\}$的一个自然变换，故有左$R$-映射。$\overrightarrow{\zeta}$: $\varinjlim F_i \longrightarrow \varinjlim G_i$。当$a_i \in F_i$时，有

$$\overrightarrow{\zeta}(\lambda_i(a_i) + S) = \mu_i\zeta_i(a_i) + T.$$

于是先可得到交换图：

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_R(\varinjlim F_i) & \xrightarrow{1\otimes\vec{\xi}} & B\otimes_R(\varinjlim G_i) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\xi} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\eta} \\ B\otimes_R I & \xrightarrow{1\otimes\rho} & B\otimes_R R \end{array},$$

这是因为对于$a_i\in F_i$，有

$$(1\otimes\rho)(1\otimes\xi)(b\otimes(\lambda_i(a_i)+S))$$
$$=(1\otimes\rho)(b\otimes a_i)=b\otimes a_i,$$

$$(1\otimes\eta)(1\otimes\vec{\xi})(b\otimes(\lambda_i(a_i)+S))$$
$$=(1\otimes\eta)(b\otimes(\mu_i\xi_i(a_i)+T))=b\otimes a_i.$$

因为ξ是左R-同构映射，由张量积的泛性质容易知道$1\otimes\xi$是$\mathbf{Z}$-同构映射。同理，$1\otimes\eta$ 是 $\mathbf{Z}$-同构映射。故 $1\otimes\rho$ 是单射，当且仅当$1\otimes\vec{\xi}$是单射。

因为$B\otimes_R$保持正向极限，故可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_R(\varinjlim F_i) & \overset{\sigma_F}{\dashrightarrow} & \varinjlim(B\otimes_R F_i) \\ & {\scriptstyle 1\otimes\overline{\alpha}_i}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \gamma_i} & \\ & B\otimes_R F_i & \end{array} \qquad \forall i\in J,$$

这里γ_i: $B\otimes_R F_i\longrightarrow(\bigoplus_{i\in J}(B\otimes_R F_i))/W$是 $z_i\longmapsto\varepsilon_i(z_i)+W$，$\varepsilon_i$ 是$B\otimes_R F_i$到 $\bigoplus_{i\in J}(B\otimes_R F_i)$的入射；补出的$\sigma_F$是$\mathbf{Z}$-同构映射。

由$\sigma_F(1\otimes\overline{\alpha}_i)=\gamma_i$可知当$a_i\in F_i$时，有

$$\sigma_F(b\otimes(\lambda_i(a_i)+S))=\varepsilon_i(b\otimes a_i)+W.$$

同样，有 $\mathbf{Z}$-同构映射σ_G: $B\otimes_R(\varinjlim G_i)\longrightarrow\varinjlim(B\otimes_R G_i)$，且当$c_i\in G_i$时，有

$$\sigma_G(b\otimes(\mu_i(c_i)+T))=\delta_i(b\otimes c_i)+V,$$

其中δ_i是$B\otimes_R G_i$到 $\bigoplus_{i\in J}(B\otimes_R G_i)$的入射，$\varinjlim(B\otimes_R G_i)=\bigoplus_{i\in J}(B\otimes_R G_i)/V$。

由于两个共变函子的积是共变函子，故 $\{B\otimes_R F_i, 1\otimes\varphi_i^j\}$ 及 $\{B\otimes_R G_i, 1\otimes\psi_i^j\}$ 是 $\mathbf{Z}$-mod中以 J 为指标集的两个正向系统。对于每一个 $i\in J$，命 $t_i=1\otimes\rho_i$: $B\otimes_R F_i\longrightarrow B\otimes_R G_i$，其中 ρ_i: $F_i\hookrightarrow R=G_i$，则易知 t 是 $\{B\otimes_R F_i, 1\otimes\varphi_i^j\}$ 到 $\{B\otimes_R G_i, 1\otimes\psi_i^j\}$ 的一个自然变换。因为 F_i 当然是环 R 的 $f.g.$ 左理想，故每一个 t_i 是单射。仿照定理8.3的证明容易证得 $\vec{t}$: $\varinjlim(B\otimes_R F_i)\longrightarrow\varinjlim(B\otimes_R G_i)$ 是单射。

直接计算即知下图交换：

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_R(\varinjlim F_i) & \xrightarrow{1\otimes\vec{\zeta}} & B\otimes_R(\varinjlim G_i) \\ \downarrow{\sigma_F} & & \downarrow{\sigma_G} \\ \varinjlim(B\otimes_R F_i) & \xrightarrow{\vec{t}} & \varinjlim(B\otimes_R G_i). \end{array}$$

因此 $1\otimes\vec{\zeta}$ 是单射。从而证明了 $1\otimes\rho$ 是单射。

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ 是正合的，故

$(1\otimes\rho)^*$: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B\otimes_R R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B\otimes_R I, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$

是满射。

最后，由于 $(B\otimes_R, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B, -))$ 是附加对，就有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B\otimes_R R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Hom}_R(R, B^*) \\ \downarrow{(1\otimes\rho)^*} & & \downarrow{\rho^*} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(B\otimes_R I, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\tau'} & \mathrm{Hom}_R(I, B^*) \end{array},$$

其中 τ 及 τ' 都是 $\mathbf{Z}$-同构映射。因此 ρ^* 是满射。到此，我们证明了 B^* 是内射左 R-模。故 B 是平坦右 R-模。

8.6 平坦模的刻划

本段将证明三个定理，它们都给出了平坦模的刻划。我们先证明下面引理。

引理8.4　设B是右R-模，I是环R的左理想，则存在唯一的$\mathbf{Z}$-满射φ: $B\otimes_R I\longrightarrow BI$满足$\varphi(b\otimes x)=bx$，$\forall b\in B$，$x\in I$。又，若$B$是平坦模，则$\varphi$是$\mathbf{Z}$-同构映射。

证　命$f: B\times I\longrightarrow BI$是$(b,x)\longmapsto bx$，则易知$f$是$R$-双加性函数。故可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} B\times I & \xrightarrow{h} & B\otimes_R I \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varphi} & \\ & BI & \end{array}$$

其中$h(b,x)=b\otimes x$，补出的φ是$\mathbf{Z}$-映射。易知φ满足$\varphi(b\otimes x)=bx$，从而又可知φ是满射，故这样的φ存在。唯一性是明显的。

若B是平坦模，则对于$i: I\hookrightarrow R$，当然$1\otimes i: B\otimes_R I\longrightarrow B\otimes_R R$是单射。由定理1.20知存在$\mathbf{Z}$-同构映射$\psi$: $B\otimes_R R\longrightarrow B$满足$\psi(b\otimes 1)=b$。于是当$b\in B$，$x\in I$时，有$\psi(1\otimes i)(b\otimes x)=bx=\varphi(b\otimes x)$，因此$\varphi=\psi(1\otimes i)$。由于$\psi$及$1\otimes i$都是单射，故$\varphi$是单射。从而$\varphi$是$\mathbf{Z}$-同构映射。

定理8.6　设B是右R-模，且有一个右R-短正合列

$$0\longrightarrow K\overset{i}{\hookrightarrow} F\overset{g}{\longrightarrow} B\longrightarrow 0$$

其中F是平坦模。则以下条件等价：

(i) B是平坦模；

(ii) 对于环R的每一个左理想I，恒有$K\cap FI=KI$；

(iii) 对于环R的每一个f.g.左理想I，恒有$K\cap FI=KI$。

证　设I是环R的任意一个左理想。首先明显知道，恒有$KI\subseteq K\cap FI$。

其次，根据引理8.4知存在唯一的$\mathbf{Z}$-满射$\theta: B\otimes_R I\longrightarrow BI$

满足$\theta(x\otimes y)=xy$，$\forall x\in B, y\in I$.我们证明，θ是$\mathbf{Z}$-同构映射，当且仅当$K\cap FI=KI$。

因为$\otimes_R I$是右正合的，故有正合列

$$K\otimes_R I\xrightarrow{i\otimes 1}F\otimes_R I\xrightarrow{g\otimes 1}B\otimes_R I\longrightarrow 0.$$

不难证明$FI/KI\cong B\otimes_R I$.事实上，因为F是平坦模，故由引理8.4知存在唯一的$\mathbf{Z}$-同构映射$\psi: F\otimes_R I\longrightarrow FI$满足$\psi(x\otimes y)=xy$，$\forall x\in F$，$y\in I$。于是有$\mathbf{Z}$-满射$(g\otimes 1)\psi^{-1}$: $FI\longrightarrow B\otimes_R I$.因为对于任何$S$-映射序列$X\overset{\xi}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow}Y\xrightarrow{\eta}Z$，恒有$\ker(\eta\xi)=\xi^{-1}(\ker\eta)$，故$\ker((g\otimes 1)\psi^{-1})=\psi(\ker(g\otimes 1))=KI$.因此有$\mathbf{Z}$-同构映射

$$\gamma: (FI)/(KI)\longrightarrow B\otimes_R I,$$

且易知$\gamma(xy+KI)=g(x)\otimes y$，$\forall x\in F, y\in I$.

又有$BI\cong FI/(K\cap FI)$.事实上，当$x\in F, y\in I$时，$g(xy)=g(x)y\in BI$，故$g(FI)\subseteq BI$。反之，若$x\in B, y\in I$，则因g是满射，故有$x'\in F$使$x=g(x')$，从而$xy=g(x'y)\in g(FI)$，因此$g(FI)=BI$。命g'是g在FI上的限制，则有$\mathbf{Z}$-满射g': $FI\longrightarrow BI$，且立刻看出$\ker g'=K\cap(FI)$，故有$\mathbf{Z}$-同构映射

$$\delta: BI\longrightarrow(FI)/K\cap(FI),$$

且易知$\delta(g(x)y)=xy+K\cap FI$，$\forall x\in F, y\in I$.

于是得到$\mathbf{Z}$-映射

$$\sigma=\delta\theta\gamma: FI/KI\longrightarrow FI/K\cap FI,$$

且易知$\sigma(xy+KI)=xy+(K\cap FI)$，$\forall x\in F, y\in I$.

因为恒有$KI\subseteq K\cap FI$，故知σ是$\mathbf{Z}$-同构映射，当且仅当$KI=K\cap FI$。但σ是$\mathbf{Z}$-同构映射，当且仅当θ是$\mathbf{Z}$-同构映射，因此θ是$\mathbf{Z}$-同构映射当且仅当$K\cap FI=KI$.

现在容易完成定理的证明。

(i)$\Longrightarrow$(ii)。设B是平坦模。若I是环R的任意一个左理想，$\theta: B\otimes_R I\longrightarrow BI$是引理8.4确定的$\mathbf{Z}$-满射，则由引理8.4知

θ 是 $\mathbf{Z}$-同构映射. 故据刚才证明的, 可知 $K\cap FI=KI$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 这是明显的.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 设 I 是环 R 的任意一个 $f.g.$ 左理想, 并设 $\rho: I\hookrightarrow R$. 因为 $K\cap FI=KI$, 故由引理8.4确定的 $\theta: B\otimes_R I\longrightarrow BI$ 是 $\mathbf{Z}$-同构映射. 又由定理1.20知有 $\mathbf{Z}$-同构映射 $\tau: B\otimes_R R\longrightarrow B$ 满足 $\tau(x\otimes y)=xy$, $\forall x\in B, y\in R$. 故立刻看出有交换图:

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_R I & \xrightarrow{1\otimes\rho} & B\otimes_R R \\ \theta\downarrow & & \downarrow\tau \\ BI & \xhookrightarrow{i} & B \end{array}$$

因此 $1\otimes\rho$ 是单射. 故由定理8.5知 B 是平坦模.

定理8.7　设 B 是右 R-模, 并设有右 R-短正合列

$$0\longrightarrow K\xhookrightarrow{i} F\xrightarrow{g} B\longrightarrow 0$$

其中 F 是自由模, 并设 $\{x_j\mid j\in J\}$ 是 F 的一个基.

当 $v=x_{j_1}r_1+\cdots+x_{j_t}r_t\in F$ 时, $r_1,\cdots,r_t$ 生成的环 R 的左理想记成 $I(v)$. 则 B 是平坦模, 当且仅当对于每一个 $v\in K$, 都有 $v\in K\cdot I(v)$.

证　设 B 是平坦模, 则当 $v=x_{j_1}r_1+\cdots+x_{j_t}r_t\in K$ 时, $K\cap F\cdot I(v)=K\cdot I(v)$. 由于 $r_1,\cdots,r_t\in I(v)$, 故 $v\in F\cdot I(v)$, 从而 $v\in K\cap F\cdot I(v)=K\cdot I(v)$.

反之, 设对于每一个 $v\in K$ 都有 $v\in K\cdot I(v)$. 若 I 是环 R 的任意一个左理想, 则当然首先有 $KI\subseteq K\cap FI$, 而当 $v\in K\cap FI$ 时, 易知 $v=x_{j_1}s_1+\cdots+x_{j_t}s_t$, 其中 $s_1,\cdots,s_t\in I$. 故 $I(v)\subseteq I$, 从而 $v\in KI$, 故 $K\cap FI=KI$. 因此 B 是平坦模.

定理8.8　(Villamayor)　设 B 是右 R-模, 并设有右 R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \overset{i}{\hookrightarrow} F \overset{g}{\longrightarrow} B \longrightarrow 0$$

其中F是自由模. 则以下条件等价:

(i) B是平坦模;

(ii) 对于每一个$v\in K$, 恒存在右R-映射θ: $F\longrightarrow K$满足$\theta(v)=v$;

(iii) 对于任何$v_1,\cdots,v_n\in K$, 恒存在右R-映射 θ: $F\longrightarrow K$满足$\theta(v_i)=v_i$, $i=1,\cdots,n$.

证 先设$\{x_j\,|\,j\in J\}$是F的一个基.

(i)$\Longrightarrow$(ii). 设B 是平坦模, 则当 $v=x_{j_1}r_1+\cdots+x_{j_t}r_t\in K$时, 必有$v\in K\cdot I(v)$. 故易知可设$v=y_1r_1+\cdots+y_tr_t$, 其中$y_i\in K$, $i=1,\cdots,t$. 现在命φ: $\{x_j\,|\,j\in J\}\longrightarrow K$是$x_{j_i}\longmapsto y_i$, $i=1,\cdots,t$, 其余$x_j\longmapsto 0$, 则存在右R-映射θ: $F\longrightarrow K$满足$\theta(x_{j_i})=y_i$, $i=1,\cdots,t$. 故$\theta(v)=v$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). 当$n=1$ 时已经成立, 设对$n-1$成立. 现在设$v_1,\cdots,v_n\in K$, 则对$v_n\in K$, 存在右R-映射 θ_n: $F\longrightarrow K$满足$\theta_n(v_n)=v_n$. 命

$$v'_i=v_i-\theta_n(v_i),\quad i=1,\cdots,n-1,$$

则据归纳假定知存在右R-映射 θ': $F\longrightarrow K$ 满足 $\theta'(v'_i)=v'_i$, $i=1,\cdots,n-1$.

现在命

$$\theta:\ F\longrightarrow K$$
$$w\longmapsto\theta_n(w)+\theta'(w-\theta_n(w)),$$

则易知θ是右R-映射, 且满足$\theta(v_i)=v_i$, $i=1,\cdots,n$.

(iii)$\Longrightarrow$(i). 当 $v=x_{j_1}r_1+\cdots+x_{j_t}r_t\in K$ 时, 由于存在右R-映射θ: $F\longrightarrow K$满足$\theta(v)=v$, 故 $v=\theta(x_{j_1})r_1+\cdots+\theta(x_{j_t})r_t\in K\cdot I(v)$. 因此$B$是平坦模.

§9 有限相关模

本节介绍一种重要的$f.g.$模，即有限相关模。

9.1 有限相关模的定义

对于任意一个$f.g.$右R-模A，恒存在一个$f.g.$自由右R-模F及一个右R-满射φ：$F \longrightarrow A$。但是我们不能断言 $\ker\varphi$一定是$f.g.$模。自然引起人们考虑这样的问题：对于什么样的 $f.g.$右R-模A，当$\varphi: M \longrightarrow A$是右$R$-满射且$M$是$f.g.$模时，必定$\ker\varphi$是$f.g.$模？

我们引入下面定义。

定义9.1 设B是右R-模。若存在一个左R-正合列

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0,$$

其中F_1及F_0都是$f.g.$自由右R-模，则称B是一个有限相关模。

由定义可知，有限相关模必是$f.g.$模。

9.2 模是有限相关模的条件

定理9.1 右R-模B是有限相关模，当且仅当存在一个右R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0,$$

其中F是$f.g.$自由模，K是$f.g.$模。

证 若B是有限相关模，则存在一个右R-正合列

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

其中F_1及F_0都是$f.g.$自由模。

命$K = \mathrm{im}\varphi$，则K是$f.g.$模，且有右R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \overset{i}{\hookrightarrow} F_0 \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

反之，设存在一个右R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

其中F是$f.g.$自由模，K是$f.g.$模。

这时有一个$f.g.$自由右R-模F_1及一个右R-满射$\zeta: F_1 \longrightarrow K$。于是由交换图

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\varphi\zeta} & F \\ \zeta\downarrow & \nearrow_{\varphi} & \\ K & & \end{array}$$

及ζ是满射，知$\mathrm{im}\varphi\zeta = \mathrm{im}\varphi$。故有右$R$-正合列

$$F_1 \xrightarrow{\varphi\zeta} F \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

因此B是有限相关模。

容易知道有下面推论。

推论9.1 右R-模B是有限相关模，当且仅当存在一个右R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \overset{i}{\hookrightarrow} F \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

其中F是$f.g.$自由模，K是$f.g.$模。

9.3 有限相关平坦模与$f.g.$投射模的一致性

定理9.2 右R-模B是$f.g.$投射模，当且仅当B是有限相关平坦模。

证 设B是$f.g.$投射模。首先总有一个右R-短正合列

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$$

其中F是$f.g.$自由模.

因为B是投射模，故此短正合列可裂. 因此$F=\ker\varphi\oplus B'$，其中$B'\cong B$. 于是$\ker\varphi$是$f.g.$模. 所以B是有限相关模，从而是有限相关平坦模.

反之，设B是有限相关平坦模，则由推论 9.1 知，有一个右R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0 \qquad (甲)$$

其中F是$f.g.$自由模，K是$f.g.$模.

设K由$v_1,\cdots,v_n$生成. 则由定理8.8知有一个右R-映射θ: $F\longrightarrow K$满足 $\theta(v_i)=v_i, i=1,\cdots,n$. 故 $\theta i=1$. 因此（甲）可裂，从而$F=K\oplus B'$，其中$B'\cong B$. 所以B是投射模，从而是$f.g.$投射模.

9.4　Schanuel 引理

定理9.3（Schanuel 引理）　设

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{g_1} B \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{f_2} P_2 \xrightarrow{g_2} B \longrightarrow 0$$

是两个右R-短正合列，且其中P_1及P_2都是投射右R-模，则有

$$K_1\oplus P_2\cong K_2\oplus P_1.$$

证　只要证明有右R-可裂短正合列

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1\oplus K_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$$

即可.

为此，考虑图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 & \xrightarrow{g_1} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2 & \xrightarrow{f_2} & P_2 & \xrightarrow{g_2} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因为P_1是投射模，g_2是满射，故知可补成图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 & \xrightarrow{g_1} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2 & \xrightarrow{f_2} & P_2 & \xrightarrow{g_2} & B & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中补出的α是右R-映射且使右边正方形是交换图。

我们要补出右R-映射 $\beta: K_1 \longrightarrow K_2$ 使上图中补出的左边正方形是交换图。

因为$g_2(\alpha f_1) = (g_2\alpha) f_1 = g_1 f_1 = 0$，故 $\mathrm{im}\alpha f_1 \subseteq \ker g_2 = \mathrm{im} f_2$ 因此当$k_1 \in K_1$时，必存在唯一的 $k_2 \in K_2$ 使 $\alpha f_1(k_1) = f_2(k_2)$。命$\beta: K_1 \longrightarrow K_2$是$k_1 \longmapsto k_2$，易知$\beta$是右$R$-映射。于是有图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 & \xrightarrow{g_1} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2 & \xrightarrow{f_2} & P_2 & \xrightarrow{g_2} & B & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

并可知其中左、右两个正方形都是交换图。

现在命

$$\theta: \ K_1 \longrightarrow P_1 \oplus K_2$$
$$k_1 \longmapsto (f_1(k_1), \beta(k_1))$$

则易知θ是右R-映射，且由f_1是单射已可知θ是单射。

再命

$$\psi: \ P_1 \oplus K_2 \longrightarrow P_2$$
$$(p_1, k_2) \longmapsto \alpha(p_1) - f_2(k_2)$$

则易知ψ是右R-映射。不难证明ψ是满射。事实上，当$p_2 \in P_2$时，对于$g_2(p_2) \in B$，有 $p_1 \in P_1$使$g_2(p_2) = g_1(p_1)$。而 $g_1 = g_2\alpha$，故

$g_2(\alpha(p_1)-p_2)=0$，从而 $\alpha(p_1)-p_2\in\ker g_2=\mathrm{im}f_2$。因此有 $k_2\in K_2$ 使 $\alpha(p_1)-p_2=f_2(k_2)$。于是立刻知道 $\psi(p_1,k_2)=p_2$，故 ψ是满射。

现在容易证明

$$0\longrightarrow K_1\xrightarrow{\theta}P_1\oplus K_2\xrightarrow{\psi}P_2\longrightarrow 0 \qquad (乙)$$

是短正合列．为此只要再证明 $\mathrm{im}\theta=\ker\psi$。

当$k_1\in K_1$时，$\psi\theta(k_1)=\psi(f_1(k_1),\beta(k_1))=\alpha f_1(k_1)-f_2\beta(k_1)=0$，故$\mathrm{im}\theta\subseteq\ker\psi$，反之，当$(p_1,k_2)\in\ker\psi$时，$\alpha(p_1)-f_2(k_2)=0$，故$g_2\alpha(p_1)-g_2f_2(k_2)=0$，从而 $g_2\alpha(p_1)=0$。由 $g_2\alpha=g_1$ 知 $g_1(p_1)=0$，故$p_1\in\ker g_1=\mathrm{im}f_1$。因此有$k_1\in K_1$使$p_1=f_1(k_1)$．于是 $\alpha f_1(k_1)=f_2(k_2)$．因此 $f_2\beta(k_1)=f_2(k_2)$，故 $k_2=\beta(k_1)$。这样，$\theta(k_1)=(f_1(k_1),\beta(k_1))=(p_1,k_2)$．故$\ker\psi\subseteq\mathrm{im}\theta$。到此就证明了（乙）是短正合列。

因为 P_2 是投射模，故（乙）可裂，从而就有 $P_1\oplus K_2\cong K_1\oplus P_2$。

现在我们给出有限相关模的一种刻划，即有下面定理，它回答了本节开始时提出的问题。

定理9.4　设B是$f.g.$右R-模，则以下条件等价：

(i) B是有限相关模；

(ii) 对于每一个右R-满射$\varphi: F\longrightarrow B$，其中$F$是$f.g.$自由右$R$-模，必定$\ker\varphi$是$f.g.$模；

(iii) 对于每一个右R-满射φ: $M\longrightarrow B$，其中M是$f.g.$右R-模，必定$\ker\varphi$是$f.g.$模。

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)。设φ: $F\longrightarrow B$是一个右R-满射，其中F是一个$f.g.$自由右R-模．则有右R-短正合列：

$$0\longrightarrow \ker\varphi \xhookrightarrow{i} F\xrightarrow{\varphi}B\longrightarrow 0$$

因为B是有限相关模，故有一个右R-短正合列：

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varphi} F_1 \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

其中F_1是$f.g.$自由右R-模，K是$f.g.$右R-模。

于是由 Schanuel 引理知$K \oplus F \cong \ker\varphi \oplus F_1$。

因为K及F都是$f.g.$模，故$K \oplus F$是$f.g.$模，从而$\ker\varphi$是$f.g.$模。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)。设$\varphi: M \longrightarrow B$是一个右$R$-满射，其中$M$是一个$f.g.$右$R$-模。

因为M是$f.g.$右R-模，故有一个$f.g.$自由右R-模F及一个右R-满射 $\zeta: F \longrightarrow M$，于是有右$R$-满射 $\varphi\zeta: F \longrightarrow B$。因此$\ker(\varphi\zeta)$是$f.g.$模。

现在考虑图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(\varphi\zeta) & \xhookrightarrow{i} & F & \xrightarrow{\varphi\zeta} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \zeta\downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & \ker\varphi & \xhookrightarrow{j} & M & \xrightarrow{\varphi} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中上、下两行都是右R-短正合列，且右边正方形是交换图。

可知存在右R-映射 $\alpha: \ker(\varphi\zeta) \longrightarrow \ker\varphi$ 使得上图中补出的左边正方形是交换图。于是由五引理（引理1.3）知α是满射。故$\ker\varphi$是$f.g.$模。

(iii)$\Longrightarrow$(i)。因为B是$f.g.$右R-模，故存在一个$f.g.$自由右R-模F及一个右R-满射$\varphi: F \longrightarrow B$，于是$\ker\varphi$是$f.g.$模。因此存在一个右$R$-短正合列

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \xhookrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$$

其中F是$f.g.$自由模，$\ker\varphi$是$f.g.$模。故B是有限相关模。

的确存在$f.g.$模，它不是有限相关模。有下面例子。

例9.1　设K是域。命$R=K[x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots]$，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是$K$上无关未定元。若$I$是$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$生成的环$R$的理想，则$R/I$是f.g.右$R$-模，但不是有限相关模。

证　首先有右R-满射$\rho: R\longrightarrow R/I$，这里$\rho$是自然同态映射。

若R/I是有限相关模，则根据定理9.4，I将是f.g.右R-模。但明显知I不是f.g.右R-模，故R/I是f.g.模而不是有限相关模。

虽然f.g.模未必是有限相关模，但是我们有下面定理。

定理9.5　f.g.模是有限相关模的正向极限。

证　设M是f.g.右R-模，则首先存在一个右R-短正合列

$$0\longrightarrow K\overset{\psi}{\hookrightarrow} F\overset{g}{\longrightarrow} M\longrightarrow 0$$

其中F是一个f.g.自由右R-模。

命$\{H_i\mid i\in J\}$是K的所有f.g.子模，则对每一个$i\in J$，有右R-短正合列

$$0\longrightarrow H_i\overset{\xi}{\hookrightarrow} F\overset{\eta}{\longrightarrow} F/H_i\longrightarrow 0$$

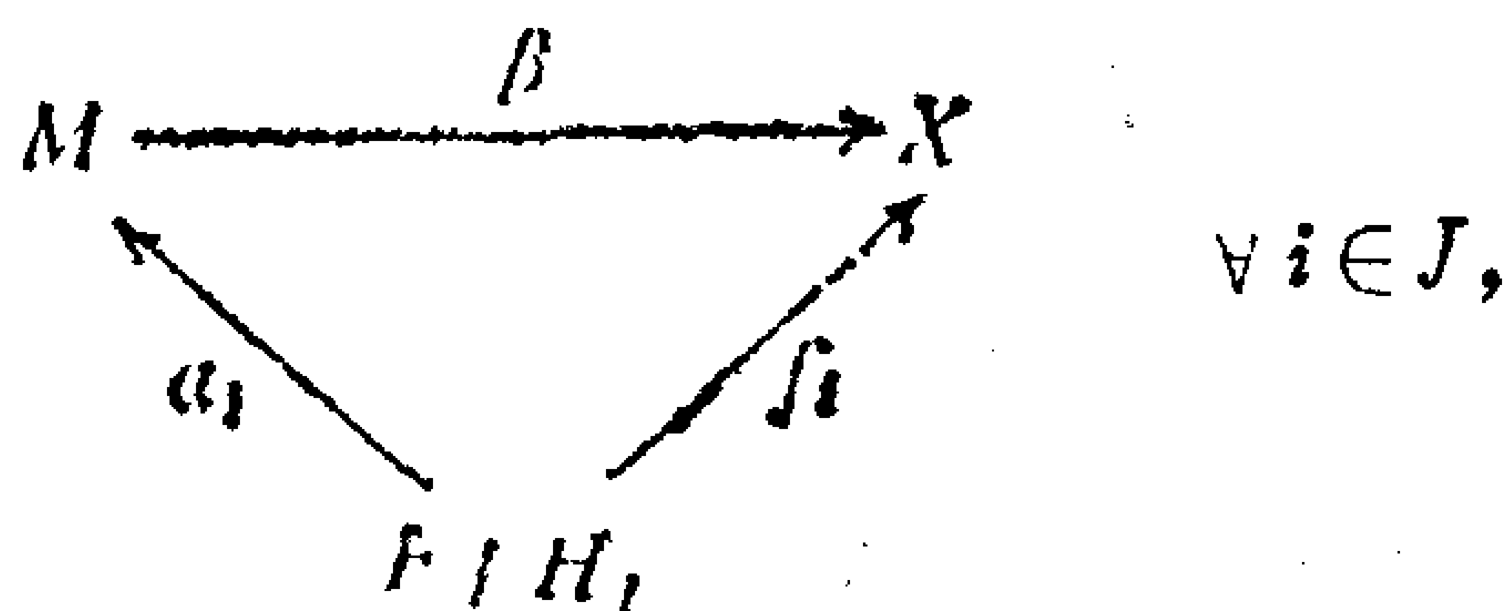
其中η是自然同态映射。因此每一个F/H_i都是有限相关模。

对于$i,j\in J$，规定$i\leqslant j$当且仅当$H_i\subseteq H_j$，则$(J,\leqslant)$成为正向拟序集。当$i\leqslant j$时，命$\varphi_j^i: F/H_i\longrightarrow F/H_j$是$x+H_i\longmapsto x+H_j$，则易知$\{F/H_i,\varphi_j^i\}$是mod-$R$中以$J$为指标集的一个正向系统。

对于每一个$i\in J$，命$\alpha_i: F/H_i\longrightarrow M$是$x+H_i\longmapsto g(x)$，则易知$\alpha_i$是右$R$-映射，且满足$\alpha_j\varphi_j^i=\alpha_i$，$\forall\, i\leqslant j$。我们证明$\{M,\alpha_i\}$是$\{F/H_i,\varphi_j^i\}$的正向极限。

为此，设X是任意右R-模，$\{f_i: F/H_i\longrightarrow X\mid i\in J\}$是一集

右R-映射，满足$f_j\varphi_i^j=f_i$，$\forall i\leqslant j$。当$y\in M$时，由于g是满射，故总有$x\in F$使$y=g(x)$，利用$(J,\leqslant)$是正向拟序集，容易证明$f_i(x+H_i)=f_j(x+H_j)$，$\forall i,j\in J$。又，当$g(x)=g(x')=y$时，也易知$f_i(x+H_i)=f_i(x'+H_i)$。现在命$\beta: M\longrightarrow X$是$y\longmapsto f_i(x+H_i)$，则易知$\beta$是右$R$-映射，且使下图交换：



$\forall i\in J$，

又易知能使上图交换的右R-映射β唯一。故$\{M,\alpha_i\}$是$\{F/H_i,\varphi_i^j\}$的正向极限：$M=\varinjlim F/H_i$。因此M是有限相关模的正向极限。

习 题 三

(1) 设R是交换环，并设P，Q都是投射R-模。证明：$P\otimes_R Q$是投射R-模。

(2) 设R及S是环，且S是(S,R)-双模。证明：若P是投射左R-模，则$S\otimes_R P$是投射左S-模。

(3) 设P是投射左R-模，I是环R的理想。证明：$P/(IP)$是投射左R/I-模，其中$IP=\{\Sigma r_i p_i \mid r_i\in I, p_i\in P\}$。

(4) 设P是投射左R-模，证明：

(i) 若P是$f.g.$左R-模，则存在$f.g.$左R-模Q使$P\oplus Q$是自由左R-模；

(ii) 恒存在自由左R-模Q使$P\oplus Q$是自由左R-模。

(5) 设e是环R中一个幂等元：$e^2=e$。证明：Re是投射左

R-模。

(6) 设R是非零交换整环，$K\supseteq R$是R的分式域，且$K\neq R$。证明：K不是投射左R-模。

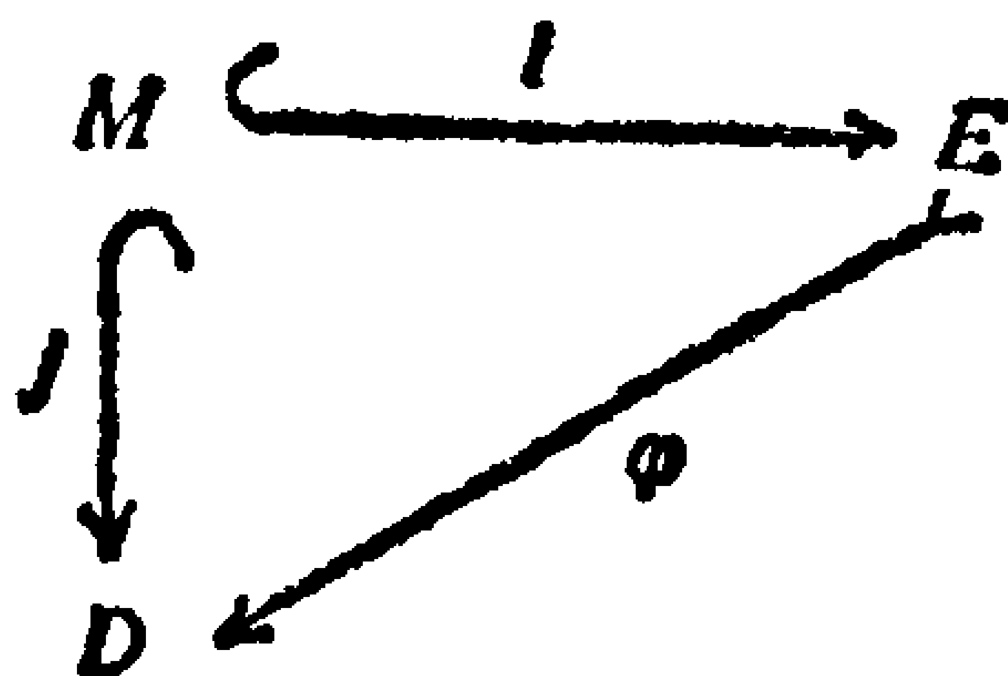
(7) 设R是交换整环，M是非挠R-模。证明：M是内射R-模，当且仅当M是可除R-模。

(8) 设Q是交换整环R的分式域，M是非挠R-模。证明：若M是可除R-模，则M可以成为域Q上向量空间。

(9) 设R是左主理想整环，即R无零因子且每一个左理想是主左理想。证明：每一个可除左R-模是内射左R-模。

(10) 设M是左R-模E的一个子模。若$\{E_i|i\in I\}$是E的一集子模，且对集的"$\subseteq$"成为有序集。证明：若每一个E_i都是M的本质扩张，则$\bigcup_{i\in I}E_i$是M的一个本质扩张。

(11) 设E是一个内射左R-模，M是E的一个子模。证明：E是M的一个内射包络，当且仅当对于每一个包含M的内射左R-模D，恒存在左R-单射φ：$E\rightarrowtail D$使下图交换：



(12) 设$P_1\xrightarrow{e_1}M$及$P_2\xrightarrow{e_1}M$都是左R-模M的投射覆盖，证明：$P_1\cong P_2$。

(13) 设$P\xrightarrow{\varphi}M$是左R-模M的一个投射覆盖，Q是投射左R-模，且$Q\xrightarrow{\psi}M$是左R-满射，于是存在左R-映射σ：$Q\longrightarrow P$使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & & \downarrow \psi \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

证明：σ是满射，且 $Q=\operatorname{im}\tau\oplus\ker\sigma$，其中左$R$-映射 τ：$P\longrightarrow Q$ 满足 $\sigma\tau=1$。

(14) 如题(13)，证明：

$$Q=P'\oplus P'',$$

其中P'及P''满足：

$$P'\cong P,\quad P''\subseteq\ker\psi.$$

并证明：$P'\xrightarrow{\psi 1_{P'}}M$是$M$的一个投射覆盖。

(15) 命 φ: $\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$ 是偶数$\longmapsto 0$，奇数$\longmapsto 1$。证明：$\mathbf{Z}\xrightarrow{\varphi}\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$不是$\mathbf{Z}$模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$的投射覆盖。

(16) 证明：$\mathbf{Z}$-模$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$没有投射覆盖。

(17) 证明：$\mathbf{Z}/(2\mathbf{Z})$不是平坦$\mathbf{Z}$-模。

(18) 证明：右R-模A是平坦模，当且仅当在A中 $\Sigma a_i r_i=0$（其中$a_i\in A, r_i\in R$）时，恒存在$b_j\in A$及$s_{ij}\in R$使得

$$a_i=\sum_j b_j s_{ij},\qquad \sum_i s_{ij} r_i=0$$

(19) 叙述并证明 Schanuel 引理的对偶（关于内射模）。

(20) 设已给两个左R-正合列：

$$0\longrightarrow K\longrightarrow P_n\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\longrightarrow B\longrightarrow 0,$$

$$0\longrightarrow L\longrightarrow Q_n\longrightarrow Q_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow Q_0\longrightarrow B\longrightarrow 0,$$

其中诸P_i及Q_i都是投射左R-模。证明：

$$K\oplus Q_n\oplus P_{n-1}\oplus\cdots\cong L\oplus P_n\oplus Q_{n-1}\oplus\cdots.$$

第四章　几类常见的环

当我们对环R附加一些条件时，结果当然会对模范畴R-mod产生一定的影响. 反之，当对R-mod附加一些条件时，则会对环R产生一定的影响. 现代环论主要研究环及该环上模范畴之间的关系，也即所谓环的同调分类. 本章将研究几类常见的环和相应的模范畴之间的关系以初窥同调代数在环的研究中的作用.

本书并非环论专著，故此处只提出几类常见的环，而且对于所提到的环也并不作全面的论述.

§10　Noether 环

非交换环（即乘法未必满足交换律的环）的研究开端于域上有限维结合代数的研究. 无视向量空间的结构，就导致非交换环. Emmy Noether 用极大及极小条件，或即链条件替代空间维数的有限性条件，由此引出Noether 环及Artin 环的概念.

10.1 Noether 模及 Artin 模

定义10.1　设R是环，M是左R-模. 若每一个由M的子模M_i组成的升链

$$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots\subseteq M_n\subseteq\cdots$$

必中断，即恒存在正整数k使

$$M_k=M_{k+j},\quad \forall \text{正整数} j,$$

则称M是Noether 模，也称M是有升链条件的模或 有 A.C.C.

的模。

定义10.2 设R是环，M是左R-模。若每一个由M的子模M_i组成的降链

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

必中断，即恒存在正整数k使

$$M_k = M_{k+j}, \quad \forall \text{ 正整数} j,$$

则称M是 Artin 模，也称M是有降链条件的模或有 D.C.C. 的模。

类似地对右R-模定义Noether模及Artin模。

Noether模也可以按另外的方式来定义，即有下面定理。

定理10.1 设M是左R-模，则以下条件等价：

(i) M是Noether模；

(ii) M的子模作成的任一非空集对于集的“$\subseteq$”有极大元素；

(iii) M的每一个子模都是$f.g.$的。

证 (i)$\Rightarrow$(ii)。设$\{M_i | i \in I\}$是M的任意一集子模，非空。则$\{M_i | i \in I\}$对集的“$\subseteq$”成为偏序集。若$\{M_i | i \in I\}$没有极大元素，则当任意取定一个M_{i_1}时，恒有M_{i_2}使

$$M_{i_1} \subset M_{i_2}$$

同样，对于M_{i_2}，又有M_{i_3}使

$$M_{i_2} \subset M_{i_3}$$

如此继续下去，将导致由M的子模组成的一个升链

$$M_{i_1} \subset M_{i_2} \subset \cdots \subset M_{i_n} \subset \cdots,$$

它不中断。这与“M是Noether模”相矛盾。

(ii)$\Rightarrow$(iii)。若M有一个子模N不是$f.g.$的，则当取一个$x_1 \in N$时，就有

$$Rx_1 \subset N,$$

于是又有$x_2 \in N$且$x_2 \overline{\in} Rx_1$，从而

$$Rx_1 \subset Rx_1 + Rx_2 \subset N,$$

如此继续下去，将导致M的一集子模$\{N_i | i=1,2,\cdots\}$，其中$N_i=\sum_{k=1}^{i} Rx_k$，明显知$\{N_i | i=1,2,\cdots\}$没有极大元素．矛盾．

(iii)⇒(i)． 任给一个由M的子模组成的升链

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots,$$

则$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$是$M$的子模，从而是$f.g.$的．

设$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \langle x_1, \cdots x_n \rangle$，则存在正整数$k$使

$$x_i \in M_k, \quad i=1,\cdots,n$$

从而有

$$M_k = M_{k+j}, \quad \forall \text{正整数} j.$$

故M是Noether模．

由于这个定理，也称Noether模是有极大条件的模．

Artin模同样可以按另外的方式来定义．为此，我们先引入一个概念．

定义10.3 设A是一个左R-模．若当A的一集子模$\{A_i | i\in I\}$满足

$$\bigcap_{i\in I} A_i = 0$$

时，必存在有限集$I_0 \subseteq I$使

$$\bigcap_{i\in I_0} A_i = 0,$$

则称A是有限上生成的．

定理10.2 设M是左R-模，则以下条件等价：

(i) M是Artin模；

(ii) M的子模作成的任一非空集对于集的“$\subseteq$”有极小元素；

(iii) M的每一个同态象都是有限上生成的。

证 (i)⇒(ii)。和定理10.1中 (i)⇒(ii) 的证明完全类似。

(ii)⇒(iii)。设A是M的一个子模，我们证明 M/A 是有限上生成的。为此，设 $\{M_i/A|i\in I\}$ 是M/A的一集子模，满足

$$\bigcap_{i\in I} M_i/A=0.$$

考虑由一切有限个 M_i 的交作成的集

$$\Omega=\left\{\bigcap_{i<\infty} M_i \mid i\in I\right\},$$

则Ω对于集的"$\subseteq$"有极小元素。设

$$D=\bigcap_{k=1}^{s} M_{i_k}$$

是Ω 的一个极小元素。

由D的极小性知

$$D\cap M_j=D,\quad \forall\, j\in I,$$

故$D\subseteq M_j$, $\forall\, j\in I$，从而有

$$D\subseteq \bigcap_{i\in I} M_i,$$

于是存在有限集$I_0=\{i_1,\cdots,i_s\}\subseteq I$ 使

$$\bigcap_{j\in I_0}(M_j/A)=(\bigcap_{j\in I_0} M_j)/A=D/A\subseteq(\bigcap_{i\in I} M_i)/A$$

$$=\bigcap_{i\in I}(M_i/A)=0.$$

故 M/A 是有限上生成的。因此，M的每一个同态象都是有限上生成的。

(iii)⇒(i)。 任给一个由M的子模组成的降链

$$M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots\supseteq M_n\supseteq\cdots.$$

命$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}M_i$，则$A$是$M$的子模，且

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(M_i/A)=(\bigcap_{i=1}^{\infty}M_i)/A=0.$$

于是存在$i_1<i_2<\cdots<i_s$使$(M_{i_1}/A)\cap\cdots\cap(M_{i_s}/A)=0$,从而$(M_{i_1}\cap\cdots\cap M_{i_s})/A=0$。因此$M_{i_1}\cap\cdots\cap M_{i_s}=A$.于是命$k=i_s$时即有$M_k=M_{k+j}$，$\forall$正整数$j$．故$M$是 Artin 模．

由于这个定理，也称Artin模是有极小条件的模。

一个模是否为 Noether 模与其子模及商模是否为 Noether 模有重要联系．有下面定理．

定理10.3 设M是左R-模．若N是M的任意一个子模，则M是Noether模，当且仅当N及M/N都是Noether模。

证 设M是Noether 模，则因N的子模也是M的子模，故N的每一个子模都是$f.g.$的。因此N是 Noether 模．若M'/N是M/N的子模，则因M'是$f.g.$的，故M'/N是$f.g.$的。因此M/N是Noether模。

反之，设N及M/N都是Noether模．若

$$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots\subseteq M_n\subseteq\cdots$$

是由M的子模组成的一个升链，则由M/N的子模组成的升链

$$\frac{M_1+N}{N}\subseteq\frac{M_2+N}{N}\subseteq\cdots\subseteq\frac{M_n+N}{N}\subseteq\cdots$$

及由N的子模组成的升链

$$M_1\cap N\subseteq M_2\cap N\subseteq\cdots\subseteq M_n\cap N\subseteq\cdots$$

都中断。故存在正整数k使

$$M_k+N=M_{k+j}+N,\quad\forall\text{正整数}j,$$

$$M_k\cap N=M_{k+j}\cap N,\quad\forall\text{正整数}j.$$

于是由模律（$A\cap B\Rightarrow A\cap(B+C)=B+(A\cap C)$）知

$$M_{k+j}=M_{k+j}\cap(M_{k+j}+N)=M_{k+j}\cap(M_k+N)$$

$$=M_k+(M_{k+j}\cap N)=M_k+(M_k\cap N)=M_k,$$
$$\forall \text{正整数} j,$$

故M是Noether模。

由此定理立刻得到下面推论。

推论10.1 设已给左R-短正合列

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}B\longrightarrow 0,$$

则M是Noether模，当且仅当N及B都是Noether模。

同样，关于Artin模有下面的定理及推论。

定理10.4 设M是左R-模。若N是M的任意一个子模，则M是Artin模，当且仅当N及M/N都是Artin模。

推论10.2 设已给左R-短正合列

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}B\longrightarrow 0,$$

则M是Artin模，当且仅当N及B都是Artin模。

众所周知，域上有限维向量空间的满线性变换必是同构映射。对于Noether模也有类似结果，即有下面定理。

定理10.5 设左R-模M是Noether模。若$\varphi: M\to M$是左R-满射，则φ是同构映射。

证 因为

$$\ker\varphi\subseteq\ker\varphi^2\subseteq\cdots\subseteq\ker\varphi^n\subseteq\cdots$$

是由M的子模组成的一个升链，故存在正整数k使$\ker\varphi^k=\ker\varphi^{k+j}$，$\forall$正整数$j$。

若$x\in\ker\varphi$，则$\varphi(x)=0$。因为φ^k是满射，故有$y\in M$使$x=\varphi^k(y)$。从而$\varphi^{k+1}(y)=0$。于是$y\in\ker\varphi^{k+1}=\ker\varphi^k$。因此$x=\varphi^k(y)=0$ 故φ是单射。所以φ是同构映射。

10.2 Noether 环的定义

定义10.4 若左R-模R是Noether模，则称R是左Noether环；若右R-模R是Noether模，则称R是右Noether环。

由定理10.1立刻得到下面定理。

定理10.6　设R是环，则以下条件等价：

(i) R是左（右）Noether环；

(ii) R的左（右）理想作成的任一非空集对于集的“$\subseteq$”有极大元素；

(iii) R的每一个左（右）理想都是$f.g.$的。

现在我们给出一些例子。

例10.1　若环R的每一个左（右）理想都是主左（右）理想，则R是左（右）Noether环。

例10.2　设

$$R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\middle| a\in\mathbf{Z},\ b,\ c\in\mathbf{Q}\right\},$$

则R是右Noether环，但不是左Noether环。

证　命

$$I=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\middle| b\in\mathbf{Q}\right\},$$

则易知I是R的左理想，且由$\mathbf{Q}$不是$f.g.$左$\mathbf{Z}$-模，立刻推知I不是$f.g.$的。故R不是左Noether环。

命

$$J=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\middle| c\in\mathbf{Q}\right\},$$

则易知J是R的右理想，且右R-模J由$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$生成。若$T$是右$R$-模$J$的一个子模，且$T\neq 0$，则有一个$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\in T$，且$c\neq 0$。从而$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}\in T$。故$T=J$是$f.g.$模。因此右$R$-模$J$是Noether模。

命

$$K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\middle| a\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{Q}\right\},$$

则易知K是环R的右理想. 我们来证明右R-模K是Noether模。为此，设T是右R-模K的一个子模，且$T\neq 0$。

若当$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in T$时必$a=0$，则易知$T=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\middle|\ b\in\mathbf{Q}\right\}$由$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$生成，故$T$是$f.g.$ 的。

若有一个$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in T$，其中$a\neq 0$。则可设$a>0$。凡使$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in T$的正整数$x$中有一个最小的，设是$a_0$，则有一个$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in T$。易知当$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in T$时，必有$a_0/x$。从而即知$T$由$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$生成，故$T$也是$f.g.$的。因此右$R$-模$K$是Noether模。

命

$$\varphi:\ K\longrightarrow R/J$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+J,$$

易知φ是右R-满射，故R/J是 Noether模。于是由J及R/J都是Noether 模知右R-模R是Noether模。因此R是右 Noether 环。

若环R既是左 Noether 环，又是右 Noether 环，则称R是Noether环。易知$\mathbf{Z}$是Noether环。

10.3 环是左 Noether 环的一种充分必要条件

我们有下面定理。

定理10.7 环R是左 Noether 环，当且仅当每一个$f.g.$ 左R-模都是Noether模。

证 若每一个$f.g.$ 左R-模都是Noether 模，则左R-模R是Noether模，故R是左Noether环。

反之，设R是左Noether环。我们对$f.g.$ 左R-模的生成元的个数用数学归纳法来证明$f.g.$左R-模是Noether模。

当$f.g.$左R-模$A=\langle x_1\rangle$时，环R有一个左理想I使$A\cong R/I$。

因为左R-模R是Noether模，故左R-模 R/I是Noether模．因此A是Noether模．

设含$n-1$个生成元的$f.g.$左R-模必是Noether 模．今设左R-模$A=\langle x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\rangle$．命$A'=\langle x_n\rangle$，则 A'及 $A/A'=\langle x_1+A',\cdots,x_{n-1}+A'\rangle$都是Noether 模，因此$A$是 Noether 模．

10.4 左 Noether 环的一些性质

首先有下面定理．

定理10.8 设R是左Noether环，则有

(i) 每一个$f.g.$左R-模都是Noether模；

(ii) 每一个$f.g.$左R-模都是有限相关模；

(iii) 每一个 $f.g.$ 平坦左R-模都是$f.g.$投射左R-模．

证 (i) 由定理10.7即得．

(ii) 设A是$f.g.$左R-模，则存在左R-短正合列

$$0\longrightarrow \ker f\overset{i}{\hookrightarrow} F\overset{f}{\longrightarrow} A\longrightarrow 0$$

其中F是$f.g.$自由左R-模．因为 R 是 左 Noether 环，故 F是Noether模，因此$\ker f$是$f.g.$模．所以A是有限相关模．

(iii) 由 (ii) 知$f.g.$平坦左R-模是有限相关平坦左R-模，故是$f.g.$投射左R-模．

现在我们证明左Noether环是IBN环．

定理10.9 设R是左 Noether 环，则R是 IBN 环，且秩为$n\geqslant 1$的有限秩自由左 R-模的每一个含n个生成元的生成系必是基．

证 设A是非零$f.g.$自由模．若E及F是A的任意两个基，则可设$E=\{e_1,\cdots,e_m\}$，$F=\{f_1,\cdots,f_n\}$，若$m>n$，则命 $\varphi: A\longrightarrow A$是$\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie_i\longmapsto\sum\limits_{i=1}^{n}a_if_i$时，可知$\varphi$是左$R$-满射．因为$A$是 Noether模，故由定理10.5知$\varphi$是同构映射．但明显知$\ker\varphi\neq 0$．矛

盾.故$m\leqslant n$。由于E及F的地位同等,故也有$n\leqslant m$。从而$m=n$。于是由推论1.2知R是IBN环。

若A是秩为$n\geqslant 1$的有限秩自由模,则可设A有基$\{x_1,\cdots,x_n\}$.若$A=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$,则命$\varphi$: $A\to A$是$\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} r_i a_i$时,可知$\varphi$是左$R$-满射,从而是同构映射.故$\{a_1,\cdots,a_n\}$是$A$的一个基.

10.5 左 Noether 环的一种刻划

现在我们给出左Noether 环的一种刻划,即下面的定理.它对于左Noether 环上左模的理论有着十分重要的意义.

定理10.10 设R是环,则以下条件等价:

(i) R是左Noether环;

(ii) 内射左R-模的正向极限(指标集是正向拟序集)是内射左R-模;

(iii) 内射左R-模的直和是内射左R-模.

证 (i)⇒(ii)设I是一个正向拟序集,$\{E_i,\varphi_i^j\}$是R-mod中以I为指标集的一个正向系统,且每一个E_i都是内射左R-模.于是$\{(\bigoplus\limits_{i\in I} E_i)/S,\alpha_i\}$是$\{E_i,\ \varphi_i^j\}$的正向极限,其中$S$是$\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$的由所有元素$\lambda_j\varphi_i^j(e_i)-\lambda_i(e_i)$, $e_i\in E_i$生成的子模,α_i: $E_i\to(\bigoplus\limits_{i\in I}E_i)/S$是$e_i\longmapsto\lambda_i(e_i)+S$,且$(\bigoplus\limits_{i\in I}E_i)/S=\{\lambda_i(e_i)+S\mid e_i\in E_i, i\in I\}$,这里$\lambda_i$是$E_i$到$\bigoplus\limits_{i\in I}E_i$的入射.我们来证明$(\bigoplus\limits_{i\in I}E_i)/S$是内射左$R$-模.

为此,考虑图

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\ \rho\ } & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ (\bigoplus\limits_{i\in I}E_i)/S & & \end{array}$$

其中 J 是环 R 的任意左理想，f 是任意左 R-映射。

因为 R 是左Noether环，故左 R-模 J 是 f.g. 的。因此可设

$$J=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle.$$

命 F 是自由左 R-模，有基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，且左 R-满射 $\psi: F\to J$ 满足 $\psi(x_i)=a_i$，$i=1,\cdots,n$。于是 $\ker\psi$ 是 f.g. 的。故可设

$$\ker\psi=\langle y_1,\cdots,y_t\rangle.$$

并可设

$$y_p=\sum_{j=1}^{n} r_{pj}x_j,\quad p=1,\cdots,t.$$

设 $f(a_j)=\lambda_{i_j}(e_{i_j})+S$，其中 $e_{i_j}\in E_{i_j}$，$j=1,\cdots,n$。由于 I 是正向拟序集，故可取定一个 $k\in I$ 使 $i_j\leqslant k$，$j=1,\cdots,n$。然后命

$$e^j=\varphi_k^{i_j}(e_{i_j}),\quad j=1,\cdots,n,$$

则 $e^j\in E_k$，$j=1,\cdots,n$。又因为 $\lambda_k\varphi_k^{i_j}(e_{i_j})-\lambda_{i_j}(e_{i_j})\in S$，故

$$f(a_j)=\lambda_k(e^j)+S,\quad j=1,\cdots,n.$$

由 $\psi(y_p)=0$ 知 $\sum_{j=1}^{n} r_{pj}a_j=0$。从而 $\sum_{j=1}^{n} r_{pj}f(a_j)=0$。故 $\sum_{j=1}^{n} r_{pj}\lambda_k(e^j)+S=0$。因此 $\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{n} r_{pj}e^j\right)+S=0$，所以对每一个 $p(1\leqslant p\leqslant t)$，可取定一个 $q(p)\in I$ 满足 $k\leqslant q(p)$，使

$$\varphi_{q(p)}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{pj}e^j\right)=0,\quad p=1,\cdots,t.$$

再取定一个 $m\in I$ 满足 $q(p)\leqslant m$，$p=1,\cdots,t$，然后命

$$b^j=\varphi_m^k(e^j),\quad j=1,\cdots,n$$

则 $b^j\in E_m$，$j=1,\cdots,n$，且易知

$$f(a_j)=\lambda_m(b^j)+S,\quad j=1,\cdots,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{pj}b^j=0,\quad p=1,\cdots,t.$$

命

$$f': J \longrightarrow E_m$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j a_j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} s_j b^j,$$

容易验证f'是左R-映射．于是由于E_m是内射左R-模，就可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} J & \overset{\rho}{\hookrightarrow} & R \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle g'} & \\ E_m & & \end{array}$$

其中补出的g'是左R-映射．

现在命

$$g: R \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)/S$$

$$r \longmapsto \lambda_m(g'(r)) + S,$$

则易知g是左R-映射，且有交换图：

$$\begin{array}{ccc} J & \overset{\rho}{\hookrightarrow} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle g} & \\ \left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)/S & & \end{array}$$

故$\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)/S$是内射左$R$-模．

(ii)⇒(iii)． 由例2.16知一集模的直和是其一切有限部分直和的正向极限（指标集是正向拟序集）。由于内射模的有限直和恒是内射模，故一集内射模的直和成为内射模的正向极限（指标集是正向拟序集）．因此内射模的直和是内射模．

(iii)⇒(i)． 若R不是左Noether环，则左R-模R有一集子

模$\{I_i | i=1,2,\cdots\}$满足$I_i \subset I_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$。命$I=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$，则$I$是左$R$-模$R$的子模，且$I/I_i \neq 0$，$i=1,2,\cdots$。

对于每一个正整数i，存在内射左R-模E_i及左R-单射$\varphi_i: I/I_i \hookrightarrow E_i$。我们证明$\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E_i$不是内射左$R$-模。

命$\rho_i: I \longrightarrow I/I_i$是自然同态映射。因为当$a\in I$时恒存在正整数$k(a)$使得$a\in I_n$，$\forall n \geqslant k(a)$。从而$\rho_n(a)=0$，$\forall n\geqslant k(a)$，于是得到映射

$$f:\ I \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$
$$a \longmapsto (\rho_1(a), \rho_2(a), \cdots).$$

易知f是左R-映射。

若$\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E_i$是内射模，则可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} I & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle \varphi} & \\ \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E_i & & \end{array}$$

其中补出的φ是左R-映射。

设$\varphi(1)=(x_1, x_2, \cdots)$，则存在正整数$m$使$x_{m+1}=0$。取$a\in I$，但$a \notin I_{m+1}$，则$\rho_{m+1}(a)\neq 0$。由$\varphi(a)=f(a)=(\rho_1(a), \rho_2(a), \cdots)$及$\varphi(a)=a\varphi(1)=(ax_1, ax_2, \cdots)$知$ax_{m+1}=\rho_{m+1}(a)\neq 0$，从而导致$x_{m+1}\neq 0$，矛盾。故$R$是左Noether环。

§11 半 单 环

11.1 半单模

定义11.1 设M是左R-模。若$M\neq 0$，且M只有两个子模：0及M，则称M是单模。

定义11.2 若左R-模M是其一集单子模$\{M_i|i\in I\}$的直和：$M=\bigoplus_{i\in I}M_i$，则称M是半单模。零模也叫半单模。

由半单模的定义立刻知道，半单模的直和是半单模。

关于半单模，我们先证明下面两个引理。

引理11.1 若左R-模M的每一个子模都是M的一个直和项，则M的每一个子模也有同样性质，即若N是M的一个子模，则N的每一个子模都是N的一个直和项。

证 设N'是N的子模，则M有一个子模X使

$$M=N'\oplus X$$

于是易知有

$$N=N'\oplus(N\cap X).$$

引理11.2 若左R-模M的每一个子模都是M的一个直和项，且$M\neq 0$，则M的每一个非零子模必有单子模。

证 设B是M的一个非零子模，则有一个$b\in B$，且$b\neq 0$。命

$$\Omega=\{C|C\text{是}B\text{的子模，且}b\notin C\},$$

则易知Ω不空，对于集的"$\subseteq$"成为偏序集，且Ω有极大元素。

设C是Ω的一个极大元素，则据引理11.1知B有一个子模D使

$$B=C\oplus D,$$

且由$C\neq B$知$D\neq 0$。

若D不是单模，则D有一个子模D'满足$0\subset D'\subset D$。于

是 D 有一个子模 D'' 使 $D=D'\oplus D''$，可见 $D''\neq 0$。这时有 $B=C\oplus D'\oplus D''$。易知或 $b\notin C\oplus D'$，或 $b\notin C\oplus D''$。因此或 $C\oplus D'\in\Omega$，或 $C\oplus D''\in\Omega$。矛盾。故 D 是 B 的单子模。

现在我们给出半单模的一种刻划。有下面定理。

定理11.1 左 R-模 M 是半单模，当且仅当 M 的每一个子模都是 M 的一个直和项。

证 设 M 是半单模，并设 N 是 M 的一个子模。因为当 $M=0$ 时 N 是 M 的一个直和项，当 $M\neq 0$，而 $N=0$ 或 M 时，N 也是 M 的一个直和项，因此我们现在设 $M\neq 0$，且 $0\subset N\subset M$。于是先可设

$$M=\bigoplus_{i\in I}M_i,$$

其中每一个 M_i 都是 M 的单子模。

对于 I 的每一个非空子集 J，记 $S_J=\bigoplus\limits_{i\in J}M_i$，然后命

$$\Omega=\{J\mid J\subseteq I,\ J\neq\phi,\ 且 S_J\cap N=0\}.$$

易知 Ω 不空，对于集的"$\subseteq$"成为偏序集，且 Ω 有极大元素。命 K 是 Ω 的一个极大元素，我们来证明 $M=N\oplus S_K$。而这只要证明 $M_i\subseteq N\oplus S_K$，$\forall_i\in I$。

当 $i\in I$ 时，若 $i\in K$，则 $M_i\subseteq S_K\subseteq N\oplus S_K$。若 $i\notin K$，则 $K\cup\{i\}\supset K$，故 $S_{K\cup\{i\}}\cap N\neq 0$，即 $(S_K\oplus M_i)\cap N\neq 0$。故有 $0\neq z\in(S_K\oplus M_i)\cap N$，设 $z=x+y=b$，其中 $x\in S_K$，$y\in M_i$，$b\in N$，则 $y=b-x\in S_K\oplus N$，且易知 $y\neq 0$，从而 $(S_K\oplus N)\cap M_i\neq 0$。因为 M_i 是单模，故 $(S_K\oplus N)\cap M_i=M_i$。因此 $M_i\subseteq S_K\oplus N$。到此就证明了 $M=N\oplus S_K$。故 N 是 M 的一个直和项。

反之，设 M 的每一个子模都是 M 的一个直和项。若 $M=0$，则 M 已是半单模。故设 $M\neq 0$。

为证 M 是半单模，命

$$\Delta=\left\{\{W_j\mid j\in J\}\mid W_j 是 M 的单子模，且 \sum_{j\in J}W_j=\bigoplus_{j\in J}W_j\right\},$$

易知 Δ 不空，对于集的"$\subseteq$"成为偏序集，且 Δ 有极大元素。设

$\{H_l \mid l\in L\}$是Δ的一个极大元素。我们证明$M=\bigoplus_{l\in L}H_l$。

首先，M有一个子模X使

$$M=\bigoplus_{l\in L}H_l\oplus X.$$

若$X\neq 0$，则据引理 11.2 知X有单子模Y。故X有一个子模Y'使$X=Y\oplus Y'$，于是$M=\bigoplus_{l\in L}H_l\oplus Y\oplus Y'$。这时$\{H_l \mid l\in L\}\cup\{Y\}\in\Delta$。矛盾。故$X=0$。因此$M$是半单模。

由这个定理容易得到下面的推论。

推论11.1 半单模的子模及同态象都是半单模。

证 设左R-模M是半单模。若N是M的子模，则N的每一个子模都是N的一个直和项。故N是半单模。又因为M有一个子模X使$M=N\oplus X$，故$M/N\cong X$是半单模。

11.2 半单环的定义

定义11.3 若左R-模R是半单模，则称R是左半单环；若右R-模R是半单模，则称R是右半单环。

实际上对于半单环不必区分左及右。可以证明环R是左半单环当且仅当R是右半单环。为此，我们先引入一些概念，并证明一个引理。

定义11.4 设R是环，$e_1,\cdots,e_m\in R$。若满足$e_i\neq 0, i=1,\cdots,m$；$e_i^2=e_i$，$i=1,\cdots,m$；$e_ie_j=0(i\neq j)$；$e_1+\cdots+e_m=1$，则称$e_1,\cdots,e_m$是R的一组和 1 正交幂等元。

引理11.3 (i) 设R是环，且左R-模R是其非零子模$A_1,\cdots,A_n$的直和：

$$R=A_1\oplus\cdots\oplus A_n$$

则R有一组和 1 正交幂等元$e_i\in A_i$，$i=1,\cdots,n$使

$$A_i=Re_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

(ii) 若$e_1,\cdots,e_m$是环R的一组和 1 正交幂等元，则

$$R=Re_1\oplus\cdots\oplus Re_m.$$

证 (i) 首先存在$e_i\in A_i$，$i=1,\cdots,n$使

$$1 = e_1 + \cdots + e_n$$

若 $a_i \in A_i$，则 $a_i = a_i e_1 + \cdots + a_i e_n$，故 $a_i = a_i e_i \in Re_i$，因此 $A_i = Re_i$，$i = 1, \cdots, n$。从而又知 $e_i \neq 0$，$i = 1, \cdots, n$。

因为$e_i e_j \in A_j$，故由$e_i = e_i e_1 + \cdots + e_i e_n$知当 $i \neq j$时 $e_i e_j = 0$，当$i = j$ 时 $e_i e_i = e_i$。故$e_1, \cdots, e_n$是R的一组和1正交幂等元。

(ii) 因为$1 = e_1 + \cdots + e_m$，故当$r \in R$时有$r = re_1 + \cdots + re_m \in Re_1 + \cdots + Re_m$。又，若$r_1 e_1 + \cdots + r_m e_m = 0$，则$(r_1 e_1 + \cdots + r_m e_m) e_i = 0$，故$r_i e_i = 0$，$i = 1, \cdots, m$。因此$R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_m$。

类似地有下面引理。

引理11.4 (i) 设R是环，且右R-模R是其非零子模$A_1, \cdots, A_n$的直和：

$$R = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

则R有一组和1正交幂等元 $e_i \in A_i$，$i = 1, \cdots, n$ 使

$$A_i = e_i R, \quad i = 1, \cdots, n.$$

(ii) 若 $e_1, \cdots, e_m$ 是环R的一组和1正交幂等元，则

$$R = e_1 R \oplus \cdots \oplus e_m R.$$

现在我们证明左半单环与右半单环是一致的。

定理11.2 环R是左半单环当且仅当环R是右半单环。

证 只要考虑 $R \neq 0$ 的情形。设R是左半单环，则左R-模R 是其一集单子模$\{A_i | i \in I\}$的直和：$R = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$。

设 $1 = e_{i_1} + \cdots + e_{i_n}$，其中 $e_{i_k} \in A_{i_k}$，$k = 1, \cdots, n$。则当 $r \in R$ 时，$r = re_{i_1} + \cdots + re_{i_n} \in A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_n}$。因此左$R$-模 R 是其有限个单子模的直和。故可设

$$R = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

其中每一个A_i都是左R-模R的单子模。

于是据引理11.3知R有一组和1正交幂等元 $e_1, \cdots, e_n$ 使 $Re_i = A_i$，$i = 1, \cdots, n$，且

$$R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n.$$

再据引理11.4知

$$R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR.$$

我们来证明右R-模e_iR是单模，$i = 1, \cdots, n$。

设N是右R-模 e_iR 的一个非零子模，则有一个 $a \in N$，且 $a \neq 0$。命

$$\varphi: \ Re_i \longrightarrow Ra$$
$$re_i \longmapsto ra$$

则因 $a \in e_iR$，易知 φ 是映射，且是左 R-满射。又因为左 R-模 Re_i 是单模，且 $Ra \neq 0$，故 $\ker\varphi = 0$。因此 φ 是同构映射。

设$R = Ra \oplus U$，其中U是左R-模R的子模。命

$$\psi: \ R \longrightarrow R$$
$$ra + u \longmapsto \varphi^{-1}(ra) = re_i,$$

则易知ψ是左R-映射。于是$e_i = \psi(a) = a\psi(1) \in aR$，故$e_iR \subseteq aR$。从而$N = e_iR$。因此$e_iR$是单模。所以$R$是右半单环。

完全类似地可以证明，当R是右半单环时，R必是左半单环。

在给出半单环的例子以前，先介绍两个概念：交换环上的结合代数及群代数。

设K是交换环，$(M, +)$ 是 Abel 群。若M既是左K-模，又是环，而且满足

$$(kx)y = x(ky) = k(xy), \quad \forall k \in K, \ x, y \in M,$$

则称M是K上结合代数。

设K是交换环，G是群（其运算用乘法）.命KG是以G为基的自由K-模，且对 $k \in K$，将 k与$k1$ 等同，其中 1 是群 G 的单位元。于是 $K \subseteq KG$。又对于$\sum_{g \in G} k_g g$及$\sum_{h \in G} l_h h$，定义

$$\left(\sum_{g \in G} k_g g\right)\left(\sum_{h \in G} l_h h\right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (k_g l_h)(gh),$$

其中 $k_g l_h$是环K中的积，gh 是群G中的积.则易知KG成为K上结合代数，叫群代数。

现在给出半单环的一些例子。

例11.1 (Maschke) 设G是有限群，K是域，则KG是半单环，当且仅当$\mathrm{char}K\nmid |G|$。

证 先记$R=KG$，并设$G=\{g_1=1, g_2, \cdots, g_n\}$。

设$\mathrm{char}K\nmid |G|=n$，则$n1\neq 0$，其中1是域$K$的单位元。我们用$\frac{1}{n}$表示$n1$在$K$中的逆元。

对于$\varphi\in \mathrm{End}R_K$，命

$$\hat{\varphi}: R\longrightarrow R$$

$$r\longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rg_i)g_i^{-1}$$

我们证明$\hat{\varphi}\in \mathrm{End}R_R$。

首先易知$\hat{\varphi}(r+s)=\hat{\varphi}(r)+\hat{\varphi}(s)$，$\forall r, s\in R$。

当$r\in R$，$k\in K$时，有

$$\hat{\varphi}(rk)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rkg_i)g_i^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rg_i)g_i^{-1}\right)k=\hat{\varphi}(r)k,$$

当$r\in R$，$g\in G$时，有

$$\hat{\varphi}(rg)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rgg_i)g_i^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rgg_i)(gg_i)^{-1}g$$

$$=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rg_i)g_i^{-1}\right)g=\hat{\varphi}(r)g,$$

故有$\hat{\varphi}(rx)=\hat{\varphi}(r)x$，$\forall r, x\in R$。因此$\hat{\varphi}\in \mathrm{End}R_R$。

现在设A是右R-模R的任意子模，我们证明A是R的一个直和项。

因为$K\subseteq R$，故A也是右K-模R的一个子模，即A是域K上

向量空间 R 的一个子空间，因此 A 有补空间：$R=A\oplus B$。命 $\varphi: R\longrightarrow R$ 是 $a+b\longmapsto a$，其中 $a\in A$，$b\in B$。可知 φ 是右 K-映射，故 $\hat{\varphi}\in \mathrm{End} R_R$。

当 $a\in A$ 时，$\hat{\varphi}(a)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(ag_i)g_i^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ag_ig_i^{-1}=a$；当 $r\in R$ 时，$\hat{\varphi}(r)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rg_i)g_i^{-1}\in A$，故有

$$R=A\oplus(1-\hat{\varphi})(R)$$

因此 R 是半单环。

若 $\mathrm{char}K \mid |G|=n$，则可设 $\mathrm{char}K=p$ 是素数。

命 $r_0=g_1+\cdots+g_n$，则 $r_0\neq 0$。我们证明 r_0R 不是右 R-模 R 的直和项。

首先可知 $r_0g=r_0$，$\forall\ \ \in G$，故 $r_0^2=nr_0=0$，且因 $r_0(g_1k_1+\cdots+g_nk_n)=r_0(k_1+\cdots+k_n)\in r_0K$，故 $r_0R=r_0K$。

若 r_0R 是右 R-模 R 的一个直和项：$R=r_0R\oplus U$，则 $1=x+y$，其中 $x\in r_0R$，$y\in U$。于是 $x^2=x$。设 $x=r_0k_0$，其中 $k_0\in K$，则 $x=x^2=r_0^2k_0^2=0$。从而 $U=R$。因此 $r_0R=0$。这导致 $r_0=0$。矛盾。故 R 不是半单环。

11.3 半单环的刻划

现在我们给出半单环的一种刻划。

定理11.3 设 R 是环，则以下条件等价：

(i) R 是半单环；

(ii) 每一个左 R-模都是半单模；

(iii) 每一个左 R-模都是内射模；

(iv) 每一个左 R-短正合列都可裂；

(v) 每一个左 R-模都是投射模。

证 (i)⇒(ii)。零模是半单模，非零自由左 R-模 $F\cong R^{(\alpha)}$。

故当R是半单环时，每一个自由左R-模都是半单模。因为每一个左R-模总是一个自由左R-模的一个同态象，而半单模的同态象是半单模，故每一个左R-模都是半单模。

(ii)⇒(iii). 设M是左R-模，则存在内射左R-模E使M是E的子模。因为E是半单模，故E有一个子模X使$E=M\oplus X$，故M是内射模。

(iii)⇒(iv). 若$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列，则因$A$是内射模，故此短正合列可裂。

(iv)⇒(v). 设M是左R-模，则有左R-短正合列$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0$，其中$F$是自由左$R$-模。因为这个短正合列可裂，故$M$是投射模。

(v)⇒(i) 设I是左R-模R的一个子模，则有左R-短正合列

$0\longrightarrow I\xrightarrow{f}R\xrightarrow{g}R/I\longrightarrow 0$ 因为R/I是投射模，故此短正合列可裂。从而I是左R-模R的一个直和项。故R是半单环。

注：定理中的“左”字换成“右”字仍成立。

§12 Von Neumann 正则环

半单环是每一个模都是投射模、每一个模都是内射模的环。本节要研究的Von Neumann正则环则是每一个模都是平坦模的环。

12.1 Von Neumann 正则环的定义

定义12.1 设R是环。若对每一个$a\in R$，恒有

$$a\in aRa,$$

则称R是一个Von Neumann正则环。

我们给出一些例子。

例12.1 Boole环是Von Neumann正则环。

证 所谓环R是Boole环，是指$r^2=r$，$\forall r\in R$。于是当R是Boole环时，对每一个$a\in R$，恒有$a=aaa\in aRa$，故R是Von Neumann正则环。

例12.2 设左K-模M是半单模。命$R=\mathrm{End}_K M$，则R是Von Neumann正则环。

证 设$f\in R$。因M是半单模，故M有子模L及T使$M=\ker f\oplus L$及$M=\mathrm{im} f\oplus T$。

不难证明，对每一个$u\in\mathrm{im} f$，有唯一的$y\in L$使$f(y)=u$。事实上，首先有$z\in M$使$u=f(z)$。设$z=x+y$，其中$x\in\ker f$，$y\in L$，则$u=f(y)$。又，若$y_1, y_2\in L$使$f(y_1)=f(y_2)=u$，则$y_1-y_2\in\ker f\cap L=0$。从而$y_1=y_2$。

现在命

$$g:\ M\longrightarrow M$$
$$u+v\longmapsto y,$$

其中$u\in\mathrm{im} f$，$v\in T$，$y\in L$满足$f(y)=u$。则易知$g\in R$。

因为当$y\in L$时$gf(y)=y$，故当$x+y\in M$，其中$x\in\ker f$，$y\in L$时，$fgf(x+y)=fgf(y)=f(y)=f(x+y)$，故$f=fgf\in fRf$。因此$R$是Von Neumann正则环。

例12.3 半单环是Von Neumann正则环。

证 设R是半单环，则由例12.2知$\mathrm{End}_R R$是Von Neumann正则环。但易知环$\mathrm{End}_R R$与环R反同构，故R是Von Neumann正则环。

12.2 Von Neumann 正则环的一个性质

定理12.1 设R是Von Neumann正则环。若L是R的一个$f.g.$左理想，则必存在一个幂等元$e\in R$使$L=Re$。

证 首先，当$a\in R$时，必有一个幂等元$e\in R$使$Ra=Re$。事实上，因为$a\in aRa$，故有$b\in R$使$a=aba$，命$e=ba$，则易知

e是幂等元，且$Re\subseteq Ra$。又因为$a=ae\in Re$，故$Ra=Re$。

其次，当$a,b\in R$时，必有一个幂等元$h\in R$使$Ra+Rb=Rh$。事实上，首先有一个幂等元e使$Ra=Re$。又易知$Ra+Rb=Re+Rb(1-e)$。再设幂等元f使$Rb(1-e)=Rf$，则有$r\in R$使$f=rb(1-e)$。从而$fe=0$。现在命$g=(1-e)f$，则g是幂等元，且易知$Rg=Rf$。从而$Ra+Rb=Re+Rg$。由于$ge=0$，$eg=0$，故$e+g$是幂等元。又易知$R(e+g)\subseteq Re+Rg$，而当$r_1e+r_2g\in Re+Rg$时，由$r_1e+r_2g=(r_1e+r_2g)(e+g)\in R(e+g)$知$Re+Rg\subseteq R(e+g)$。故$Ra+Rb=R(e+g)$。

于是用数学归纳法即可证明，对于任何$a_1,\cdots,a_n\in R$，必存在幂等元e使$Ra_1+\cdots+Ra_n=Re$。这就是说，对于R的每一个f.g.左理想L，必存在幂等元e使$L=Re$。

12.3 Von Neumann 正则环的一种刻划

定理12.2 环R是Von Neumann正则环，当且仅当每一个右R-模都是平坦模。

证 设R是Von Neumann正则环。若M是一个右R-模，则首先有一个右R-短正合列

$$0\longrightarrow K\overset{i}{\hookrightarrow}F\overset{g}{\longrightarrow}M\longrightarrow 0$$

其中F是自由右R-模。

设L是R的一个f.g.左理想，则总有$KL\subseteq K\cap FL$。当$x\in K\cap FL$时，可设$x=a_1l_1+\cdots+a_nl_n$，其中$a_i\in F$，$l_i\in L$，$i=1,\cdots,n$。由定理12.1知有幂等元e使$L=Re$。因此可设$l_i=r_ie$，$i=1,\cdots,n$。于是$x=xe\in KL$，从而$KL=K\cap FL$。故M是平坦模。

反之，设每一个右R-模都是平坦模。为证R是Von Neumann正则环，任取$a\in R$，并考虑右R-短正合列

$$0 \longrightarrow aR \xrightarrow{i} R \xrightarrow{g} R/aR \longrightarrow 0$$

因为$R/(aR)$是平坦右R-模，而R是自由右 R-模，故对环R的每一个左理想L，恒有

$$(aR)L = aR \cap RL.$$

特别，当取 $L = Ra$ 时，则有 $aRa = aR \cap Ra$. 于是就有 $a \in aR \cap Ra = aRa$. 故R是 Von Neumann 正则环.

§13 遗传环及 Dedekind 环

13.1 遗传环及 Dedekind 环的定义

定义13.1 设 R 是环. 若R的每一个左（右）理想都是投射左（右）R-模，则称R是左（右）遗传环. 若R既是左遗传环，又是交换整环，则称R是 Dedekind 环.

例13.1 半单环是左遗传环，也是右遗传环.

例13.2 主理想整环是Dedekind环.

证 主理想整环R的非零左理想作为左R-模与左 R-模 R 同构，故是投射左R-模. 因此主理想整环是 Dedekind 环.

13.2 左遗传环的一个性质

我们指出左遗传环上自由左模的子模的一个重要性质，即有下面定理.

定理13.1 (Kaplansky) 设R是左遗传环，F 是自由左 R-模. 若A是F的一个子模，则R有一集左理想 $\{I_k | k \in K\}$ 使

$$A \cong \bigoplus_{k \in K} I_k$$

证 只需考虑$F \neq 0$ 的情形. 设F有基 $\{x_k | k \in K\}$，并设K

已良序，其最小元素用 0 来记。定义

$$F_0 = 0,$$
$$F_k = \bigoplus_{i<k} Rx_i, \quad \forall k>0,$$

并记

$$\overline{F}_k = \bigoplus_{i\leqslant k} Rx_i, \quad \forall k\geqslant 0$$

于是有$\overline{F}_k = F_k \oplus Rx_k$，$\forall k\geqslant 0$。

当 $a\in A\cap \overline{F}_k$时，$a$有唯一表示式：$a=b+rx_k$，其中$b\in F_k$及$r\in R$都由 a 唯一确定。命

$$\varphi_k:\ A\cap \overline{F}_k \longrightarrow R$$
$$a \longmapsto r$$

则易知φ_k是左R-映射，且$\ker\varphi_k = A\cap F_k$。再记$I_k = \mathrm{im}\varphi_k$，则有左$R$-短正合列

$$0 \longrightarrow A\cap F_k \xrightarrow{\alpha_k} A\cap \overline{F}_k \xrightarrow{\varphi_k} I_k \longrightarrow 0 \qquad \forall k\in K$$

因为I_k是R的左理想，故I_k是投射左R-模，因此以上短正合列可裂，所以$A\cap \overline{F}_k$有子模C_k使$A\cap \overline{F}_k = (A\cap F_k)\oplus C_k$。且$C_k\cong I_k$。我们先证明

$$A = \sum_{k\in K} C_k.$$

首先当然有$\sum\limits_{k\in K} C_k\subseteq A$。今对 $a\in A$，命

$$\Delta_a = \{k\in K \mid a\in \overline{F}_k\}.$$

因为$F = \bigcup\limits_{k\in K} \overline{F}_k$。故$\Delta_a$是 K的一个非空子集，因此Δ_a中有最小元素，记作 $\mu(a)$。它由 a 唯一确定。

若$\sum\limits_{k\in K} C_k \neq A$。则命

$$\Omega=\left\{\mu(a)\,\middle|\,a\in A,\ \ a\notin\sum_{k\in K}C_k\right\}$$

时，Ω 是K的一个非空子集，故 Ω 中有最小元素．设是 j．于是有 $y\in A$，$y\notin\sum_{k\in K}C_k$使$\mu(y)=j$．

因为$\mu(y)$是Δ_y中的最小元素，故 $y\in\overline{F_j}$，从而 $y\in A\cap\overline{F}_j$．因此可设$y=b+c$，其中 $b\in A\cap F_j, c\in C_j$．易知 $b\notin\sum_{k\in K}C_k$．这是因为若$b\in\sum_{k\in K}C_k$，则因 $c\in C_j\subseteq\sum_{k\in K}C_k$，将导致 $y=b+c\in\sum_{k\in K}C_k$，而这是不可能的．于是$\mu(b)\in\Omega$．但 $b\in F_j=\bigoplus_{i<j}Rx_i$，故$b\in\overline{F}_t$，$t<j$．因此 $\mu(b)\leqslant t<j$．矛盾．所以$A=\sum_{k\in K}C_k$．

现在证明$\sum_{k\in K}C_k=\bigoplus_{k\in K}C_k$．为此，设

$$c_1+c_2+\cdots+c_n=0,$$

其中$c_i\in C_{k_i}$，$i=1,\cdots,n$．且$k_1<k_2<\cdots<k_n$．则

$$c_1+\cdots+c_{n-1}=-c_n\in(A\cap F_{k_n})\cap C_{k_n}=0,$$

故$c_n=0$．递推之即知 $c_1=\cdots=c_{n-1}=0$．因此$\sum_{k\in K}C_k=\bigoplus_{k\in K}C_k$．这就证明了$A\cong\bigoplus_{k\in K}I_k$，其中$\{I_k|k\in K\}$是环 R 的一个集左理想．

由这个定理立刻得到下面一个推论．

推论13.1 左遗传环上投射左模的子模是投射模．

证 因为投射模总是一个自由模的子模，故投射模的子模是一个自由模的子模．从而由定理13.1知左遗传环上投射左模的子模是投射模．

由定理13.1又可以推知主理想整环上模的一些重要性质．有下面两个推论．

推论13.2 设 R是主理想整环．

(i) 若A是自由左R-模F的一个子模，则A是自由左R-模，且$\mathrm{rank}_R A \leqslant \mathrm{rank}_R F$；

(ii) 若左R-模$B=\langle b_1,\cdots,b_n\rangle$，则$B$的每一个子模$B'$必是f.g.模，且存在$c_1,\cdots,c_m\in B'$，$m\leqslant n$，使$B'=\langle c_1,\cdots,c_m\rangle$。

证　(i) 若$A=0$，则结论自然成立．今设$A\neq 0$．命$\{x_k \mid k\in K\}$是F的一个基，则由定理13.1的证明知R有一集左理想$\{I_k \mid k\in K\}$使$A\cong \bigoplus_{k\in K} I_k$。命$K'=\{k\in K \mid I_k\neq 0\}$，则$A\cong \bigoplus_{k\in K'} I_k$，且易知$I_k\cong R$，$\forall k\in K'$。于是$A\cong R^{(|K'|)}$是自由模，且$\mathrm{rank}_R A=|K'| \leqslant |K|=\mathrm{rank}_R F$。

(ii) 首先有自由左R-模F，它有基$\{x_1,\cdots,x_n\}$，且有左R-满射$\varphi: F\longrightarrow B$。命$A$是$B'$在$\varphi$作用下的逆象，则$A$是自由模，且$\mathrm{rank}_R A\leqslant \mathrm{rank}_R F$。设$A$有基$\{y_1,\cdots,y_m\}$，$m\leqslant n$，则命$c_i=\varphi(y_i)$，$i=1,\cdots,m$时，就有$B'=\langle c_1,\cdots,c_m\rangle$。

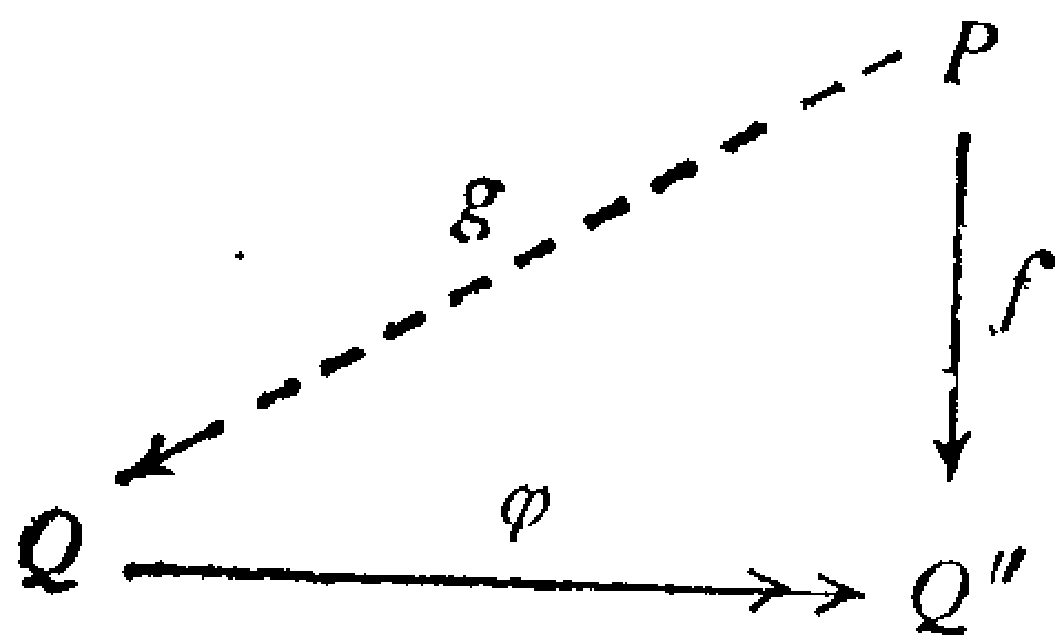
推论13.3　主理想整环上的投射模是自由模。

证　因为投射模总是一个自由模的子模，而由推论13.2知主理想整环上自由模的子模是自由模，故主理想整环上的投射模是自由模。

13.3　左遗传环的刻划

现在我们将给出 Cartan-Eilenberg 关于左遗传环的一种刻划。为此，先证明一个引理。

引理13.1　设P是左R-模．若恒可补成交换图：



其中Q是任意内射左R-模，Q''是任意左R-模，φ是任意左R-满

射，f 是任意左R-映射，补出的 g 是左 R-映射，则 P 是投射左R-模。

证　考虑图：

$$
\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
A & \xrightarrow{\ \tau\ } & A''
\end{array}
$$

其中A，A''是任意左R-模，τ 是任意左 R-满射，f是任意左R-映射。

首先总有一个内射左 R-模 Q 及一个左R-单射 σ: $A \rightarrowtail Q$。于是存在左R-映射ρ: $A'' \longrightarrow Q''$使图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & P & & \\
 & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker\tau & \xhookrightarrow{\ i\ } & A & \xrightarrow{\ \tau\ } & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker\tau & \xrightarrow{\ \sigma i\ } & Q & \xrightarrow{\ \pi\ } & Q'' & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

中右边正方形是交换图。这里$Q''=\mathrm{Coker}(\sigma i)$，$\pi$ 是自然同态映射，上、下两行都是短正合列。又，上图中左边正方形当然是交换图。

据已给条件，可补成交换图：

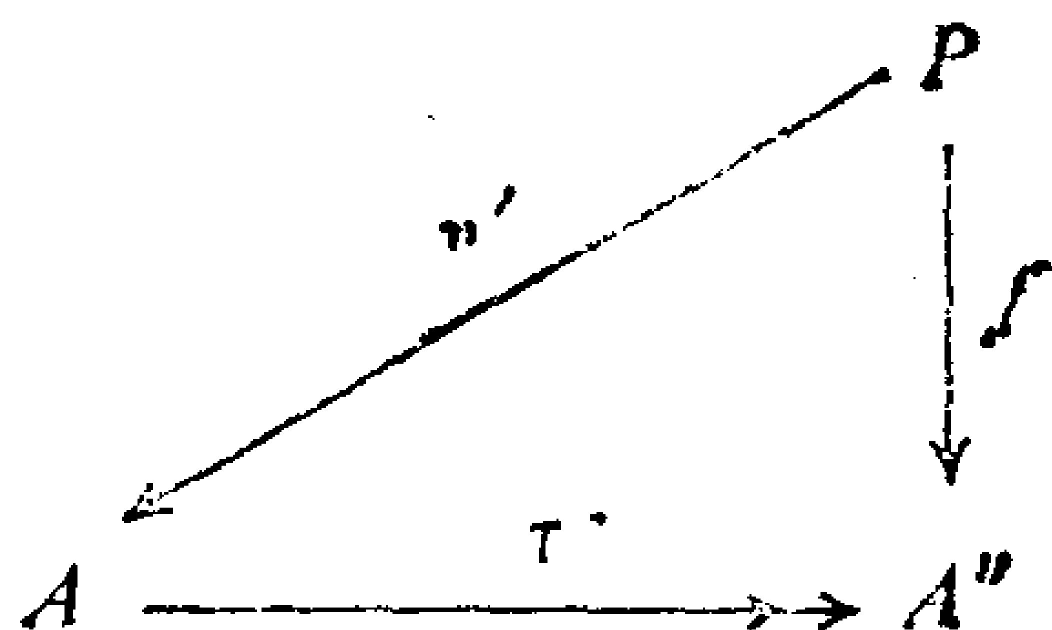
$$
\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & \swarrow{\scriptstyle \gamma} & \big\downarrow{\scriptstyle \rho f} \\
Q & \xrightarrow{\ \pi\ } & Q''
\end{array}
$$

其中补出的γ是左R-映射.

不难证明$\text{im}\gamma\subseteq\text{im}\sigma$. 事实上，当$p\in P$时，由于$f(p)\in A''$且$\tau$是满射，故有$a\in A$使$f(p)=\tau(a)$. 从而$\pi\gamma(p)=\rho f(p)=\rho\tau(a)=\pi\sigma(a)$. 因此$\gamma(p)-\sigma(a)\in\ker\pi=\text{im}(\sigma i)$. 所以有$a'\in\ker\tau$ 使 $\gamma(p)-\sigma(a)=\sigma i(a')=\sigma(a')$. 于是 $\gamma(p)=\sigma(a+a')$. 故$\text{im}\gamma\subseteq\text{im}\sigma$.

命$\gamma':p\longrightarrow A$是$p\longmapsto a$，其中$a$满足$\sigma(a)=\gamma(p)$. 易知$\gamma'$是左$R$-映射，且$\sigma\gamma'=\gamma$.

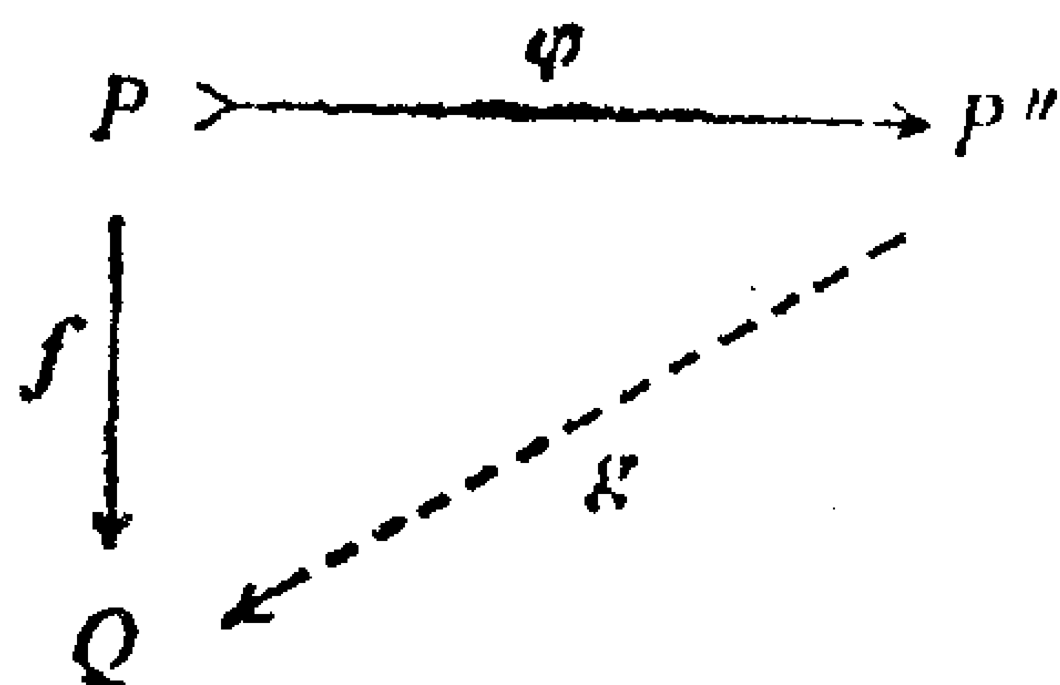
现在容易看出下图交换：



这是因为由$\rho\tau=\pi\sigma$，有$\rho\tau\gamma'=\pi\sigma\gamma'=\pi\gamma=\rho f$，而$\rho$是单射，故$\tau\gamma'=f$. 因此$P$是投射左$R$-模.

对偶地，可以证明有下面引理.

引理13.2 设Q是左R-模. 若恒可补成交换图：



其中P''是任意投射左R-模，P是任意左R-模，φ是任意左R-单射，f是任意左R-映射，补出的g是左R-映射，则Q是内射左R-模.

定理13.2 (Cartan-Eilenberg) 设R是环，则以下条件

等价：

(i) R是左遗传环；

(ii) 投射左R-模的子模是投射左R-模；

(iii) 内射左R-模的同态象是内射左R-模。

证 (i)⇒(ii)。 由推论13.1即得。

(ii)⇒(iii)。 设 Q 是内射左R-模，Q''是 Q 的一个同态象：$Q \xrightarrow{\varphi} Q''$。我们要证明$Q''$是内射左$R$-模。为此，考虑图：

$$\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi'}{\rightarrowtail} & P'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Q'' & & \end{array}$$

其中P''是投射左R-模，P是左R-模，φ'是左R-单射，f是左R-映射。

因为由已给条件知P也是投射左R-模，故可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \overset{g}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Q & \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} & Q'' \end{array}$$

其中补出的g是左R-映射。

因为Q是内射左R-模，故又可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi'}{\rightarrowtail} & P'' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \overset{\delta}{\swarrow} & \\ Q & & \end{array}$$

其中补出的δ是左R-映射。

于是有交换图：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi'} & P'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \varphi\delta} & \\ Q'' & & \end{array}$$

这是因为 $(\varphi\delta)\varphi' = \varphi(\delta\varphi') = \varphi g = f$。因此$Q''$是内射模。

(iii)⇒(i)。 设I是R的一个左理想。我们要证明I是投射左R-模。为此，考虑图：

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Q & \xrightarrow{\tau} & Q'' \end{array}$$

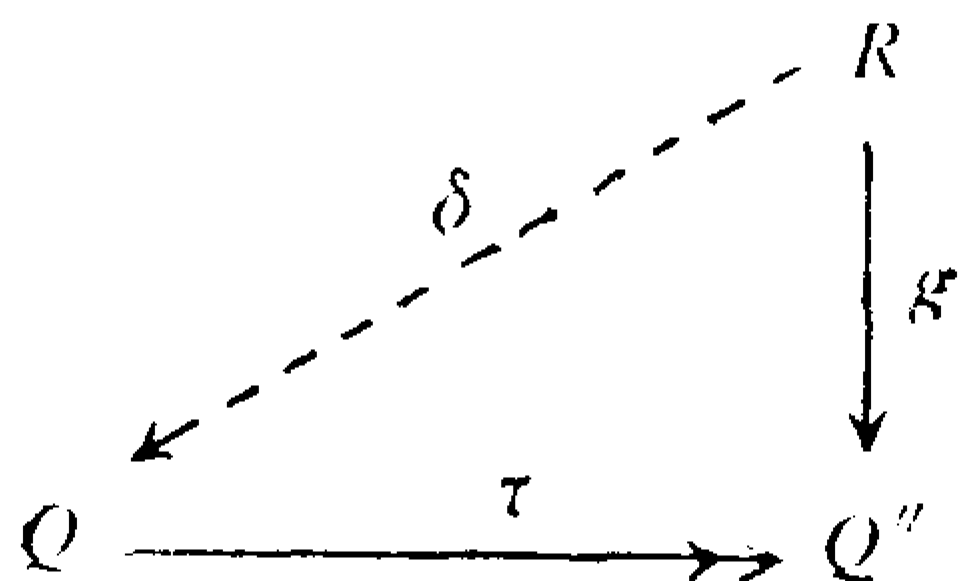
其中Q是内射左R-模，Q''是左R-模，τ是左R-满射，f是左R-映射。

因为由已给条件知Q''也是内射左R-模，故可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} I & \xhookrightarrow{i} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ Q'' & & \end{array}$$

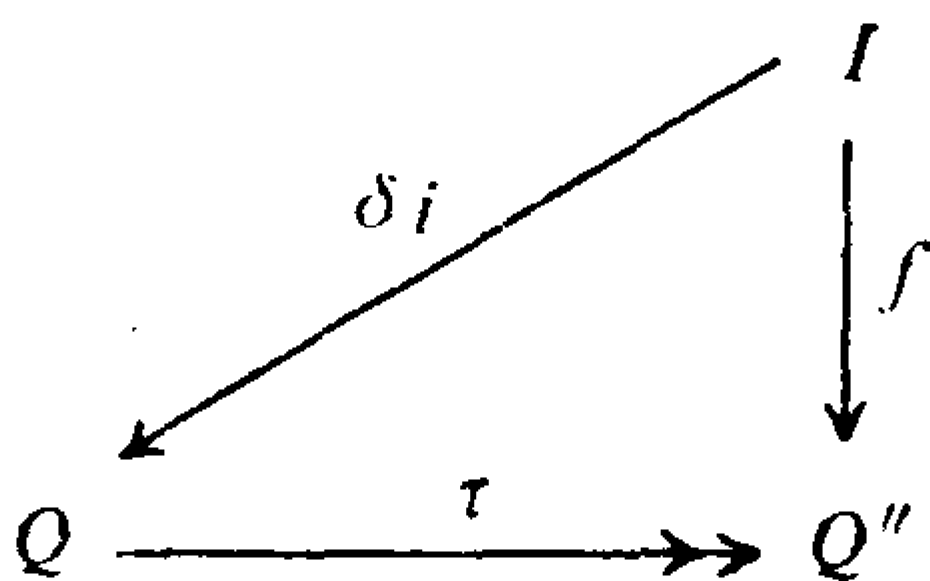
其中补出的g是左R-映射。

因为R是投射左R-模，故又可补成交换图，



其中补出的 δ 是左 R-映射。

于是有交换图：



这是因为 $\tau(\delta i)=(\tau\delta)i=gi=f$。因此 I 是投射左 R-模。故 R 是左遗传环。

13.4 Dedekind 环的古典定义

Dedekind环原先是通过可逆理想来定义的。

定义13.2 设 R 是交换整环，Q 是 R 的分式域。再设 I 是 R 的理想。若存在 $a_1,\cdots,a_n\in I$，$q_1,\cdots,q_n\in Q$，满足：

(i) $q_iI\subseteq R$，$i=1,\cdots,n$；

(ii) $\sum_{i=1}^{n}q_ia_i=1$。

则称 I 是 R 的一个可逆理想。

容易知道，上面的 $I=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$。从而又可知可逆理想是非零的 $f.g.$ 理想。

又易知，交换整环的非零主理想必是可逆理想。

交换整环的非零投射理想与可逆理想有密切关系。我们有下

面定理。

定理13.3　设R是交换整环。若I是R的理想，且$I\neq 0$，则I是投射左R-模，当且仅当I是R的可逆理想。

证　设I是投射左R-模，则存在$\{a_k | k\in K\}\subseteq I$及左$R$-映射集$\{\varphi_k: I\longrightarrow R | k\in K\}$满足：

(i) 对于每一个$a\in I$，几乎所有$\varphi_k(a)=0$；

(ii) $a=\sum_{k\in K}\varphi_k(a)a_k$，　$\forall a\in I$。

为证I是R的可逆理想，我们先来找q_i。为此，先任意取定一个$b\in I$，$b\neq 0$，并对$k\in K$，定义

$$q_k=\frac{\varphi_k(b)}{b}$$

易知q_k与b的选取无关，且几乎所有$q_k=0$。又因为$0\neq b=\sum_{k\in K}\varphi_k(b)a_k$，故不能所有$q_k=0$。设$q_{k_1},\cdots,q_{k_n}$皆不为零，而其余$q_k$皆为零。随之就有$a_{k_1},\cdots,a_{k_n}$。容易知道$q_{k_i}I\subseteq R, i=1,\cdots,n$，且$\sum_{i=1}^{n}q_{k_i}a_{k_i}=1$。故$I$是$R$的可逆理想。

反之，设I是R的可逆理想，则有$a_1,\cdots,a_n\in I$及$q_1,\cdots,q_n\in Q$使$q_iI\subseteq R$，$i=1,\cdots,n$；且$\sum_{i=1}^{n}q_ia_i=1$。命

$$\begin{aligned}\varphi_k:\ I&\longrightarrow R\\ b&\longmapsto q_kb,\end{aligned}$$

$k=1,\cdots,n$。易知φ_k是左R-映射。于是有$\{a_1,\cdots,a_n\}\subseteq I$及$\{\varphi_k: I\to R | k=1,\cdots,n\}$满足：对于每一个$a\in I$，几乎所有$\varphi_k(a)=0$，且$a=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(a)a_k$，　$\forall a\in I$。故I是投射左R-模。

由这个定理立刻知道，若R是交换整环，则R是 Dedekind

环，当且仅当R的每一个非零理想都是可逆理想。而原先Dedekind环就是这样定义的。

13.5 Dedekind 环的一些性质

我们指出 Dedekind环的两个重要性质，即有下面两个定理。

定理13.4 Dedekind环是 Noether 环。

证 Dedekind环的零理想是$f.g.$的，Dedekind 环的非零理想是可逆理想，也是$f.g.$的。故Dedekind环是 Noether 环。

定理13.5 设R是交换整环，则R是 Dedekind 环，当且仅当可除R-模必是内射R-模。

证 若可除R-模必是内射R-模，则因内射模的同态象必是可除模，从而是内射模，故R是 Dedekind 环。

反之，设R是Dedekind 环，命D是任意一个可除左R-模。为证D是内射模，考虑图：

$$\begin{array}{ccc} I & \stackrel{i}{\hookrightarrow} & R \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

其中I是R的一个非零理想，f是左R-映射。

因为I是R的可逆理想，故有$a_1, \cdots, a_n \in I$及$q_1, \cdots, q_n \in Q$（Q是R的分式域）满足$q_i I \subseteq R$，$i=1, \cdots, n$及$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i = 1$。并可认为$a_1, \cdots, a_n$都不为零。

因为D是可除左R-模，故对于$f(a_i) \in D$及$0 \neq a_i \in R$，有$d_i \in D$使

$$f(a_i) = a_i d_i, \quad i = 1, 2, \cdots n.$$

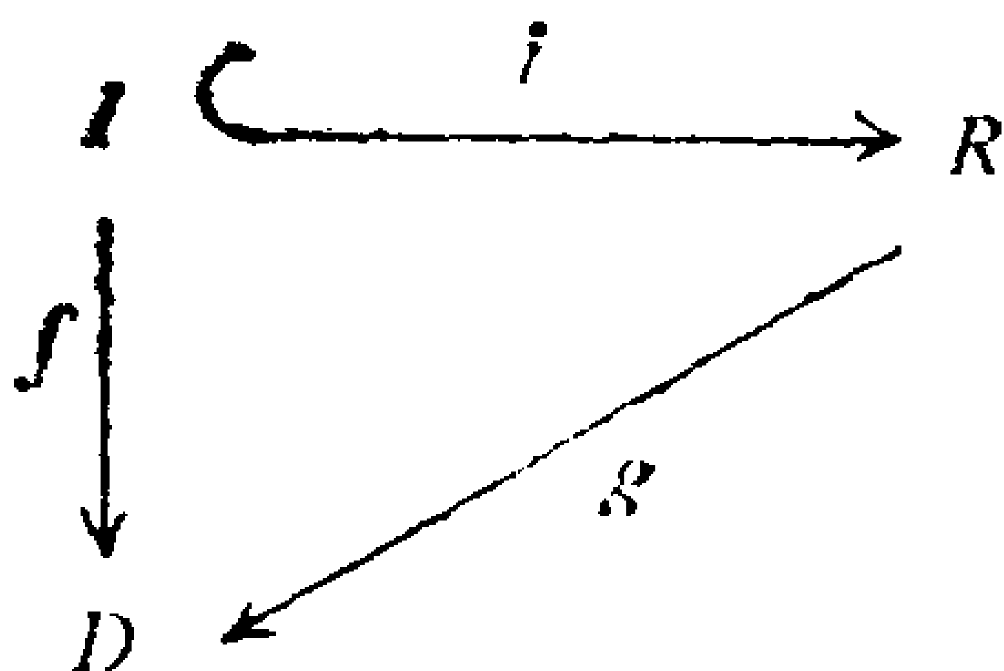
于是当$b \in I$时，有

$$f(b)=f\left(b\sum_{i=1}^{n}q_ia_i\right)=b\sum_{i=1}^{n}(q_ia_i)d_i$$

命 $d=\sum_{i=1}^{n}(q_ia_i)d_i\in D$，则有

$$f(b)=bd,\quad \forall\, b\in I.$$

现在命$g: R\longrightarrow D$ 是 $r\longmapsto rd$，则易知 g 是左R-映射，且立刻看出下图交换：



故D是内射左R-模。

§14 半遗传环及 Prüfer 环

14.1 半遗传环及 Prüfer 环的定义

定义14.1 设R是环。若R的每一个$f.g.$左（右）理想都是投射左（右）R-模，则称R是左（右）半遗传环。若R既是左半遗传环，又是交换整环，则称R是 Prüfer 环。

例14.1 左遗传环是左半遗 传 环，Dedekind 环 是 Prüfer 环。

例14.2 若R是左 Noether 环，则R是左遗传环，当且仅当R是左半遗传环。

证 设R是左半遗传环。因为R原是左 Noether 环，故R的每一个左理想都是 $f.g.$ 的。因此R的每一个左理想都是投射左

R-模。所以R是左遗传环。

例14.3 Von Neumann正则环是左半遗传环。

证 设I是 Von Neumann 正则环R的任意一个$f.g.$左理想，则存在幂等元e使$I=Re$，于是有$R=Re\oplus R(1-e)$。故$I=Re$是投射左R-模。因此R是左半遗传环。

14.2 左半遗传环的一个性质

我们指出左半遗传环上自由模的$f.g.$子模的一个重要性质，即有下面定理。

定理14.1 设R是左半遗传环，F是自由左R-模。若A是F的一个$f.g.$子模，则R有有限个$f.g.$左理想$I_1,\cdots,I_n$使

$$A\cong I_1\oplus\cdots\oplus I_n.$$

证 可以认为$F\neq 0$。先考虑F有有限基的情形。当F有基$\{x_1\}$时，命$I=\{r\in R|rx_1\in A\}$，则I是R的左理想，且易知$\varphi: I\longrightarrow A$, $r\longmapsto rx_1$是左R-同构映射。故$A\cong I$。

设对于有基$\{y_1,\cdots,y_m\}$, $m<n$的自由左R-模，定理成立。今设F有基$\{x_1,\cdots,x_n\}$，并命

$$B=A\cap(Rx_1\oplus\cdots\oplus Rx_{n-1}).$$

当$a\in A$时，有唯一表示式$a=b+rx_n$，其中$b\in Rx_1\oplus\cdots\oplus Rx_{n-1}$, $r\in R$。现在命

$$\varphi:\ A\longrightarrow R$$
$$a\longmapsto r,$$

则易知φ是左R-映射，且$\ker\varphi=B$。于是有左R-短正合列

$$0\longrightarrow B\overset{\alpha}{\hookrightarrow} A\overset{\varphi}{\longrightarrow} I_1\longrightarrow 0 \qquad (甲)$$

其中$I_1=\mathrm{im}\varphi$是R的左理想。

因为A是$f.g.$的，故I_1是$f.g.$的，从而I_1是投射左R-模。故（甲）可裂。因此有

$$A\cong I_1\oplus B.\qquad\qquad(乙)$$

因为B是自由左R-模 $Rx_1\oplus\cdots\oplus Rx_{n-1}$的子模，且由（乙）知$B$是$A$的一个同态象，从而$B$是$f.g.$的．故由归纳假定知 $B\cong I_2\oplus\cdots\oplus I_n$，其中$I_2,\cdots,I_n$是$R$的$f.g.$左理想．因此 $A\cong I_1\oplus\cdots\oplus I_n$.

现在考虑一般情形．设F有基$\{x_k|k\in K\}$．因为A是$f.g.$的，故存在有限个$x_{k_1},\cdots,x_{k_n}$使 $A\subseteq Rx_{k_1}\oplus\cdots\oplus Rx_{k_n}$．故由刚才的证明知$R$有有限个$f.g.$左理想 $I_1,\cdots,I_n$使 $A\cong I_1\oplus\cdots\oplus I_n$.

14.3　左半遗传环的刻划

现在我们给出左半遗传环的一种刻划，即有下面定理．

定理14.2　环R是左半遗传环，当且仅当每一个投射左R-模的$f.g.$子模都是投射左R-模．

证　设R是左半遗传环．再设P是投射左R-模，A是P的一个$f.g.$子模．因为投射模总是一个自由模的子模，故A是一个自由左R-模的$f.g.$子模．因此 $A\cong I_1\oplus\cdots\oplus I_n$，其中每一个$I_j$都是$R$的$f.g.$左理想，从而每一个$I_j$都是投射左$R$-模．因此$A$是投射左$R$-模．

反之，设每一个投射左R-模的$f.g.$子模都是投射左R-模，则左R-模R的$f.g.$子模是投射模，即环R的$f.g.$左理想都是投射左R-模．故R是左半遗传环．

14.4　Prüfer 环的刻划及 Prüfer 环的一些性质

为了给出 Prufer 环的一种刻划，我们先证明一个引理，它指出了$f.g.$非挠模的一个重要性质．

引理14.1　$f.g.$非挠左R-模可以嵌入一个$f.g.$自由左R-模．

证　这时首先R是交换整环．设A是$f.g.$非挠左R-模．我们先可将A嵌入一个内射左R-模E：$A\overset{\alpha}{\rightarrowtail}E$.

命

$$\varphi:\ A \longrightarrow E/t(E)$$
$$a \longmapsto \alpha(a)+t(E)$$

其中 $t(E)=\{e\in E \mid$ 存在 $0\neq r\in R$ 使 $re=0\}$ 是 E 的挠子模。易知 φ 是左 R-映射。

若 $\varphi(a)=0$，则 $\alpha(a)\in t(E)$，故存在 $0\neq r\in R$ 使 $r\alpha(a)=0$。从而 $\alpha(ra)=0$。因为 α 是左 R-单射，故 $ra=0$。于是 $a\in t(A)$。但 A 是非挠左 R-模，因此 $t(A)=0$。从而 $a=0$，所以 φ 是单射。

设 Q 是 R 的分式域。我们可以将 $E/t(E)$ 作成左 Q-模，即 Q 上向量空间：

由于 E 是内射左 R-模，故 E 是可除左 R-模，从而 $E/t(E)$ 是可除左 R-模。故当 $m\in E/t(E)$，$0\neq s\in R$ 时，有 $m_0\in E/t(E)$ 使 $m=sm_0$。又因为 $E/t(E)$ 是非挠左 R-模，所以 m_0 唯一。现在对于 $m\in E/t(E)$ 及 $\frac{r}{s}\in Q$，其中 $r,s\in R$，且 $s\neq 0$，定义

$$\frac{r}{s}m=rm_0,$$

容易验证 $E/t(E)$ 成为左 Q-模，且当 $r\in R\subseteq Q$，$m\in E/t(E)$ 时，rm 作为左 Q-模 $E/t(E)$ 中的元与作为左 R-模 $E/t(E)$ 中的元是相同的。

因为 A 是 f.g. 左 R-模，故可设 $A=Ra_1+\cdots+Ra_n$。命左 Q-模 $E/t(E)$ 有基 $\{v_j \mid j\in J\}$，则可设 $\varphi(a_i)\in Qv_1\oplus\cdots\oplus Qv_m$，$i=1,\ \cdots,\ n$。因此可以设 $\varphi(a_i)=\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{r_{ij}}{s_{ij}}v_j$，$i=1,\cdots,n$。再命 $s=\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}s_{ij}$，$w_i=\frac{1}{s}v_i, i=1,\cdots,m$。因为 $v_1,\cdots,v_m$ 是 Q-线性无关的，故 $w_1,\cdots,w_m$ 是 Q-线性无关的，从而 $w_1,\cdots,w_m$ 是 R-线性无关的。

现在命

$$B = Rw_1 \oplus \cdots \oplus Rw_m,$$

则B是 f.g. 自由左R-模，且易知 $\varphi(a_i) \in B$，$i = 1, \cdots, n$，故有

$$A \rightarrowtail^{\varphi} B$$

即A可以嵌入f.g. 自由左R-模B。

现在我们给出 Prüfer 环的一种刻划，即有下面定理。

定理14.3 交换整环R是 Prüfer环，当且仅当每一个f.g. 非挠左R-模都是投射左R-模。

证 设R是 Prüfer 环。若A是 f.g. 非挠左R-模，则由引理14.1知A可以嵌入一个f.g. 自由左R-模。于是 A 是一个自由左R-模的 f.g. 子模，从而是投射左R-模的 f.g. 子模。故由定理14.2知A是投射左R-模。

反之，设每一个f.g. 非挠左R-模都是投射左R-模。命 I 是环R的任意一个 f.g. 左理想，则当 $a \in t(I)$ 时，有 $0 \neq r \in R$ 使 $ra = 0$。但R是交换整环，故$a = 0$。因此$t(I) = 0$，从而 I 是f.g. 非挠左R-模。故 I 是投射左R-模。因此R是Prüfer 环。

最后，我们指出 Prüfer 环上平坦模与非挠模之间的关系。有下面定理。

定理14.4 设R是Prüfer环，则右R-模B是平坦模，当且仅当 B是非挠模。

证 设 B 是平坦模。首先总有一个右R-短正合列

$$0 \longrightarrow K \overset{\alpha}{\hookrightarrow} F \overset{\varphi}{\longrightarrow} B \longrightarrow 0$$

其中F是自由右R-模。

先不难证明交换整环上的自由模是非挠模。事实上，设 S 是交换整环，G是自由右S-模，有基$\{v_j \mid j \in J\}$，则当$z \in t(G)$ 时，可设 $z = \sum_{l=1}^{m} v_{j_l} s_l$。因为存在 $0 \neq s \in S$ 使 $zs = 0$，故 $s_l = 0$，

$l=1,\cdots,m$。从而 $z=0$，因此G是非挠右S-模。

现在设$b\in t(B)$。则有 $0\neq r\in R$ 使 $br=0$。因为 φ 是右R-满射，故有$x\in F$使$\varphi(x)=b$，从而$\varphi(xr)=0$。故 $xr\in\ker\varphi=K$。因为 B 是平坦右R-模，故对于 R 的左理想 Rr，有 $K\cap FRr=KRr$，由于 $xr\in FRr$，故 $xr\in K\cap FRr=KRr$。因此 $xr=k_1r_1r+\cdots+k_sr_sr$。于是 $(x-k_1r-\cdots-k_sr_s)r=0$。因为 F 是非挠右R-模，故$x=k_1r_1+\cdots+k_sr_s\in K=\ker\varphi$.从而$b=\varphi(x)=0$。因此$t(B)=0$。故$B$是非挠模。

反之，设 B是非挠模。因为非挠模的非零子模仍是非挠模，故 B的每一个非零 $f.g.$子模都是 $f.g.$非挠模，从而由定理14.3知B的每一个非零$f.g.$子模都是投射模。因此B的每一个$f.g.$子模都是平坦模。故由推论8.4知 B是平坦模。

§15 拟 Frobenius 环

15.1 拟 Frobenius 环的定义

定义15.1 若环R既是左Noether环，又是右 Noether 环，且R是内射左R-模，则称R是拟 Frobenius 环，或 QF环。

例15.1 半单环是 QF 环。

证 设R是半单环，则每一个左R-模都是内射模，因此R是内射左R-模。又因为这时内射左R-模的直和是内射左R-模，故由定理10.10知R是左Noether环。同理，R是右 Noether环。所以R是QF环。

于是由例11.1知，当G是有限群，K是域，且 $\mathrm{char}K\nmid|G|$时，KG是QF环。

稍后我们将证明，无需对 $\mathrm{char}K$ 作任何限制，KG恒是QF环。这是 QF 环的一个重要例子。

例15.2　设R是主理想整环，I是R的非零理想，则R/I是QF环。

证　设J/I是R/I的任意一个理想，则设$J=Rb$时，易知$J/I=(R/I)(b+I)$。故J/I是f.g.左R/I-模。因此R/I是左Noether环。当然R/I也是右Noether环。

为证R/I是内射左R/I-模，考虑图：

$$\begin{array}{ccc} J/I & \overset{a}{\hookrightarrow} & R/I \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ R/I & & \end{array}$$

其中J是R的一个理想，且$J\supseteq I$，f是左R/I-映射。

设$J=Rb$。不难证明，存在$r_0\in R$使

$$f(rb+I)=(r_0+I)(rb+I),\quad \forall r\in R.$$

事实上，设$I=Ra$，则因$a\in I\subseteq J$，故有$c\in R$使$a=cb$。又由$I\neq 0$知$c\neq 0$。设$f(b+I)=s_0+I$，则$(c+I)(s_0+I)=(c+I)f(b+I)=f((c+I)(b+I))=f(a+I)=0$，故$cs_0\in I$。因此有$r_0\in R$使$cs_0=r_0a=cr_0b$。因此$s_0=r_0b$。从而当$r\in R$时，$f(rb+I)=f((r+I)(b+I))=(r+I)f(b+I)=(r+I)(s_0+I)$
$=(r+I)(r_0b+I)=(r_0+I)(rb+I)$。

现在命$g: R/I\longrightarrow R/I$是$r+I\longmapsto(r_0+I)(r+I)$，则易知$g$是左$R/I$-映射，且有交换图：

$$\begin{array}{ccc} J/I & \overset{a}{\hookrightarrow} & R/I \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ R/I & & \end{array}$$

故R/I是内射左R/I-模。因此R/I是QF环。

由此又可知$\mathbf{Z}/(n\mathbf{Z})(n\geqslant 1)$ 是QF环。

15.2 拟 Frobenius 环的刻划

我们给出拟Frobenius环的一种刻划，即有下面定理。

定理15.1 环R是 QF 环，当且仅当R既是左 Noether 环，又是右 Noether 环，且每一个投射左R-模都是内射左R-模。

证 设R是QF环。由于R是左 Noether 环，故内射左R-模的直和是内射左R-模。又因为 R 是内射左R-模，故首先可知自由左R-模是内射模。于是当P是投射左R-模时，由于 P 是一个自由左R-模的一个直和项，故P是内射左R-模。

反之，设R既是左Noether环，又是右 Noether 环，并且每一个投射左R-模都是内射左R-模。则 R 是内射左R-模。故R是QF环。

15.3 Frobenius 代数

Frobenius代数在群表示论中有重要作用。QF环与 Frobenius 代数有密切联系。

定义15.3 设 R 是域K上有限维结合代数。于是对于左K-模R及左K-模K，有 $\mathrm{Hom}_K(R,K)$，并由于R是(K,R)-双模，故$\mathrm{Hom}_K(R,K)$是左R-模。

若有左R-同构：

$$\mathrm{Hom}_K(R,K)\cong R,$$

则称R是域K上 Frobenius 代数。

定理15.2 域K上 Frobenius 代数是QF环。

证 设R是域K上Frobenius代数。因为有(K,R)-双模R，且 R 作为右R-模是平坦模，K是域，从而是半单环，故K是内射左K-模，因此由引理 8.3 知 $\mathrm{Hom}_K(R,K)$是内射左R-模。所以R是内射左R-模。

设I是环R的左理想，且$I\neq 0$，容易知道I是域K上向量空间R的子空间. 这是因为设1是环R的单位元，则当$k\in K$，$x\in I$时，有$kx=(k1)x\in I$。于是由于R是K上有限维向量空间，故可设K上向量空间I有基$\{x_1,\cdots,x_n\}$。当$a\in I$时，有$a=k_1x_1+\cdots+k_nx_n$，$k_i\in K$，$i=1,\cdots,n$。从而$a=(k_11)x_1+\cdots+(k_n1)x_n$，故$I$是f.g. 左$R$-模。因此$R$的每一个左理想都是f.g. 左$R$-模。所以$R$是左 Noether 环。同理，$R$是右 Noether 环。故$R$是QF环。

现在我们给出域上有限维结合代数是Frobenius 代数的一种充分条件。有下面定理。

定理15.3 设R是域K上有限维结合代数。若存在一个左K-映射f: $R\longrightarrow K$使$\ker f$不含环R的非零左理想，则R是Frobenius 代数。

证 当$r\in R$时，命

$$\theta_r:\ R\longrightarrow K$$
$$x\longmapsto f(xr),$$

则易知θ_r是左K-映射。现在命

$$\theta:\ R\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(R,K)$$
$$r\longmapsto\theta_r.$$

因为K是域，从而是交换环，故$\mathrm{Hom}_K(R,K)$是左K-模：当$k\in K$，$\varphi\in\mathrm{Hom}_K(R,K)$时，$(k\varphi)(x)=k\varphi(x)$，$\forall\, x\in R$。易知$\theta$是左$K$-映射。

不难证明θ是单射. 事实上，若$\theta_r=0$，则$\theta_r(x)=0$，$\forall\, x\in R$。命$I=Rr$，则I是环R的左理想，且当$r'r\in I$时，$f(r'r)=\theta_r(r')=0$，故$I\subseteq\ker f$。从而$I=0$。因此$r=0$，所以θ是单射。

因为域K上向量空间R有限维，而$\mathrm{Hom}_K(R,K)$是K上向量空间R的全体线性函数作成的K上向量空间，故域K上向量空间$\mathrm{Hom}_K(R,K)$的维数也有限，且与域上向量空间R的维数相等。现在θ是左K-单射，故θ是左K-同构映射。

但是易知θ也是左R-映射．事实上，当$r', r\in R$时，$\theta(r'r)=\theta_{r'r}$，$r'\theta(r)=r'\theta_r$．而当$x\in R$时，有

$$\theta_{r'r}(x)=f(xr'r),$$

$$(r'\theta_r)(x)=\theta_r(xr')=f(xr'r),$$

故$\theta(r'r)=r'\theta(r)$．因此θ是左R-映射．

于是有左R-同构：$\mathrm{Hom}_K(R,K)\cong R$．所以$R$是Frobenius代数．

最后，我们给出域上Frobenius代数的一个重要例子，它也是QF环的一个重要例子，即有下面定理．

定理15.4 设K是域，G是有限群，则KG是域K上Frobenius代数．

证 设$G=\{g_1=1, g_2, \cdots, g_n\}$．则首先知$KG$是域$K$上$n$维结合代数．命

$$f:\ KG\longrightarrow K$$

$$k_1g_1+\cdots+k_ng_n\longmapsto k_1,$$

则易知f是左K-映射．

若I是环KG的一个非零左理想，则有

$$0\neq r=k_1g_1+\cdots+k_ng_n\in I.$$

故至少有一个i使得

$$k_i\neq 0.$$

因为$g_i^{-1}r\in I$，而$f(g_i^{-1}r)=k_i\neq 0$，故$I\nsubseteq\ker f$．于是由定理15.3知KG是域K上Frobenius代数．

§16 局 部 环

局部环的概念与环的局部化及模分解成不可分解子模直和时的分解唯一性有密切关系．不过我们将并不论及这两点．本节只给出局部环的刻划并探讨局部环上模的一些特性．我们将先对环

的 Jacobson 根作一极其初步的讨论。

16.1　环的 Jacobson 根

首先，不难证明非零 f.g. 左 R-模 M 必有极大子模。这里 M 的子模 N 叫做 M 的一个极大子模，是指 $N \neq M$，且 M 没有子模 P 满足 $N \subset P \subset M$。事实上，设 $\Omega = \{K \mid K$ 是 M 的子模，且 $K \neq M\}$，则易知 Ω 对于集的"$\subseteq$"成为偏序集，且 Ω 有极大元素。可知 Ω 的任意一个极大元素都是 M 的一个极大子模。

由此又可知，任何非零环都有极大左理想。

现在我们给出环的 Jacobson 根的定义。

定义16.1　环 R 的所有极大左理想的交叫做环 R 的 Jacobson 根，记作 $J(R)$。

因为环 R 的极大左理想总是左 R-模 R 到一个单左 R-模的一个左 R-映射的核，且反之，左 R-模 R 到一个单左 R-模的非零左 R-映射的核必是环 R 的一个极大左理想，故有

$$J(R) = \bigcap \ker f$$

其中 f 遍历左 R-模 R 到单左 R-模的左 R-映射。

由定义看出，$J(R)$ 是环 R 的左理想。但实际上它还是环 R 的理想，即有下面定理。

定理16.1　$J(R)$ 是环 R 的理想。

证　先不难证明，对于任何 $g \in \mathrm{End}_R R$，恒有

$$g(a) \in J(R), \quad \forall\, a \in J(R).$$

事实上，若 f 是左 R-模 R 到一个单左 R-模 V 的一个左 R-映射，则 fg 是 R 到 V 的一个左 R-映射。故当 $a \in J(R)$ 时，$a \in \ker(fg)$。从而 $g(a) \in \ker f$。因此 $g(a) \in J(R)$。

现在对于 $r \in R$，命

$$h:\ R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto xr,$$

则 $h \in \mathrm{End}_R R$。从而有

$$ar \in J(R), \ \forall a \in J(R).$$

故$J(R)$是环R的右理想. 因此 $J(R)$ 是R的理想.

现在我们给出 $J(R)$ 的一种刻划, 即有下面定理.

定理16.2 $J(R)=\{a\in R \mid Ra$ 是左R-模R的小子模$\}$.

证 设 $a\in J(R)$. 若 Ra 不是左R-模R的小子模, 则环R有一个左理想 $B\subset R$ 使 $R=Ra+B$. 易知 $R/B=\langle a+B\rangle$ 是循环左R-模, 且不为零, 从而R/B是非零f.g.左R-模, 故R/B有极大子模T. 命 $g: R\longrightarrow R/B$ 及 $f: R/B\longrightarrow \dfrac{(R/B)}{T}$ 都是自然同态映射, 则fg 是左R-模R到单左R-模$\dfrac{(R/B)}{T}$的一个左 R-映射. 故 $fg(a)=0$. 从而 $f(a+B)=0$. 因为 $\{a+B\}$ 是 R/B 的生成系, 故 $f=0$, 但明显知 $f\neq 0$. 矛盾. 故 Ra 是左 R-模R的小子模.

反之, 设 $a\in R$, 且Ra是左R-模R的小子模.

命M是环R的任意一个极大左理想, 则$M\subseteq Ra+M\subset R$, 从而$M=Ra+M$. 故 $a\in Ra\subseteq M$, 因此 $a\in J(R)$.

由这个定理可以得到下面两个推论.

推论16.1 若$a\in J(R)$,则 $1-a$ 是R中可逆元.

证 先易知对于任何 $b\in J(R)$, $1-b$ 在 R 中有左逆元. 这是因为$R=Rb+R(1-b)$, 从而$R(1-b)=R$. 故$1-b$在R中有左逆元.

今设$a\in J(R)$, 则有 $x\in R$ 使

$$x(1-a)=1. \tag{甲}$$

因为$-xa\in J(R)$, 故 $1+xa$ 在 R 中有左逆元. 由 (甲) 知 $1+xa=x$, 故 x在R中有左逆元. 但 (甲) 表明 x 在R中有右逆元 $1-a$. 故 $1-a$ 是 x 的逆元, 从而 $1-a$ 是R中可逆元.

推论16.2 $r\in R$ 在环 R 中可逆, 当且仅当 $r+J(R)$ 在 $R/J(R)$ 中可逆.

证 易知当r在R 中可逆时, 必定 $r+J(R)$ 在 $R/J(R)$ 中

可逆。

反之，设$r+J(R)$在$R/J(R)$中有逆元$s+J(R)$。则$1-rs$及$1-sr$都$\in J(R)$。故由推论16.1知rs及sr在R中都可逆。于是有$x, y\in R$使$rsx=1$，$ysr=1$。故r在R中可逆。

我们进一步给出当$R/J(R)$是除环时$J(R)$的一种刻划。有下面推论。

推论16.3　若$R/J(R)$是除环，则$J(R)$由环R中所有非可逆元组成。

证　由$J(R)\subset R$先可知$J(R)$中每一个元都是R中非可逆元。而当$b\notin J(R)$时，由$b+J(R)\neq 0$及$R/J(R)$是除环，知$b+J(R)$在$R/J(R)$中可逆。故b是R中可逆元。

现在我们给出下面著名的引理。

引理16.1（Nakayama 引理）　若A是f. g. 左R-模，且$J(R)A=A$，则$A=0$。

证　先可证明A必是循环模。事实上，若A不是循环模，则可设$A=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle, n\geqslant 2$，且$\{a_1,\cdots,a_n\}$的任一真子集都不是$A$的生成系。由$A=J(R)A$，可设$a_1=\sum_{i=1}^{t} r_i b_i$，其中诸$r_i\in J(R)$，$b_i\in A$。再设$b_i=\sum_{j=1}^{n} s_{ij}a_j$，　$i=1,\cdots,t$，　其中诸$s_{ij}\in R$。则记$u_j=\sum_{i=1}^{t} r_i s_{ij}$，$j=1,\cdots,n$时，就有$u_j\in J(R)$，且

$$a_1=u_1a_1+\cdots+u_na_n.$$

从而$(1-u_1)a_1=u_2a_2+\cdots+u_na_n$。因为$u_1\in J(R)$，故$1-u_1$是$R$中可逆元，因此$a_1\in\langle a_2,\cdots,a_n\rangle$。这导致$\{a_2,\cdots,a_n\}$是$A$的一个生成系。矛盾。因此$A$是循环模。

现在设$A=Ra$。则由$J(R)A=A$，可设$a=\sum_{i=1}^{t} r_i b_i$，其中诸

$r_i \in J(R)$，$b_i \in A$。设 $b_i = s_i a$，$s_i \in R$，$i = 1, \cdots, t$。则记 $u = \sum_{i=1}^{t} r_i s_i$ 时，就有 $u \in J(R)$，且 $(1-u)a = 0$。因为 $1-u$ 是 R 中可逆元，故 $a = 0$，因此 $A = 0$。

由这个引理可以得到下面一个推论。

推论16.4 若 A 是 f.g. 左 R-模，则 $J(R)A$ 是 A 的小子模。

证 设 A 的一个子模 B 满足

$$J(R)A + B = A,$$

则 $A/B = \frac{J(R)A + B}{B}$，但易知 $\frac{J(R)A+B}{B} = J(R)(A/B)$。故

$$A/B = J(R)(A/B)。$$

因为 A 是 f.g. 左 R-模，故 A/B 是 f.g. 左 R-模。因此由 Nakayama 引理知 $A/B = 0$。从而 $B = A$，所以 $J(R)A$ 是 A 的小子模。

16.2 局部环的定义及刻划

定义16.4 若环 R 有且仅有一个极大左理想，则称 R 是一个局部环。

可知局部环 R 的唯一的极大左理想就是 R 的 Jacobson 根 $J(R)$。

现在我们给出局部环的一种刻划，即有下面定理。

定理16.3 设 R 是环，则以下条件等价：

(i) R 是局部环；

(ii) $R/J(R)$ 是除环；

(iii) R 的任意两个非可逆元的和是非可逆元；

(iv) R 的全体非可逆元作成的集是 R 的理想。

证 (i)$\Rightarrow$(ii)。我们知道，若一个非零环除了 0 及本身以外没有其它左理想，则这个环是除环。因此只要证明 $R/J(R)$ 除了 0 及本身以外没有其它左理想。为此，设 $L/J(R)$ 是 $R/J(R)$

的一个左理想，且$L/J(R) \neq R/J(R)$。于是R的左理想$L \neq R$。命$\Omega = \{X \mid X$是R的左理想，且$L \subseteq X \subset R\}$，则易知$\Omega$对于集的"$\subseteq$"成为偏序集，且$\Omega$有极大元素。命$N$是$\Omega$的一个极大元素，则$L \subseteq N$，且$N$是$R$的一个极大左理想。因为$R$是局部环，故$N = J(R)$。因此$L = J(R)$。从而$L/J(R) = 0$。这就证明了$R/J(R)$除了0及本身以外没有其它左理想。故$R/J(R)$是除环。

(ii)$\Rightarrow$(iii)。 因为$R/J(R)$是除环，故由推论16.3知$J(R)$由R的所有非可逆元组成。因此R的任意两个非可逆元的和是非可逆元。

(iii)$\Rightarrow$(iv)。 命I是环R的全体非可逆元作成的集。于是当$a, b \in I$时有$a + b \in I$。

不难证明I是R的左理想。事实上，若存在$r \in R$及$a \in I$使$ra \notin I$，则ra是R的可逆元。故有$v \in R$使$v(ra) = (ra)v = 1$。命$u = vr$，则$ua = 1$。故a有左逆元。若au是R的可逆元，则a将有右逆元，这不可能。因此$au \in I$，又因为$(1 - au)a = 0$，且$a \neq 0$。故$1 - au$不是可逆元，因此$1 - au \in I$，于是$1 = (1 - au) + au \in I$。矛盾。所以I是R的左理想。

用同样方法可以证明I也是R的右理想。

(iv)$\Rightarrow$(i)。 命I是环R的全体非可逆元作成的集，则I R的理想。我们证明，I就是R的唯一的极大左理想。

首先因为$1 \notin I$，故$I \neq R$。若R的一个左理想L满足$I \subset L \subseteq R$，则有$a \in L$且$a \notin I$。于是a是可逆元，从而$L = R$。故I是R的一个极大左理想。

若M是R的任一极大左理想，则$M \neq R$，故M不含可逆元，从而$M \subseteq I$，因此$M = I$。这就证明了R是局部环。

因为局部环的唯一极大左理想就是它的 Jacobson 根，故据前面的讨论可以推知局部环的一些基本性质。有以下推论。

推论16.5 设R是局部环，其唯一的极大左理想是J。

则有

(i) J 由环 R 的全体非可逆元组成；

(ii) J 是 R 的理想；

(iii) 当 $r\in J$ 时，$1-r$ 是 R 的可逆元；

(iv) R/J 是除环；

(v) 若 A 是 $f.g.$ 左 R-模，且 $JA=A$，则 $A=0$；

(vi) 若 A 是 $f.g.$ 左 R-模，则 JA 是 A 的小子模。

16.3 局部环上模的一些特性

我们将证明：局部环是 IBN 环；局部环上 $f.g.$ 投射模是自由模；局部环上 $f.g.$ 模有投射覆盖。

定理16.4 局部环是 IBN 环。

证 设 R 是局部环。因为有环自然同态映射

$$\varphi:\ R\longrightarrow R/J(R),$$

且 $\varphi\neq 0$，而 $R/J(R)$ 是除环，从而 $R/J(R)$ 是IBN环，故由定理1.23知 R 是IBN环。

为了证明局部环上模的另外两个特性，我们先证明下面引理。

引理16.3 设 R 是局部环。再设 A 是 $f.g.$ 左 R-模，并设 $\{a_1,\cdots,a_n\}(n\geqslant 2)$ 是 A 的一个极小生成系，即 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 的任一真子集都不是 A 的生成系。命 F 是有基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的自由左 R-模，且左 R-映射 $\varphi:\ F\longrightarrow A$ 满足 $\varphi(x_i)=a_i$，$i=1,\cdots,n$。则

$$\ker\varphi\subseteq J(R)F.$$

证 设 $k\in\ker\varphi$，并设 $k=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i$，则

$$r_1a_1+\cdots+r_na_n=0.$$

若 $k\in J(R)F$，则至少有一个 $r_i\in J(R)$。于是 r_i 是 R 的可逆元，从而 $\{a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n\}$ 是 A 的一个生成系，矛盾。故 $\ker\varphi\subseteq J(R)F$。

定理16.5　局部环上$f.g.$投射模是自由模。

证　设R是局部环，A是$f.g.$投射左R-模。

若$A=0$，则A是自由模。

若$A=Ra$，$a\neq 0$。命F是有基$\{x\}$的自由左R-模，并命左R-映射$\varphi: F\longrightarrow A$满足$\varphi(x)=a$。则有左$R$-短正合列

$$0\longrightarrow \ker\varphi \xhookrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\varphi} A\longrightarrow 0 \tag{1}$$

当$k\in\ker\varphi$时，设$k=rx$，则$ra=0$，若$r\notin J(R)$，则r是R的可逆元，从而$a=0$，矛盾，故$r\in J(R)$，从而$k\in J(R)F$。故$\ker\varphi\subseteq J(R)F$。

因为A是投射模，故（1）可裂，从而有

$$F=\ker\varphi\oplus A',\quad A'\cong A. \tag{2}$$

由于F是$f.g$模，可知$\ker\varphi$是$f.g.$模。

由（2）易知有

$$J(R)F=J(R)\ker\varphi\oplus J(R)A', \tag{3}$$

又因为$J(R)\ker\varphi\subseteq\ker\varphi\subseteq J(R)F$，故有

$$\ker\varphi=J(R)\ker\varphi\oplus(\ker\varphi\cap J(R)A'), \tag{4}$$

于是由$\ker\varphi\cap J(R)A'\subseteq\ker\varphi\cap A'=0$知

$$\ker\varphi=J(R)\ker\varphi, \tag{5}$$

故据Nakayama引理知$\ker\varphi=0$。因此$F\cong A$，故A是自由模。

最后，设$\{a_1,\cdots,a_n\}(n\geqslant 2)$是$A$的一个极小生成系，并命$F$是有基$\{x_1,\cdots,x_n\}$的自由左$R$-模，且左$R$-映射$\varphi: F\longrightarrow A$满足$\varphi(x_i)=a_i$，$i=1,\cdots,n$。则同样有上面的(1)、(2)、(3)。又因为由引理16.3知$\ker\varphi\subseteq J(R)F$，故同样有上面的(4)、(5)。因此也有$\ker\varphi=0$。从而$F\cong A$。故$A$是自由模。

定理16.6　局部环上$f.g.$模有投射覆盖。

证　设R是局部环，A是$f.g.$左R-模。

若$A=0$，则A是投射模，当然A有投射覆盖。

若 $A=Ra$, $a\neq 0$. 命F是有基$\{x\}$的自由左R-模, 并命$\varphi: F\longrightarrow A$是左$R$-映射, 满足$\varphi(x)=a$, 则$\varphi$是满射, 且由定理16.5中的证明知$\ker\varphi\subseteq J(R)F$. 因为由推论16.4知$J(R)F$是$F$的小子模, 故 $\ker\varphi$ 当然是F的小子模. 因此F是A的一个投射覆盖.

最后, 设$\{a_1,\cdots,a_n\}$ $(n\geqslant 2)$ 是A的一个极小生成系, 命F是有基$\{x_1,\cdots,x_n\}$的自由左R-模, 并命$\varphi: F\longrightarrow A$是左$R$-映射, 满足$\varphi(x_i)=a_i$, $i=1,\cdots,n$. 则同样由于φ是满射, 且因$\ker\varphi\subseteq J(R)F$, 从而可知 $\ker\varphi$ 是F的小子模, 故F是A的一个投射覆盖.

习 题 四

(1) 设M是左R-模. 若对任何$f.g.$子模序列

$$N_1\subseteq N_2\subseteq\cdots\subseteq N_m\subseteq\cdots$$

(即其中每一个N_i都是M的$f.g.$子模), 恒存在正整数n使$N_n=N_{n+k}$, $\forall k\geqslant 1$, 则称M对$f.g.$子模满足升链条件. 证明: 若左R-模M对$f.g.$子模满足升链条件, 则M是 Noether 模.

(2) 证明: 环

$$R=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbf{R},\ c\in\mathbf{Q}\right\}$$

是左Noether环, 但不是右Noether环.

(3) 用$E(M)$表示左R-模M的内射包络. 若R是左Noether环, $\{M_i\mid i\in I\}$是一集左R-模, 证明:

$$E(\bigoplus_{i\in I}M_i)\cong\bigoplus_{i\in I}E(M_i).$$

(4) 证明: 除环上的每一个模都是内射模.

(5) 证明: 若非零交换整环R不是域, 则R不是半单环.

(6) 证明: 半单环是左Noether环, 也是右 Noether 环.

（7）证明：环R是Von Neumann正则环，当且仅当每一个有限相关左R-模是投射左R-模。

（8）证明：环R是Von Neumann正则环，当且仅当R的每一个$f.g.$左理想是左R-模R的一个直和项。

（9）设K是Von Neumann正则环。命

$$R=\{(k_1,k_2,\cdots,k_n,\cdots)\mid k_i\in K,\ i=1,2,\cdots\}$$

并定义

$$(k_1,k_2,\cdots)+(k'_1,k'_2,\cdots)=(k_1+k'_1,k_2+k'_2,\cdots),$$
$$(k_1,k_2,\cdots)(k'_1,k'_2,\cdots)=(k_1k'_1,k_2k'_2,\cdots).$$

证明：

(i) R是 Von Neumann 正则环，但R不是半单环；

(ii) 命

$$I=\{(k_1,k_2,\cdots)\in R\mid 几乎所有k_i=0\},$$

则R/I是平坦右R-模，但不是投射右R-模。

（10）设$n>1$。证明：$\mathbf{Z}/(n\mathbf{Z})$是遗传环，当且仅当$n=p_1p_2\cdots p_s$是互异素数的积。

（11）设R是左 Noether 环，则R是左遗传环，当且仅当R的每一个左理想是平坦左R-模。

（12）证明：半单环的 Jacobson 根为 0。

（13）设p是素数，命

$$R=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}\mid a,\ b\in\mathbf{Z},\ (a,b)=1,\ (b,p)=1\right\}.$$

证明：R是局部环。

（14）证明：局部环中只有 0 及 1 是幂等元。

（15）设左R-模M既是 Noether 模，又是 Artin 模。若$f\in \mathrm{End}_R M$，命$f^{\infty}M=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}f^n(M)$，$f^{-\infty}0=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\ker f^n$，这里$f^0=1$。证明：

$$M=f^{\infty}M\oplus f^{-\infty}0,$$

且 f 在 $f^{\infty}M$ 上的限制是左 R-模 $f^{\infty}M$ 的一个自同构映射，f 在 $f^{-\infty}$ 上的限制是幂零的。

(16) 设左 R-模 $M \neq 0$。若由 $M = A \oplus B$ 必有或 $A = 0$ 或 $B = 0$，则称左 R-模 M 不可分解。证明：

(i) 若 $\mathrm{End}_R M$ 是局部环，则 M 不可分解；

(ii) 若 M 不可分解，且左 R-模 M 既是 Noether 模，又是 Artin 模，则 $\mathrm{End}_R M$ 是局部环。

第五章 同 调

从本章起，开始进入同调代数的核心部分。

在本章中我们将研究同调函子，加法函子的导来函子，给出函子Ext及Tor的定义，并证明同调代数中的一些基本定理。

§17 同调函子

17.1 R-复形范畴 R-Comp

复形及链映射的概念是同调代数中的基础概念。

定义17.1 若左R-映射序列

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots, \quad n \in \mathbf{Z} \qquad (甲$$

满足

$$d_n d_{n+1} = 0, \qquad \forall n \in \mathbf{Z}$$

则称（甲）是一个左R-复形，或简称复形，记作（A,d），或简记成A。其中$d_n, n \in \mathbf{Z}$叫做微分。

容易知道，当（甲）是正合列时，(甲）是复形。

设（A,d）是一个左R-复形。若F是R-mod到S-mod的一个加法函子，则当F是共变函子时，易知左S-映射序列

$$\cdots \longrightarrow F(A_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(A_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(A_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

是一个左S-复形，记作$(F(A), F(d))$。当F是逆变函子时，易知左S-映射序列

$$\cdots \longrightarrow F(A_{n-1}) \xrightarrow{F(d_n)} F(A_n) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(A_{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

是一个左S-复形，我们也记作 $(F(A),F(d))$.

定义17.2 设 (A,d) 及 (A',d') 是两个左R-复形. 若左R-映射$f_n: A_n \longrightarrow A'_n$ 使得下图中每一个正方形都是交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\cdots \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

则称$f=\{f_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$是 (A,d) 到 (A',d')的一个左R-链映射，或简称链映射，记作f: $(A, d) \longrightarrow (A', d')$ 或 $(A, d) \xrightarrow{f} (A',d')$.

对于给定的环R，命obj$R$-comp 是所有左R-复形作成的类，$\mathrm{Hom}_{R\text{-comp}}((A,d),(A',d'))$ 由 (A, d) 到 (A',d') 的所有链映射作成，又对于 $(A,d) \xrightarrow{g} (A', d')$ 及 $(A', d') \xrightarrow{f} (A'', d'')$，规定 $(fg)_n = f_n g_n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, 则有 $(A, d) \xrightarrow{fg} (A'',d'')$. 易知$R$-comp成为一个范畴，叫做左$R$-复形范畴，或简称复形范畴.

对于$f,g \in \mathrm{Hom}_{R\text{-comp}}((A,d),(A',d'))$，定义 $(f+g)_n = f_n + g_n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$，则易知$\mathrm{Hom}_{R\text{-comp}}((A,d),(A',d'))$成为加法AbeL群. 又，在可以实施加法及乘法的前提下，恒有$(f+g)h = fh+gh$, $\varphi(f+g) = \varphi f + \varphi g$, 故$R$-comp是一个预加法范畴.

17.2 第n同调模 $H_n(A)$ 及同调函子 H_n

定义17.3 设已给一个左R-复形 (A,d):

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

由 $d_n d_{n+1} = 0$ 知$\mathrm{im} d_{n+1} \subseteq \ker d_n$. 命

$$H_n(A) = \ker d_n / \mathrm{im} d_{n+1}.$$

$H_n(A)$叫做左R-复形 (A, d) 的第n同调模. 它是左R-模.

记$Z_n = Z_n(A) = \ker d_n$，$B_n = B_n(A) = \operatorname{im} d_{n+1}$。$Z_n$的元素叫$n$-循环，$B_n$的元素叫$n$-边缘。于是

$$H_n(A) = Z_n/B_n = Z_n(A)/B_n(A).$$

现在我们要对每一个$n \in \mathbf{Z}$，来构造 R-comp到R- mod 的一个函子H_n。为此，先证明下面引理。

引理17.1 设已给左R-链映射 $(A,d) \xrightarrow{f} (A',d')$.对于$n \in \mathbf{Z}$，命

$$H_n(f): H_n(A) \longrightarrow H_n(A')$$
$$z_n + B_n(A) \longmapsto f_n(z_n) + B_n(A')$$

则$H_n(f)$是左R-映射。

证 我们先证明$H_n(f)$是映射，即 $f_n(z_n) + B_n(A') \in H_n(A')$，且它由$z_n + B_n(A)$ 唯一确定。证如下：

当$z_n \in Z_n(A)$时，$d_n(z_n) = 0$．再利用交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\cdots \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

由$f_{n-1}d_n(z_n) = 0$知 $d'_n f_n(z_n) = 0$．从而 $f_n(z_n) \in Z_n(A')$，故$f(z_n) + B_n(A') \in H_n(A')$。

若$z_n + B_n(A) = z'_n + B_n(A)$，则 $z_n - z'_n \in B_n(A) = \operatorname{im} d_{n+1}$.故有 $a_{n+1} \in A_{n+1}$使$z_n - z'_n = d_{n+1}(a_{n+1})$，于是$f_n(z_n) - f_n(z'_n) = f_n(z_n - z'_n) = f_n d_{n+1}(a_{n+1}) = d'_{n+1} f_{n+1}(a_{n+1}) \in \operatorname{im} d'_{n+1} = B_n(A')$.因此$f_n(z_n) + B_n(A') = f_n(z'_n) + B_n(A')$.故$H_n(f)$是映射。

容易验证$H_n(f)$是左R-映射。

引理中的$H_n(f)$叫做由链映射f确定的第n同调映射。

现在我们可以构造左R-复形范畴R-comp到 R-mod 的一个函子H_n如下：

设$n\in\mathbf{Z}$. 命H_n是一个法则，它对于左R-复形(A,d)，规定(A,d)的第n同调模$H_n(A)$与之对应；对于(A,d)到(A',d')的左R-链映射f，规定由f确定的第n同调映射$H_n(f)$与之对应，则易知H_n是R-comp到R-mod的一个共变函子，且是加法函子。H_n叫做R-comp到R-mod的第n同调函子。

17.3 子复形，商复形，核复形，象复形，上核复形及链映射序列的正合性

定义17.4 设已给左R-复形(A,d)：

$$\cdots\longrightarrow A_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

若左R-复形(A',d')：

$$\cdots\longrightarrow A'_{n+1}\xrightarrow{d'_{n+1}}A'_n\xrightarrow{d'_n}A'_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

满足

(i) A'_n是A_n的子模，$\forall n\in\mathbf{Z}$；

(ii) $d'_n(a'_n)=d_n(a'_n)$，$\forall a'_n\in A'_n$，$n\in\mathbf{Z}$

则称(A',d')是(A,d)的一个子复形。

设(A',d')是左R-复形(A,d)的一个子复形。命

$$\bar{d}:\quad A_n/A'_n\longrightarrow A_{n-1}/A'_{n-1}$$
$$a_n+A'_n\longmapsto d_n(a_n)+A'_{n-1}\ ,$$

则易知$\bar{d}_n$是左R-映射。又容易验证$\bar{d}_n\bar{d}_{n+1}=0$，$\forall n\in\mathbf{Z}$因此得到左R-复形$(A/A',\bar{d})$：

$$\cdots\longrightarrow A_{n+1}/A'_{n+1}\xrightarrow{\bar{d}_{n+1}}A_n/A'_n\xrightarrow{\bar{d}_n}A_{n-1}/A'_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

定义17.5 复形$(A/A',\ \bar{d})$叫做复形$(A,\ d)$对其子复形(A',d')的商复形。简记为A/A'.

设已给左R-链映射$(A,d)\xrightarrow{f}(A',d')$. 则易知当$x\in\ker f_n$时，$d_n(x)\in\ker f_{n-1}$. 故得到左$R$-映射

$$\tilde{d}_n:\ \ker f_n\longrightarrow\ker f_{n-1}$$

$$x \longmapsto d_n(x),$$

这时当然有$\widetilde{d}_n\widetilde{d}_{n+1}=0$，$\forall n\in\mathbf{Z}$。故有左$R$-复形$(\ker f,\widetilde{d})$：

$$\cdots\longrightarrow \ker f_{n+1}\xrightarrow{\widetilde{d}_{n+1}}\ker f_n\xrightarrow{\widetilde{d}_n}\ker f_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

定义17.6 复形$(\ker f,\widetilde{d})$叫做链映射f的核复形或f的核。简记为$\ker f$.

可知$\ker f$是(A,d)的子复形.

设已给左R-链映射$(A,d)\xrightarrow{f}(A',d')$，则易知当$x\in \mathrm{im} f_n$时，$d'_n(x)\in \mathrm{im} f_{n-1}$。故得到左$R$-映射

$$\underline{d}_n:\ \mathrm{im} f_n\longrightarrow \mathrm{im} f_{n-1}$$

$$x\longmapsto d'_n(x),$$

且易知$\underline{d}_n\underline{d}_{n+1}=0$，$\forall n\in\mathbf{Z}$。因此得到左$R$-复形$(\mathrm{im} f,\underline{d})$：

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{im} f_{n+1}\xrightarrow{\underline{d}_{n+1}}\mathrm{im} f_n\xrightarrow{\underline{d}_n}\mathrm{im} f_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

定义17.7 复形$(\mathrm{im} f,\underline{d})$叫做链映射$f$的象复形或$f$的象。简记为$\mathrm{im} f$.

可知$\mathrm{im} f$是(A',d')的子复形.

设已给左R-链映射$(A,d)\xrightarrow{f}(A',d')$，则有左$R$-复形$\mathrm{im} f$，从而有商复形$A'/\mathrm{im} f$.

定义17.8 商复形$A'/\mathrm{im} f$叫做链映射f的上核复形或f的上核。记作$\mathrm{Coker} f$.

最后，我们引入链映射序列的正合性概念。

定义17.9 若左R-链映射序列

$$A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''$$

满足

$$\mathrm{im} f=\ker g,$$

则称此序列在中间项A处正合。这里两个左R-复形(X,α)与(Y,β)相等是指$X_n=Y_n$，$\alpha_n=\beta_n$，$\forall n\in\mathbf{Z}$.

易知左R-链映射序列$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ 在中间项A处正合，当且仅当 $A'_n \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{g_n} A''_n$ 在中间项A_n处正合， $\forall n \in \mathbf{Z}$。

若一个左R-链映射序列在每相邻三项所组成的序列的中间项处都正合，则称该左R-链映射序列是正合列。

明显知道，左R-映射序列

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdots$$

是一个左R-复形。它叫做零复形，用0来记。

定义17.10 若左R-链映射序列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

是正合列，则称它是短正合列。

易知，左R-链映射序列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

是短正合列，当且仅当左R-映射序列

$$0 \longrightarrow A'_n \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{g_n} A_n'' \longrightarrow 0$$

是短正合列，$\forall n \in \mathbf{Z}$。

定义17.11 若左R-链映射序列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

是短正合列，且$0 \longrightarrow A'_n \xrightarrow{f_n} A'_n \xrightarrow{g_n} A''_n \longrightarrow 0$是可裂短正合列，$\forall n \in \mathbf{Z}$，则称该左$R$-链映射序列是可裂短正合列。

17.4 同调代数基本定理

现在我们证明四个定理，即连接同态定理、长正合列定理（也叫正合三角形定理）、连接同态映射的自然性定理及蛇引理。它们是同调代数中基本的定理。

定理17.1（连接同态定理）设

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

是一个左R-链映射短正合列。命

$$\partial_n: H_n(A'') \longrightarrow H_{n-1}(A')$$
$$z''_n + B_n(A'') \longmapsto i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z''_n) + B_{n-1}(A'),$$

这里$p_n^{-1}(x)$是在p_n作用下x的一个逆象，$i_{n-1}^{-1}(y)$是在i_{n-1}作用下y的一个逆象。则∂_n是左R-映射。

证 首先有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{p_n} & A''_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & A_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & A''_{n-1} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

且图中上、下两行都是短正合列。

当$z''_n \in Z_n(A'') = \ker d''_n$时，由于$p_n$是满射，故有$a_n \in A_n$使$a_n = p_n^{-1}(z''_n)$。因为$p_{n-1}(d_n p_n^{-1}(z''_n)) = p_{n-1}d_n(a_n) = d''_n p_n(a_n) = d''_n(z''_n) = 0$，故$d_n p_n^{-1}(z''_n) \in \ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$。因此有唯一的$a'_{n-1} \in A'_{n-1}$使$d_n p_n^{-1}(z''_n) = i_{n-1}(a'_{n-1})$。即$i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z'_n) = a'_{n-1} \in A'_{n-1}$。又因为$d_{n-1}d_n = 0$，故$d_{n-1}i_{n-1}(a'_{n-1}) = d_{n-1}d_n p_n^{-1}(z''_n) = 0$。从而$i_{n-2}d'_n(a'_{n-1}) = 0$，于是$d'_{n-1}(a'_{n-1}) = 0$。故$i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z''_n) = a'_{n-1} \in \ker d'_{n-1} = Z_{n-1}(A')$。因此当取定在$p_n$作用下$z''_n$的一个逆象时，$i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z''_n) + B_{n-1}(A') \in H_{n-1}(A')$。

若取p_n作用下z''_n的逆象是$\overline{a}_n$，则按以上步骤有唯一的$b \in Z_{n-1}(A')$使$i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z''_n) = b$。

因为$p_n(\overline{a}_n) = z_n'' = p_n(a_n)$，故$a_n - \overline{a}_n \in \ker p_n = \operatorname{im} i_n$。从而$a_n - \overline{a}_n = i_n(x'_n)$，其中$x'_n \in A_n$。于是$d_n(a_n) - d_n(\overline{a}_n) = d_n(a_n - \overline{a}_n) = d_n i_n(x'_n)$，又因为$d_n(a_n) = i_{n-1}(a'_{n-1})$，$d_n(\overline{a}_n) = i_{n-1}(b)$，故$i_{n-1}(a'_{n-1} - b) = d_n i_n(x'_n) = i_{n-1}d'_n(x'_n)$，因此$a'_{n-1} - b = d'_n(x'_n) \in \operatorname{im} d'_n = B_{n-1}(A')$。于是$a'_{n-1} + B_{n-1}(A') = b + B_{n-1}(A')$，即$i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z_n'') + B_{n-1}(A')$

由z''_n唯一确定.

当$z''_n+B_n(A'')=w''_n+B_n(A'')$时，类似地可以证明$i_{n-1}^{-1}d_np_n^{-1}(z''_n)+B_{n-1}(A')=i_{n-1}^{-1}d_np_n^{-1}(w''_n)+B_{n-1}(A')$. 故$\partial_n$是映射.

容易验证∂_n是左R-映射.

定理中的左R-映射∂_n叫做$H_n(A'')$到$H_{n-1}(A')$的连接同态映射. 从下面的定理中可以看出"连接"这个词的含意.

定理17.2（长正合列定理）设

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{i}A\xrightarrow{p}A''\longrightarrow 0$$

是左R-链映射短正合列，则有左R-正合列:

$$\cdots\longrightarrow H_n(A')\xrightarrow{H_n(i)}H_n(A)\xrightarrow{H_n(p)}H_n(A'')\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(A')$$

$$\xrightarrow{H_{n-1}(i)}H_{n-1}(A)\xrightarrow{H_{n-1}(p)}H_{n-1}(A'')\longrightarrow\cdots$$

证 必须且只需证明上述序列在$H_n(A)$处、$H_n(A'')$处及$H_{n-1}(A')$处正合.

(i) 在$H_n(A)$处正合.

因为当$z'_n+B_n(A')\in H_n(A')$时，$H_n(p)H_n(i)(z_n'+B_n(A'))=p_ni_n(z'_n)+B_n(A'')=0$，故$H_n(p)H_n(i)=0$. 因此$\mathrm{im}H_n(i)\subseteq\ker H_n(p)$.

若$z_n+B_n(A)\in\ker H_n(p)$，则$p_n(z_n)\in B_n(A'')=\mathrm{im}d''_{n+1}$. 于是有$a''_{n+1}\in A''_{n+1}$使$p_n(z_n)=d''_{n+1}(a''_{n+1})$. 因为$p_{n+1}$是满射，故有$a_{n+1}\in A_{n+1}$使$a''_{n+1}=p_{n+1}(a_{n+1})$. 故$p_n(z_n)=d''_{n+1}p_{n+1}(a_{n+1})=p_nd_{n+1}(a_{n+1})$. 从而$z_n-d_{n+1}(a_{n+1})\in\ker p_n=\mathrm{im}i_n$. 因此有$a'_n\in A'_n$使$z_n-d_{n+1}(a_{n+1})=i_n(a'_n)$. 于是$z_n-i_n(a'_n)=d_{n+1}(a_{n+1})\in\mathrm{im}d_{n+1}=B_n(A)$. 又因为$d_ni_n(a'_n)=d_n(z_n)=0$，所以$i_{n-1}d'_n(a'_n)=0$. 因此$d'_n(a'_n)=0$. 从而$a'_n\in\ker d'_n=Z_n(A')$，这样就有$H_n(i)(a'_n+B_n(A'))=i_n(a'_n)+B_n(A)=z_n+B_n(A)$. 故$\ker H_n(p)\subseteq\mathrm{im}H_n(i)$.

(ii) 在$H_n(A'')$处正合。

当 $z_n+B_n(A)\in H_n(A)$时，$\partial_n H_n(p)(z_n+B_n(A))=\partial_n(p_n(z_n)+B_n(A''))=i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(p_n(z_n))+B_{n-1}(A')$，因为可以取$z_n$作为在$p_n$作用下$p_n(z_n)$的一个逆象，而$d_n(z_n)=0$，故$\partial_n H_n(p)=0$. 因此$\mathrm{im}H_n(p)\subseteq\ker\partial_n$.

若 $z'_n+B_n(A'')\in\ker\partial_n$，则 $i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z'_n)\in B_{n-1}(A')=\mathrm{im}d'_n$. 故有 $a'_n\in A'_n$ 使 $i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z'_n)=d'_n(a'_n)$. 因此 $d_n p_n^{-1}(z'_n)=i_{n-1}d'_n(a'_n)=d_n i_n(a'_n)$. 从而 $p_n^{-1}(z'_n)-i_n(a'_n)\in\ker d_n=Z_n(A)$. 于是 $H_n(p)(p_n^{-1}(z'_n)-i_n(a'_n)+B_n(A))=p_n(p_n^{-1}(z'_n)-i_n(a'_n)+B_n(A''))=z'_n+B_n(A'')$. 所以$\ker\partial_n\subseteq\mathrm{im}H_n(p)$.

(iii) 在$H_{n-1}(A')$处正合。

当 $z'_n+B_n(A'')\in H_n(A'')$时，$H_{n-1}(i)\partial_n(z'_n+B_n(A''))=H_{n-1}(i)(i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z'_n)+B_{n-1}(A'))=i_{n-1}(i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z'_n))+B_{n-1}(A)=d_n p_n^{-1}(z'_n)+B_{n-1}(A)=0$. 故$\mathrm{im}\partial_n\subseteq\ker H_{n-1}(i)$.

若$z'_{n-1}+B_{n-1}(A')\in\ker H_{n-1}(i)$，则 $i_{n-1}(z'_{n-1})\in B_{n-1}(A)=\mathrm{im}d_n$. 故有 $a_n\in A_n$使$i_{n-1}(z'_{n-1})=d_n(a_n)$. 于是 $p_{n-1}d_n(a_n)=p_{n-1}i_{n-1}(z'_{n-1})=0$. 从而 $d''_n p_n(a_n)=0$. 故 $p_n(a_n)\in\ker d''_n=Z_n(A'')$. 而 $\partial_n(p_n(a_n)+B_n(A''))=i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(p_n(a))+B_{n-1}(A')=i_{n-1}^{-1}d_n(a)+B_{n-1}(A')=z'_{n-1}+B_{n-1}(A')$. 故$\ker H_{n-1}(\mathrm{i})\subseteq\mathrm{im}\partial_n$.

定理17.3（连接同态映射的自然性定理） 设已给左R-链映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{q} & C'' & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (乙)$$

且其中上、下两行都是短正合列．则有交换图：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow H_n(A') & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(A) & \xrightarrow{H_n(p)} & H_n(A'') \\
{\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n(g)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(h)} \\
\cdots \longrightarrow H_n(C') & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(C) & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(C'')
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(f)} & \\
\xrightarrow{\partial'_n} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

且其中上、下两行都是正合列．

证　由于H_n是共变函子，故立刻知道有下面两个交换图：

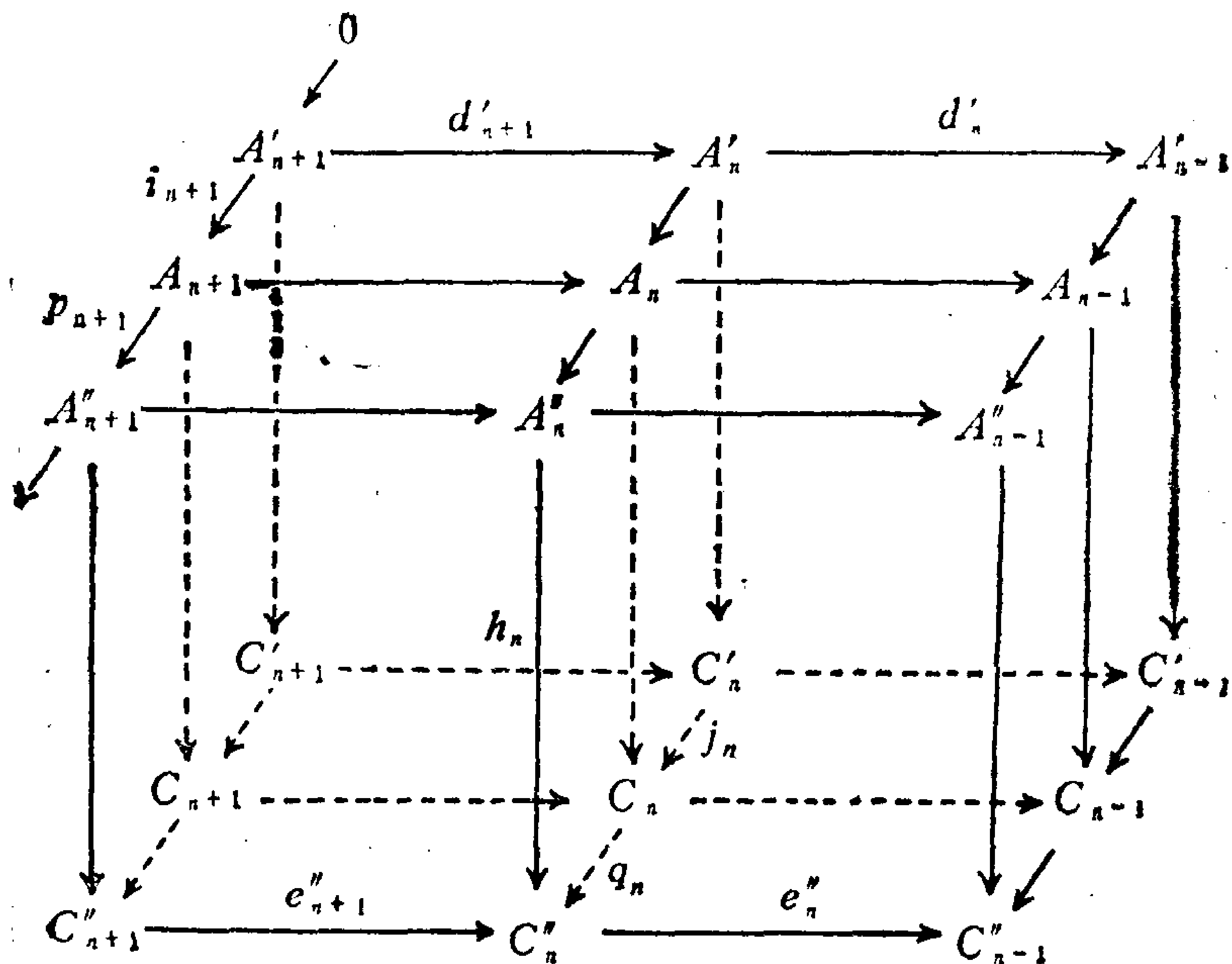
$$
\begin{array}{ccc}
H_n(A') & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(A) \\
{\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n(g)} \\
H_n(C') & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(C)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H_n(A) & \xrightarrow{H_n(p)} & H_n(A'') \\
{\scriptstyle H_n(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n(h)} \\
H_n(C) & \xrightarrow{H_n(q)} & H_n(C'')
\end{array}
$$

因此剩下的只要证明下图交换：

$$
\begin{array}{ccc}
H_n(A'') & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A') \\
{\scriptstyle H_n(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(f)} \\
H_n(C'') & \xrightarrow{\partial'_n} & H_{n-1}(C')
\end{array}
$$

所谓连接同态映射的自然性即指此交换图．

为此，我们先画出交换图（乙）的详图如下：



其中每一个面中的每一个正方形都是交换图。

当$z''_n+B_n(A'') \in H_n(A'')$时，有

$\partial'_n H_n(h)(z''_n+B_n(A''))=j_{n-1}^{-1}e_n q_n^{-1}(h_n(z''_n))+B_{n-1}(C')$,

$H_{n-1}(f)\partial_n(z''_n+B_n(A''))=f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z''_n)$
$+B_{n-1}(C')$.

因为 $j_{n-1}(j_{n-1}^{-1}e_n q_n^{-1}h_n(z''_n)-f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z_n''))$
$=e_n q_n^{-1}h_n(z''_n)-j_{n-1}f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z''_n)=e_n q_n^{-1}h_n(z''_n)$
$-g_{n-1}i_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z''_n)=e_n q_n^{-1}h_n(z_n'')-g_{n-1}d_n p_n^{-1}(z''_n)$
$=e_n q_n^{-1}h_n(z''_n)-e_n g_n p_n^{-1}(z''_n)=e_n(q_n^{-1}h_n(z''_n)-g_n p_n^{-1}(z''_n))$,
而 $q_n(q_n^{-1}h_n(z_n'')-g_n p_n^{-1}(z''_n))=h_n(z''_n)-q_n g_n p_n^{-1}(z''_n)$
$=h_n(z''_n)-h_n p_n p_n^{-1}(z''_n)=0$，故$q_n^{-1}h_n(z''_n)-g_n p_n^{-1}(z''_n)$
$\in \ker q_n=\mathrm{im}\, j_n$。从而有$w\in C'_n$使$q_n^{-1}h_n(z''_n)-g_n p_n^{-1}(z_n'')$
$=j_n(w)$．于是有

$j_{n-1}\ (j_{n-1}^{-1}e_n q_n^{-1}h_n(z_n'') - f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}(z_n'')) = e_n j_n(w)$
$= j_{n-1}\ (e_n'(w))$.

因此 $j_{n-1}^{-1}e_n q_n^{-1}h_n(z_n'') - f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_n p_n^{-1}\ (z_n'') = e_n'(w)$
$\in \mathrm{im}e_n' = B_{n-1}(C')$. 故$\partial_n' H_n(h) = H_{n-1}(f)\partial_n$.

定理17.4（蛇引理） 设已给左R-映射交换图：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & M' & \xrightarrow{\xi} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow 0 \\
 & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow\gamma & \\
0\longrightarrow & N' & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{\eta} & N'' &
\end{array},
$$

其中上、下两行都是正合列.

(i) 命

$$\varphi:\ \ker\gamma \longrightarrow \mathrm{Coker}\alpha$$
$$x'' \longmapsto i^{-1}\beta p^{-1}(x'') + \mathrm{im}\alpha$$

则φ是左R-映射，且有正合列：

$$\ker\alpha \xrightarrow{\xi'} \ker\beta \xrightarrow{p'} \ker\gamma \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Coker}\alpha \xrightarrow{\sigma}$$
$$\mathrm{Coker}\beta \xrightarrow{\tau} \mathrm{Coker}\gamma,$$

其中

$\xi':\ \ker\alpha \longrightarrow \ker\beta$ $\quad x \longmapsto \xi(x)$, $\qquad p':\ \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma$ $\quad y \longmapsto p(y)$,

$\sigma:\ \mathrm{Coker}\alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\beta$ $\quad y' + \mathrm{im}\alpha \longmapsto i(y') + \mathrm{im}\beta$, $\qquad \tau:\ \mathrm{Coker}\beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\gamma$ $\quad z + \mathrm{im}\beta \longmapsto \eta(z) + \mathrm{im}\gamma$.

(ii) 若ξ是单射，则ξ'是单射；若η是满射，则τ是满射.

证 我们只证明φ是映射. 其余请读者自己验证.

易知 $i^{-1}\beta p^{-1}(x'') \in N'$. 若 $p(m_1) = x'' = p(m_2)$，则 $m_1 - m_2 \in \ker p = \mathrm{im}\xi$，从而有 $x' \in M'$使$m_1 - m_2 = \xi(x')$. 于是 $i^{-1}\beta(m_1) - i^{-1}\beta(m_2) = i^{-1}\beta\xi(x') = i^{-1}i\alpha(x') = \alpha(x') \in \mathrm{im}\alpha$. 因此$\varphi$是映射.

17.5　链映射的同伦

定义17.12　设已给两个左R-链映射 $A \xrightarrow{f,g} A'$．若存在一集左R-映射$s=\{s_n: A_n \longrightarrow A'_{n+1} \mid n \in \mathbf{Z}\}$使

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

如图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \swarrow s_n & \downarrow f_n - g_n & \swarrow s_{n-1} & & & \\
\longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

则称f与g同伦，并称s形成该同伦。

易知链映射的同伦是一个等价关系。

设$f: A \longrightarrow A'$是一个左R-链映射，T是R-mod到S-mod的一个加法共变或逆变函子．定义$T(f)$是

$$T(f)_n = T(f_n), \quad \forall n \in \mathbf{Z},$$

则易知，当T是共变函子时，$T(f)$是左S-复形$T(A)$到$T(A')$的一个左S-链映射，当T是逆变函子时，$T(f)$是左S-复形$T(A')$到$T(A)$的一个左S-链映射。

容易知道，当左R-复形A到A'的两个左R-链映射f与g同伦时，若T是R-mod到S-mod的一个加法共变或逆变函子，则$T(f)$与$T(g)$也同伦。

现在我们证明同调代数中又一个基本定理。

定理17.5　若左R-复形A到A'的两个左R-链映射f与g同伦，则它们的第n同调映射相等：

$$H_n(f) = H_n(g), \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

证　因为f与g同伦，故可设$s=\{s_n: A_n \longrightarrow A'_{n+1} \mid n \in \mathbf{Z}\}$形成同伦．于是当$z_n + B_n(A) \in H_n(A)$时，有

$$f_n(z_n)-g_n(z_n)=d'_{n+1}s_n(z_n)+s_{n-1}d_n(z_n).$$

因为$d_n(z_n)=0$，故$f_n(z_n)-g_n(z_n)\in \mathrm{im}d'_{n+1}=B_n(A')$. 从而 $H_n(f)(z_n+B_n(A))=H_n(g)(z_n+B_n(A))$. 因此 $H_n(f)=H_n(g)$, $\forall n\in\mathbf{Z}$.

§18 导来函子

18.1 模的自由分解、投射分解及内射分解

定义18.1 设A是左R-模. 若

$$\cdots\longrightarrow F_n\xrightarrow{d_n}\cdots\longrightarrow F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0 \qquad (甲)$$

是左R-正合列，且每一个F_i都是自由左R-模，则称（甲）是A的一个左R-自由分解或自由分解.

因为任意模必是一个自由模的一个同态象，故对任意给定的左R-模A，总存在一个左R-正合列

$$F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0,$$

其中F_0是自由左R-模.

设$\ker\varepsilon$是自由左R-模F_1的一个同态象，则有图：

$$\begin{array}{ccccccc} F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0\\ \rho_1\downarrow & \nearrow d'_1 & & & & & \\ \ker\varepsilon & & & & & & \end{array}$$

其中$d_1=d'_1\rho_1$. 故图中左边三角形是交换图.

因为ρ_1是满射，故$\mathrm{im}d_1=\mathrm{im}d'_1=\ker\varepsilon$. 仿此继续做下去即可得$A$的一个左$R$-自由分解. 因此每一个模都有自由分解.

定义18.2 若左R-正合列（甲）中每一个F_i都是投射左R-模，则称（甲）是A的一个左R-投射分解或投射分解.

自由分解当然是投射分解，因此每一个模都有投射分解。

定义18.3 设A是左R-模．若

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots \qquad (乙)$$

是左R-正合列，且每一个E^i都是内射左R-模，则称（乙）是A的一个左R-内射分解或内射分解．

因为任意模必可单射到一个内射模，故对任意给定的左R-模A，总存在一个左R-正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0,$$

其中E^0是内射左R-模．

设$E^0/\mathrm{im}\varepsilon$单射到内射左$R$-模$E^1$，则有图：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 \\ & & & & \delta^1\downarrow & \nearrow f^0 & \\ & & & & E^0/\mathrm{im}\varepsilon & & \end{array}$$

其中$d^0=f^0\delta^1$．故图中右边三角形是交换图．

因为f^0是单射，故$\ker d^0=\ker\delta_1=\mathrm{im}\varepsilon$．仿此继续做下去即可得$A$的一个左$R$-内射分解．因此每一个模都有内射分解．

若在一个左R-复形

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

中，$C_i=0$，$\forall i<m$，其中m是一个整数，则可将此复形写成

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_{m+1}} C_m \longrightarrow 0.$$

同样，若$C_i=0$，$\forall i>q$，其中q是一个整数，则可将此复形写成

$$0 \longrightarrow C_q \xrightarrow{d_q} C_{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

因为在一个模的自由分解或投射分解的右边添 0 后就得到一

个复形，在一个模的内射分解的左边添 0 后也得到一个复形，所以可以认为一个模的自由分解、投射分解及内射分解都是复形。

设已给一个左R-复形

$$X: \qquad \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 .$$

去掉M，可得一个左R-复形

$$\cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \longrightarrow 0 ,$$

此复形记作X_M。

同样，设已给一个左R-复形

$$Y: \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} Y^0 \xrightarrow{d^0} Y^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

去掉N，可得一个左R-复形

$$0 \longrightarrow Y^0 \xrightarrow{d^0} Y^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

此复形记作Y_N。

于是当已给左R-模A的一个投射分解

$$P: \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

时，我们得到左R-复形

$$P_A: \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0 ,$$

同样，当已给左R-模A的一个内射分解

$$E: \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

时，我们得到左R-复形

$$E_A: \qquad 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

现在我们证明同调代数中又一个基本的定理，即下面定理。

定理18.1（比较定理） 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow f & & \\
\cdots \longrightarrow X'_2 & \xrightarrow{d_2'} & X'_1 & \xrightarrow{d_1'} & X'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中上、下两行都是左R-复形，且上面一行中的每一个X_i都是投射左R-模，下面一行是左R-正合列。则存在左R-链映射

$$X_A \xrightarrow{\bar{f}} X'_{A'}$$

使上图为交换图，即$\varepsilon'\bar{f}_0 = f\varepsilon$。且任意这样两个链映射必同伦。

证 因为X_0是投射模，ε'是满射，故存在左R-映射$\bar{f}_0$使上图中最右边的正方形是交换图，即有交换图：

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\ {\scriptstyle \bar{f}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' \end{array}$$

因为$\varepsilon'(\bar{f}_0 d_1) = (\varepsilon'\bar{f}_0)d_1 = (f\varepsilon)d_1 = f(\varepsilon d_1) = 0$，故$\operatorname{im}(\bar{f}_0 d_1) \subseteq \ker\varepsilon' = \operatorname{im} d'_1$。而$X_1$是投射模，故存在左$R$-映射$\bar{f}$使下图交换

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \\ & \swarrow{\scriptstyle \bar{f}_1} & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_0 d_1} \\ X'_1 & \xrightarrow{\sigma} & \operatorname{im} d'_1 \end{array}$$

$$\sigma(x_1') = d_1'(x_1'),\quad \forall x_1' \in X_1'.$$

于是立刻看出下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ {\scriptstyle \bar{f}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_0} \\ X'_1 & \xrightarrow{d'_1} & X'_1 \end{array}$$

设已存在左R-映射$\bar{f}_0$，$\bar{f}_1$，…，$\bar{f}_n$（n≥1）使下图中每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_{n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ X'_n & \xrightarrow{d'_n} & X'_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A', \end{array}$$

现在来作$\overline{f}_{n+1}$使下图为交换图：

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_n} \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & X'_n \end{array}$$

因为 $d'_n(\overline{f}_n d_{n+1}) = (d'_n \overline{f}_n) d_{n+1} = (\overline{f}_{n-1} d_n) d_{n+1} = \overline{f}_{n-1}(d_n d_{n+1}) = 0$，故 $\operatorname{im}(\overline{f}_n d_{n+1}) \subseteq \ker d'_n = \operatorname{im} d'_{n+1}$。而 X_{n+1}是投射模，故存在左R-映射$\overline{f}_{n+1}$使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & & X_{n+1} \\ & \swarrow{\scriptstyle \overline{f}_{n+1}} & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_n d_{n+1}} \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{\tau} & \operatorname{im} d'_{n+1} \end{array}$$

$$\tau(x'_{n+1}) = d'_{n+1}(x'_{n+1}), \ \forall x'_{n+1} \in X'_{n+1}.$$

于是立刻看出下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{f}_n} \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & X'_n \end{array}$$

这样，再命$\overline{f}_i$: $X_i = 0 \longrightarrow X_i' = 0$是$\overline{f}_i = 0$，$\forall i < 0$，即知满足定理要求的链映射$\overline{f}$存在。

设链映射h: $X_A \longrightarrow X'_{A'}$也满足定理的要求，即$h$满足$\varepsilon' h_0$

$=f\varepsilon$。为了证明h与$\overline{f}$同伦，我们先命

$$s_i = 0: X_i \longrightarrow X'_{i+1}, \quad \forall i < 0.$$

于是有

$$h_i - \overline{f}_i = d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i, \quad \forall i < 0,$$

这是因为当$i<0$时，h_i，$\overline{f}_i$，s_i及s_{i-1}都是0。

因为$\varepsilon'(h_0 - \overline{f}_0) = \varepsilon' h_0 - \varepsilon' \overline{f}_0 = f\varepsilon - f\varepsilon = 0$，故$\mathrm{im}(h - \overline{f}_0) \subseteq \ker\varepsilon' = \mathrm{im}d_1'$，而$X_0$是投射模，故有左$R$-映射$S_0$使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & & X_0 \\ & \swarrow{\scriptstyle s_0} & \downarrow{\scriptstyle h_0 - \overline{f}_0} \\ X'_1 & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathrm{im}\,d'_1 \end{array}$$

$$\delta(x'_1) = d'_1(x'_1), \ \forall x'_1 \in X'_1.$$

于是立刻看出有

$$h_0 - \overline{f}_0 = d_1' s_0 = d_1' s_0 + s_{-1}d_0$$

因此我们得到

$$h_i - \overline{f}_i = d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i, \quad \forall i \leqslant 0.$$

设已存在左R-映射$s_0, s_1, \cdots, s_n$（$n \geqslant 0$）使

$$h_i - \overline{f}_i = d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i, \quad \forall i \leqslant n,$$

其中s_i是X_i到X'_{i+1}的左R-映射。

我们来作左R-映射$s_{n+1}: X_{n+1} \longrightarrow X'_{n+2}$ 使

$$h_{n+1} - f_{n+1} = d'_{n+2}s_{n+1} + s_n d_{n+1}.$$

因为 $d'_{n+1}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) = d'_{n+1}h_{n+1} - d'_{n+1}\overline{f}_{n+1} - d'_{n+1}s_n d_{n+1} = h_n d_{n+1} - \overline{f}_n d_{n+1} - d'_{n+1}s_n d_{n+1} = (h_n - \overline{f}_n - d'_{n+1}s_n)$。$d_{n+1} = (s_{n-1}d_n)d_{n+1} = 0$，故$\mathrm{im}(h_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) \subseteq \ker d'_{n+1}$

$=\operatorname{im}d'_{n+2}$。而$X_{n+1}$是投射模，故有左$R$-映射 S_{n+1}使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & & X_{n+1} \\ & \swarrow^{s_{n+1}} & \downarrow h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}-s_n d_{n+1} \\ X'_{n+2} & \xrightarrow{\rho} & \operatorname{im}d'_{n+2} \end{array}$$

其中$\rho(x'_{n+2})=d'_{n+2}(x'_{n+2})$， $\forall x'_{n+2}\in X'_{n+2}$。

于是立刻看出有

$$h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}=d'_{n+2}s_{n+1}+s_n d_{n+1}.$$

因此h与$\bar{f}$同伦。

定理中的$\bar{f}$叫做f上的链映射。

对偶地有下面定理。

定理18.2 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \xrightarrow{d^1} & E^2 \longrightarrow\cdots \\ & & \downarrow f & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & F^0 & \xrightarrow{e^0} & F^1 & \xrightarrow{e^1} & F^2 \longrightarrow\cdots, \end{array}$$

其中上、下两行都是左R-复形，且下面一行中每一个F^i都是内射左R-模，上面一行是左R-正合列。则存在左R-链映射

$$E_A\xrightarrow{\bar{f}}F_B$$

使上图为交换图，即$\bar{f}_0\varepsilon=\eta f$，且任意这样两个链映射必同伦。

请读者自己证明。

18.2 加法共变函子T的第n左导来函子L_nT

设T是R-mod到S-mod的一个加法共变函子。

可以认为能一次性地对每一个左R-模都已选定了一个投射分解。

当A是左R-模时，设其选定的投射分解是

$$P: \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

于是得到左R-复形

$$P_A: \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^1} P_0 \longrightarrow 0$$

将T作用到P_A上，得到左S-复形

$$TP_A: \qquad \cdots \longrightarrow T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_0) \longrightarrow 0.$$

这样，就得到复形TP_A的第n同调模　$H_n(TP_A) = \ker T(d_n)/\mathrm{im}T(d_{n+1})$．它是左$S$-模。

现在命

$$L_nT(A) = H_n(TP_A).$$

当已给左R-映射$f: A \longrightarrow B$时，首先有图：

$$\begin{array}{llllllll} P: & \cdots \longrightarrow P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \downarrow f & & \\ P': & \longrightarrow P'_1 & \xrightarrow{d_1'} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中P'是B的选定的投射分解。故据定理18.1，有f上的链映射$\bar{f}: P_A \longrightarrow P'_B$　使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ \bar{f}_1 \downarrow & & \bar{f}_0 \downarrow & & \downarrow f & & \\ \cdots \longrightarrow P'_1 & \xrightarrow{d_1'} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

从而得到左S-复形TP_A到TP'_B的一个左S-链映射$T(\bar{f})$，且易知$T(f)T(\varepsilon) = T(\varepsilon')T(\bar{f}_0)$．

利用链映射　$T(\bar{f})$，有第n同调映射

$$H_n(T(\bar{f})): \quad H_n(TP_A) \longrightarrow H_n(TP'_B)$$
$$z_n + \mathrm{im}T(d_{n+1}) \longmapsto T(\bar{f}_n)(z_n) + \mathrm{im}T(d'_{n+1}).$$

现在命

$$L_nT(f) = H_n(T(\bar{f})).$$

$L_nT(f)$完全由f决定而与f上的链映射$\bar{f}$的选取无关。这是因为若另选f上的链映射h，则由定理18.1知h与$\bar{f}$同伦。由于T是加法共变函子，故$T(h)$与$T(\bar{f})$同伦。因此由定理17.5知$H_n(T(h))=H_n(T(\bar{f}))$。

容易验证L_nT是R-mod到S-mod的一个共变函子，且是加法函子。

定义18.2 L_nT叫做T的第n左导来函子。

当一次性地对每一个左R-模都选定了一个投射分解时，得到函子L_nT。若一次性地对每一个左R-模另选一个投射分解时，则同样得到T的左导来函子，我们不妨将它记作$\hat{L}_nT$。可以证明L_nT与$\hat{L}_nT$这两个函子本质上是一致的，即有下面定理。

定理18.3 L_nT与$\hat{L}_nT$自然等价。特别，有

$$L_nT(A)\cong\hat{L}_nT(A),\quad \forall\text{ 左}R\text{-模}A.$$

证 设A是左R-模，并设P及$\hat{P}$分别是A的构成L_nT及$\hat{L}_nT$时所选定的投射分解。据定理18.1，有1_A上的链映射$i: P_A\longrightarrow\hat{P}_A$使下图中每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{llllllllll}
P: & \cdots\longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i_2 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_0 & & \downarrow 1_A & \\
\hat{P}: & \cdots\longrightarrow & \hat{P}_2 & \xrightarrow{\hat{d}_2} & \hat{P}_1 & \xrightarrow{\hat{d}_1} & \hat{P}_0 & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} & A & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

于是有链映射$T(i): TP_A\longrightarrow T\hat{P}_A$。从而又有第$n$同调映射$H_n(T(i)): H_n(TP_A)\longrightarrow H_n(T\hat{P}_A)$。

现在命$\tau_A=H_n(T(i))$，则有

$$\tau_A:\ L_nT(A)\longrightarrow\hat{L}_nT(A).$$

我们先证明τ是L_nT到$\hat{L}_nT$的自然变换。这也就是要证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} L_nT(A) & \xrightarrow{\tau_A} & \hat{L}_nT(A) \\ {\scriptstyle L_nT(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{L}_nT(f)} \\ L_nT(B) & \xrightarrow{\tau_B} & \hat{L}_nT(B) \end{array}, \qquad \forall\ A \xrightarrow{f} B.$$

为此，先设Q及$\hat{Q}$分别是B的构成L_nT及$\hat{L}_nT$时所选定的投射分解，再据定理18.1取定交换图：

$$\begin{array}{lccccccccc} P: & \cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \bar{f}_1}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{f}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ Q: & \cdots \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{e_1} & Q_0 & \xrightarrow{\eta} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} \hat{P}: & \cdots \longrightarrow & \hat{P}_1 & \xrightarrow{\hat{d}_1} & \hat{P}_0 & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \bar{g}_1}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{g}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ \hat{Q}: & \cdots \longrightarrow & \hat{Q}_1 & \xrightarrow{\hat{e}_1} & \hat{Q}_0 & \xrightarrow{\hat{\eta}} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} Q: & \cdots \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{e_1} & Q_0 & \xrightarrow{\eta} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle t_1}\downarrow & & {\scriptstyle t_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_B} & & \\ \hat{Q}: & \cdots \longrightarrow & \hat{Q}_1 & \xrightarrow{\hat{e}_1} & \hat{Q}_0 & \xrightarrow{\hat{\eta}} & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

于是当 $z_n + \mathrm{im}T(d_{n+1}) \in L_nT(A)$ 时，有

$$\begin{aligned} &\tau_B L_nT(f)(z_n + \mathrm{im}T(d_{n+1})) \\ &\qquad = \tau_B(T(\bar{f}_n)(z_n) + \mathrm{im}T(e_{n+1})) \\ &\qquad = T(t_n)T(\bar{f}_n)(z_n) + \mathrm{im}\,T(\hat{e}_{n+1}) \\ &\qquad = T(t_n\bar{f}_n)(z_n) + \mathrm{im}T(\hat{e}_{n+1}), \\ &\hat{L}_nT(f)\tau_A(z_n + \mathrm{im}T(d_{n+1})) \\ &\qquad = \hat{L}_nT(f)\ (T(i_n)(z_n) + \mathrm{im}T\ (\hat{d}_{n+1})) \\ &\qquad = T(\bar{g}_n)T(i_n)(z_n) + \mathrm{im}\,T(\hat{e}_{n+1}). \\ &\qquad = T(\bar{g}_n i_n)\ (z_n) + \mathrm{im}T(\hat{e}_{n+1}) \end{aligned}$$

从而有

$$\tau_B L_n T(f) = H_n(T(t\bar{f})) \text{ ,} \quad \hat{L}_n T(f)\tau_A = H_n(T(\bar{g}i))\text{。}$$

但是由交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle t_1\bar{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle t_0\bar{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\cdots \longrightarrow & \hat{Q}_1 & \xrightarrow{\hat{e}_1} & \hat{Q}_0 & \xrightarrow{\hat{\eta}} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

及

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \bar{g}_1 i_1} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}_0 i_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\cdots \longrightarrow & \hat{Q}_1 & \xrightarrow{\hat{e}_1} & \hat{Q}_0 & \xrightarrow{\hat{\eta}} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

可知$t\bar{f}$与$\bar{g}i$同伦，从而 $T(t\bar{f})$与 $T(\bar{g}i)$同伦。因此$\tau_B L_n T(f) = \hat{L}_n T(f)\tau_A$。所以$\tau$是自然变换。

再证明τ_A是同构映射。

先由定理18.1知存在链映射：$j: \hat{P}_A \longrightarrow P_A$使下图中每个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \hat{P}_1 & \xrightarrow{\hat{d}_1} & \hat{P}_0 & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} & A & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\
\cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

于是由交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle j_1 i_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_0 i_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\
\cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

及

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1_A & \\ \cdots \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow 0 \end{array}$$

知ji与1_P同伦，这里$1_P=\{(1_P)_n=1_{P_n}1 \mid n\in \mathbf{Z}\}$. 从而$T(ji)$与$T(1_P)$同伦，故有

$$H_n(T(ji))=H_n(T(1_P)).$$

容易知道$T(ji)=T(j)T(i)$. 而H_n是共变函子，故$H_n(T(ji))=H_n(T(j))H_n(T(i))$.

又容易知道 $T(1_P)=1_{TP_A}$. 故 $H_n(T(1_P))=1_{H_n(TP_A)}$.

因此得到 $H_n(T(j))H_n(T(i))=1_{H_n(TP_A)}$. 同样可得 $H_n(T(i))H_n(T(j))=1_{H_n(TP_A)}$. 所以 $\tau_A=H_n(T(i))$ 是同构映射. 这就证明了L_nT 与 $\hat{L}_nT$ 自然等价.

这个定理说明T的第n左导来函子L_nT本质上与模的投射分解的选取无关.

由这个定理可以得到下面推论.

推论18.1 设已给左R-模A的一个投射分解

$$P: \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$$

记

$$K_n=\ker d_n,\ n\geqslant 1;\ K_0=\ker\varepsilon;\ K_{-1}=A.$$

若T是R-mod到S-mod的一个加法共变函子，则有

$L_{n+1}T(A)=L_{n+1}T(K_{-1})\cong L_nT(K_0)\cong L_{n-1}T(K_1)\cong\cdots\cong L_1T(K_{n-1})$, $\forall n\geqslant 1$.

证 明显看出，左R-映射序列

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow 0$$

是K_0的一个投射分解. 为了和一般的投射分解的记法一致，我

们将下标修改一下：命

$$Q_n = P_{n+1},\quad \Delta_n = d_{n+1},\quad n \geqslant 1,$$

则得到K_0的投射分解

$$Q:\qquad \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{\Delta_2} Q_1 \xrightarrow{\Delta_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} K_0 \longrightarrow 0,$$

其中$\eta(q_0) = d_1(q_0)$，$\forall\, q_0 \in Q_0$。

于是当$n \geqslant 1$时，有

$L_nT(K_0) \cong H_n(TQ_{K_0}) = \ker T(\Delta_n)/\operatorname{im}T(\Delta_{n+1}) =$

$\ker T(d_{n+1})/\operatorname{im}T(d_{n+2}) = H_{n+1}(TP_A) = L_{n+1}T(A)$。即 $L_nT(K_0) \cong L_{n+1}T(K_{-1})$。

因为左R-映射序列

$$\cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} K_1 \longrightarrow 0$$

是K_1的一个投射分解，故当$n-1 \geqslant 1$时同样可得$L_{n-1}T(K_1) \cong L_{n+1}T(K_{-1})$。

继续作下去，就得到

$L_{n+1}T(A) = L_{n+1}T(K_{-1}) \cong L_nT(K_0) \cong \cdots \cong L_1T(K_{n-1})$，$\forall\, n \geqslant 1$。

定义18.3 当取R-mod到$\mathbf{Z}$-mod的加法共变函子$T = A\otimes_R$时，其第n左导来函子L_nT记作

$$\operatorname{Tor}_n^R(A, -).$$

并将$\operatorname{Tor}_n^R(A, -)(X)$记成$\operatorname{Tor}_n^R(A, X)$。

由推论18.1立刻得到下面推论。

推论18.2 设已给左R-模B的一个投射分解

$$P:\qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0.$$

记

$$K_n = \ker d_n,\ n \geqslant 1;\quad K_0 = \ker\varepsilon;\quad K_{-1} = B$$

则有

$$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(A,B)=\mathrm{Tor}^R_{n+1}(A,\ K_{-1})\cong\mathrm{Tor}^R_n(A,\ K_0)\cong\cdots$$

$$\cong\mathrm{Tor}^R_1(A,K_{n-1}),\ \forall n\geqslant 1.$$

定义18.4 当取mod-R到 mod-$\mathbf{Z}$ 的加法共变函子 $T=\otimes_R B$时，其第n左导来函子L_nT记作

$$\mathrm{Tor}^R_n(-,\ B),$$

并将$\mathrm{Tor}^R_n(-,\ B)\ (Y)$ 记成$\mathrm{Tor}^R_n\ (Y,B)$。

同样，有下面推论。

推论18.3 设已给右R-模A的一个投射分解

$$P:\qquad \cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

记

$$K_n=\ker d_n,\ n\geqslant 1;\ K_0=\ker\varepsilon;\ K_{-1}=A.$$

则有

$$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(A,\ B)=\mathrm{Tor}^R_{n+1}(K_{-1},\ B)\cong\mathrm{Tor}^R_n(K_0,\ B)\cong\cdots$$

$$\cong\mathrm{Tor}^R_1(K_{n-1},B),\ \forall n\geqslant 1.$$

按照上面的记法：$\mathrm{Tor}^R_n(A,\ -)(B)=\mathrm{Tor}^R_n(A,\ B)$，又有$\mathrm{Tor}^R_n(-,B)\ (A)=\mathrm{Tor}^R_n(A,B)$．但 $\mathrm{Tor}^R_n(A,-)(B)$ 是否等于 $\mathrm{Tor}^R_n(-,B)(A)$，这个问题将在第七章中解决。

18.3 加法共变函子 T 的第 n 右导来函子 R^nT

设T是R-mod到S-mod的一个加法共变函子。

可以认为能一次性地对每一个左R-模都已选定了一个内射分解。

当A是左R-模时，设其选定的内射分解是

$$E:\qquad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\xrightarrow{d^2}\cdots$$

于是得到左R-复形

$$E_A:\quad 0\longrightarrow E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\longrightarrow\cdots$$

将T作用到E_A上，得到左S-复形

$$TE_A:\quad 0\longrightarrow T(E^0)\xrightarrow{T(d^0)}T(E^1)\xrightarrow{T(d^1)}T(E^2)\longrightarrow\cdots$$

这样，就得到复形TE_A的第$-n$同调模$H_{-n}(TE_A)=\ker T(d^n)/\operatorname{im}T(d^{n-1})$。我们将它记作$H^n(TE_A)$。它是左$S$-模。

现在命

$$R^nT(A)=H^n(TE_A).$$

当已给左R-映射f: $A\longrightarrow B$时，据定理18.2知有f上的链映射$\bar{f}$: $E_A\longrightarrow F_B$ 使下图中的每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \xrightarrow{d^1} & E^2 & \longrightarrow\cdots\\
 & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}^0} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}^1} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}^2} & \\
0\longrightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & F^0 & \xrightarrow{e^0} & F^1 & \xrightarrow{e^1} & F^2 & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

其中F是B的选定的内射分解。于是有第$-n$同调映射$H_{-n}(T(\bar{f}))$。它由f确定，而与f上的链映射$\bar{f}$的选取无关。我们将它记成$H^n(T(\bar{f}))$。

现在命

$$R^nT(f)=H^n(T(\bar{f})).$$

容易验证，R^nT是R-mod到S-mod的一个共变函子，且是加法函子。

定义18.5 R^nT叫做T的第n右导来函子。

若一次性地对每一个左R-模另选一个内射分解，则同样得到T的第n右导来函子，不妨将它记作$\hat{R}^nT$，和定理18.3完全类似，有下面定理。

定理18.4 R^nT与$\hat{R}^nT$自然等价。特别，有

$$R^nT(A)\cong\hat{R}^nT(A),\quad\forall\text{ 左}R\text{-模}A.$$

请读者自己证明。

这个定理说明T的第n右导来函子R^nT本质上与模的内射分解的选取无关。

和推论18.1相类似，有下面推论。

推论18.4 设已给左R-模A的一个内射分解

$$E: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

记

$$L^n = \operatorname{im} d^{n-1},\ n \geqslant 1;\ L^0 = \operatorname{im} \varepsilon.$$

若T是R-mod到S-mod的一个加法共变函子，则有

$$R^{n+1}T(A) \cong R^{n+1}T(L^0) \cong R^nT(L^1) \cong \cdots \cong R^1T(L^n),$$

$\forall n \geqslant 1$。

请读者自己证明。

定义18.6 当取R-mod到$\mathbf{Z}$-mod的加法共变函子$T = \operatorname{Hom}_R(A, -)$时，其第$n$右导来函子$R^nT$记作

$$\operatorname{Ext}_R^n(A, -),$$

并将$\operatorname{Ext}_R^n(A, -)(X)$记成$\operatorname{Ext}_R^n(A, X)$。

由推论18.4立刻知道有下面推论。

推论18.5 设已给左R-模B的一个内射分解

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

记

$$L^n = \operatorname{im} d^{n-1},\ n \geqslant 1;\ L^0 = \operatorname{im} \varepsilon.$$

则有

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(A, B) \cong \operatorname{Ext}_R^{n+1}(A, L^0) \cong \operatorname{Ext}_R^n(A, L^1) \cong \cdots$$
$$\cong \operatorname{Ext}_R^1(A, L^n),\ \forall n \geqslant 1.$$

18.4 加法逆变函子T的第n右导来函子R^nT

设T是R-mod到S-mod的一个加法逆变函子。

可以认为能一次性地对每一个左R-模都已选定了一个投射

分解.

当A是左R-模时，设其选定的投射分解是

$$P: \quad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

将T作用到左R-复形P_A上，得到左S-复形

$$TP_A: \quad 0 \longrightarrow T(P_0) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_1) \xrightarrow{T(d_2)} T(P_2) \longrightarrow \cdots$$

这样，就得到复形TP_A的第$-n$同调模$H_{-n}(TP_A)$ $=\ker T(d_{n+1})/\operatorname{im}T(d_n)$.我们将它记作$H^n(TP_A)$，它是左$S$-模.

现在命

$$R^nT(A)=H^n(TP_A).$$

当已给左R-映射$f: A\longrightarrow B$时，由定理18.1知有f上的链映射$\bar{f}: P_A\longrightarrow Q_B$ 使下图中每一个正方形都是交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \bar{f}_1 & & \downarrow \bar{f}_0 & & \downarrow f & & \\
\cdots \longrightarrow Q_1 & \xrightarrow{e_1} & Q_0 & \xrightarrow{\eta} & B & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中Q是B的选定的投射分解.于是有第$-n$同调映射$H_{-n}(T(\bar{f}))$，它由f确定，而与f上的链映射$\bar{f}$的选取无关.我们将它记成$H^n(T(\bar{f}))$.

现在命

$$R^nT(f)=H^n(T(\bar{f})).$$

容易验证，R^nT是R-mod到S-mod的一个逆变函子，且是加法函子.

定义18.7 R^nT叫做T的第n右导来函子.

若一次性地对每一个左R-模另选一个投射分解，则同样得到T的第n右导来函子，不妨将它记作$\hat{R}^nT$，和定理18.3及定理18.4完全类似，有下面定理.

定理18.5 R^nT与$\hat{R}^nT$自然等价.特别，有

$$R^nT(A)\cong\hat{R}^nT(A), \ \forall \text{左}R\text{-模}A.$$

这个定理说明T的第n右导来函子R^nT本质上与模的投射分解的选取无关。

和推论18.1相类似，有下面推论。

推论18.6　设已给左R-模A的一个投射分解

$$P: \quad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

记

$$K_n = \ker d_n,\ n \geqslant 1;\ K_0 = \ker \varepsilon;\ K_{-1} = A.$$

若T是R-mod到S-mod的一个加法逆变函子，则有

$R^{n+1}T(A) = R^{n+1}T(K_{-1}) \cong R^nT(K_0) \cong \cdots \cong R^1T(K_{n-1})$，$\forall n \geqslant 1$.

定义18.8　当取　R-mod 到 $\mathbf{Z}$-mod 的加法逆变函子$T = \mathrm{Hom}_R(-, A)$时，其第n右导来函子R^nT记作

$$\mathrm{Ext}_R^n(-, A).$$

并将$\mathrm{Ext}_R^n(-, A)(X)$记成$\mathrm{Ext}_R^n(X, A)$。

由推论18.6立刻得到下面推论。

推论18.7　设已给左R-模B的一个投射分解

$$P: \quad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

记

$$K_n = \ker d_n, n \geqslant 1;\ K_0 = \ker \varepsilon;\ K_{-1} = B.$$

则有

$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(B, A) = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(K_{-1}, A) \cong \mathrm{Ext}_R^n(K_0, A) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1}, A)$，$\forall n \geqslant 1$.

按照上面记法：$\mathrm{Ext}_R^n(A, -)(B) = \mathrm{Ext}_R^n(A, B)$，又有$\mathrm{Ext}_R^n(-, B)(A) = \mathrm{Ext}_R^n(A, B)$，但$\mathrm{Ext}_R^n(A, -)(B)$是否等于$\mathrm{Ext}_R^n(-, B)(A)$？这个问题将在第六章中解决。

18.5　加法逆变函子T的第n左导来函子L_nT

设T是R-mod到S-mod的一个加法逆变函子。

可以认为能一次性地对每一个左 R- 模都已选定了一个内射分解。

当A是左R-模时，设其选定的内射分解是

$$E: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

将T作用到左R-复形E_A上，得到左S-复形

$$TE_A: \quad \cdots \longrightarrow T(E^2) \xrightarrow{T(d^1)} T(E^1) \xrightarrow{T(d^0)} T(E^0) \longrightarrow 0.$$

这样，就得到复形 TE_A 的第 n 同调模 $H_n(TE_A) = \ker T(d^{n-1})/\mathrm{im}T(d^n)$。它是左$S$-模。

现在命

$$L_nT(A) = H_n(TE_A).$$

当已给左R-映射$f: A \longrightarrow B$时，由定理18.2知有 f 上的链映射$\overline{f}: E_A \longrightarrow F_B$使下图中每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow \overline{f}^0 & & \downarrow \overline{f}^1 & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & F^0 & \xrightarrow{e^0} & F^1 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

其中F是B的选定的内射分解。于是有第n同调映射 $H_n(T(\overline{f}))$，它由f确定，而与f上的链映射$\overline{f}$的选取无关。

现在命

$$L_nT(f) = H_n(T(\overline{f})).$$

容易验证，L_nT是R-mod到S-mod 的一个逆变函子，且是加法函子。

定义18.8 L_nT叫做T的第n左导来函子。

若一次性地对每一个左 R- 模另选一个内射分解，则同样得到T的第n左导来函子，不妨将它记作$\hat{L}_nT$。和定理 18.3、18.4及18.5完全类似，有下面定理。

定理18.6 L_nT与$\hat{L}_nT$自然等价。特别，有

$$L_nT(A) \cong \hat{L}_nT(A), \quad \forall \text{左}R\text{-模}A.$$

这个定理说明T的第n左导来函子L_nT本质上与模的内射分解的选取无关。

和推论18.4相类似，有下面推论。

推论18.8 设已给左R-模A的一个内射分解

$$E:\qquad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\longrightarrow\cdots$$

记

$$L^n=\mathrm{im}\,d^{n-1},n\geqslant 1;\ L^0=\mathrm{im}\,\varepsilon.$$

若T是R-mod到S-mod的一个加法逆变函子，则有

$$L_{n+1}T(A)\cong L_{n+1}T(L^0)\cong L_nT(L^1)\cong\cdots\cong L_1T(L^n),\ \forall\, n\geqslant 1.$$

18.6 马蹄引理

现在我们来证明同调代数中又一个基本的定理，即下面的定理。

定理18.7（马蹄引理） 设已给左R-映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & P'_1 & & & & P''_1 & & \\
 & & {\scriptstyle d_1'}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle d_1''} & & \\
 & & P'_0 & & & & P''_0 & & \\
 & & {\scriptstyle \varepsilon'}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon''} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

其中左边竖列P'是A'的一个投射分解，右边竖列P''是A''的一个投射分解，下面横行是短正合列。则存在A的一个投射分解

$$P:\qquad \cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

并存在i上的链映射f: $P'_{A'}\longrightarrow P_A$及$p$上的链映射$g$:

$P_A \longrightarrow P''_{A''}$使

$$0 \longrightarrow P'_{A'} \xrightarrow{f} P_A \xrightarrow{g} P''_{A''} \longrightarrow 0$$

是可裂短正合列。

证 命$P_0 = P_0' \oplus P_0''$，则P_0是投射模，且有可裂短正合列

$$0 \longrightarrow P_0' \xrightarrow{f_0} P_0 \xrightarrow{g_0} P_0'' \longrightarrow 0,$$

其中$f_0(x') = (x', 0)$，$\forall x' \in P_0'$；$g_0(x', x'') = x''$，$\forall (x', x'') \in P_0 = P_0' \oplus P_0''$。

因为P_0''是投射模，故可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} & & P_0'' \\ & \swarrow^{\sigma_0} & \downarrow \varepsilon'' \\ A & \xrightarrow{p} & A'' \end{array}$$

其中σ_0是左R-映射。

命

$$\varepsilon: P_0 \longrightarrow A$$
$$(x', x'') \longmapsto i\varepsilon'(x') + \sigma_0(x'')$$

则易知ε是左R-映射。实际上ε又是满射。这是因为当$a \in A$时，由于ε''是满射，故有 $x'' \in P_0''$使 $p(a) = \varepsilon''(x'')$ ，从而 $p(a) = p\sigma_0(x'')$。因此 $a - \sigma_0(x'') \in \ker p = \operatorname{im} i$。 于是有 $a' \in A'$使 $a - \sigma_0(x'') = i(a')$。从而有$x' \in P_0'$ 使$a - \sigma_0(x'') = i\varepsilon'(x')$。故 $a = i\varepsilon'(x') + \sigma_0(x'')$。因此$\varepsilon$是满射。

现在证明下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_0' & \xrightarrow{f_0} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & P_0'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

事实上，当 $x' \in P_0'$时，$\varepsilon f_0(x') = \varepsilon(x', 0) = i\varepsilon(x')$，

故 $\varepsilon f_0=i\varepsilon'$，而当 $(x',x'')\in P_0$时，$\varepsilon''g_0(x',x'')=\varepsilon''(x'')$，$p\varepsilon(x',x'')=pi\varepsilon'(x')+p\sigma_0(x'')=\varepsilon''(x'')$。故 $\varepsilon''g_0=p\varepsilon$。

这样，我们已作好了第一层。

当向上作第二层时，不能简单地完全按构作第一层的作法来作。我们先命

$$K'_0=\ker\varepsilon',\quad K_0=\ker\varepsilon,\quad K''_0=\ker\varepsilon''$$

则易知有短正合列

$$0\longrightarrow K'_0\xrightarrow{f_0'}K_0\xrightarrow{g_0'}K''_0\longrightarrow 0$$

且有交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
K'_0 & \xrightarrow{f'_0} & K_0 & \xrightarrow{g'_0} & K''_0\\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow\\
P'_0 & \xrightarrow{f_0} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & P''_0
\end{array}\qquad\qquad (甲)$$

这里$f'_0(x')=f_0(x')$，$\forall\, x'\in K'_0$；$g'_0(x)=g_0(x)$，$\forall\, x\in K_0$。

现在利用图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & P_1' & & & & P_1'' & & \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle d'_0} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle d'_1} & & \\
0 & \longrightarrow & K'_0 & \xrightarrow{f_0'} & K_0 & \xrightarrow{g_0'} & K'_0 & \longrightarrow & 0\\
 & & \big\downarrow & & & & \big\downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

按照作第一层的方法，可以得到一个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 & \xrightarrow{g_1} & P''_1 & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle d'_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle d_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle d'_1}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K'_0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K''_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}\qquad\qquad (乙)$$

其中上面横行是可裂短正合列，$P_1=P'_1\oplus P''_1$ 是投射模，f_1是入射，g_1是投射。又，d_1是左R-满射。

将（甲）、（乙）两个图接起来，我们就向上作好了第二层，即有交换图:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 & \xrightarrow{g_1} & P''_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_1} & & \downarrow{\scriptstyle d_1} & & \downarrow{\scriptstyle d''_1} & & \\
0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{f_0} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & P''_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon''} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

而且中间竖列是正合列.

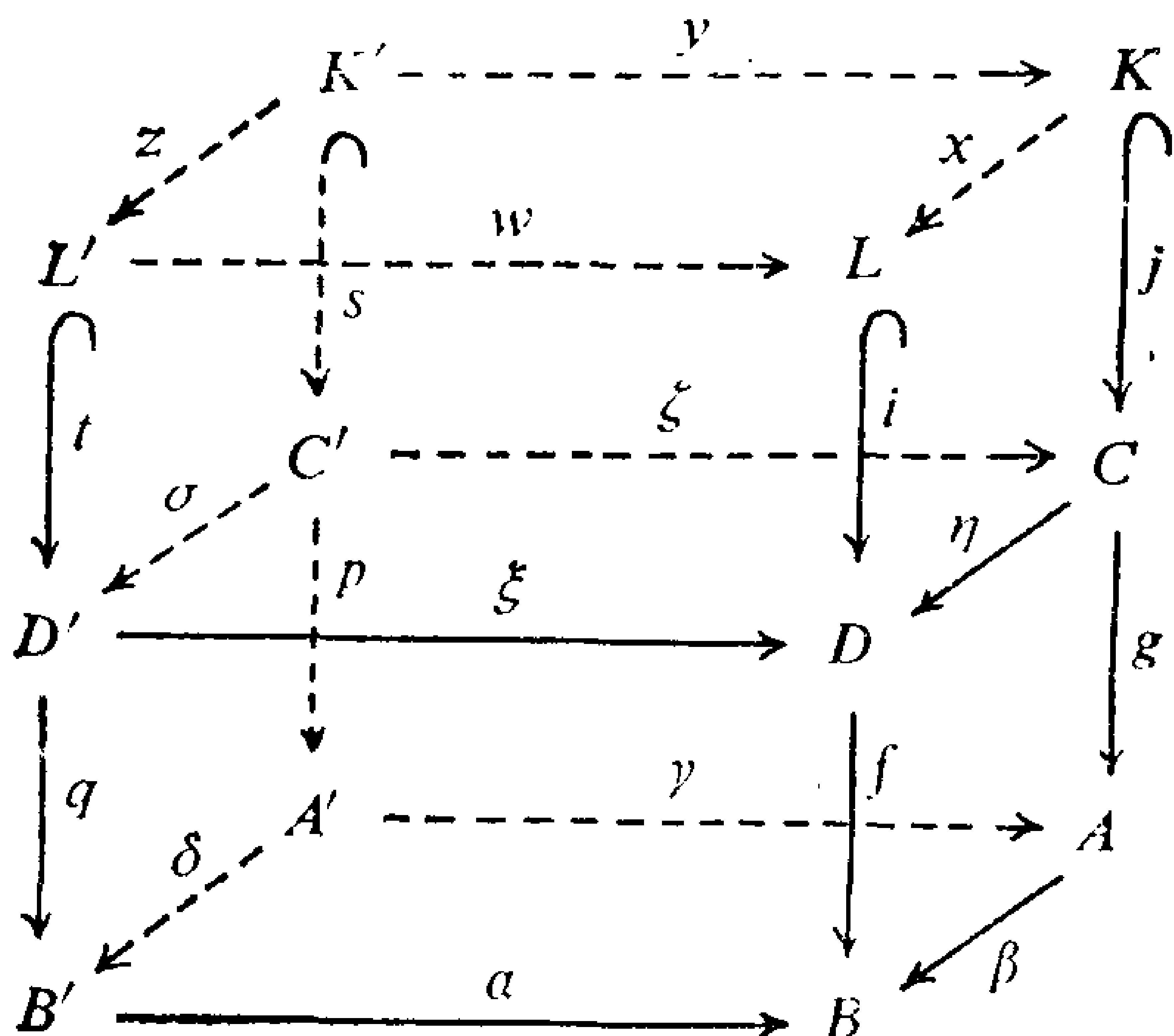
按此逐步向上做去，即得A的一个投射分解 P 及链映射f，g满足定理的要求.

我们还可以得到“立体的马蹄引理”(即下面的定理18.8).为此，先证明下面引理.

引理18.1 设已给左R-映射交换图（立体的）:

$$
\begin{array}{ccccc}
C' & & \xrightarrow{\quad \zeta \quad} & & C \\
 & \searrow^{\sigma} & \vdots\,{\scriptstyle p} & & \searrow^{\eta} \quad \downarrow{\scriptstyle g} \\
 & D' & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & D & \\
 & \downarrow{\scriptstyle q} & A' \dashrightarrow^{\gamma} & \downarrow{\scriptstyle f} & A \\
 & & \searrow^{\delta} & & \searrow^{\beta} \\
 & B' & \xrightarrow{\quad \alpha \quad} & B &
\end{array}
$$

命 $L=\ker f$, $K=\ker g$, $K'=\ker p$, $L'=\ker q$, 则可补成交换图:



其中补出的x，y，z，w都是左R-映射。

证 因为$f(\eta j)=(f\eta)j=(\beta g)j=0$，故$\mathrm{im}\eta j\subseteq\ker f=L$，因此可以命 $x=i^{-1}\eta j$。这里 i^{-1} 并非i的逆映射，而是指取 i 作用下的逆象。同理，命 $y=j^{-1}\zeta s$，$z=t^{-1}\sigma s$，$w=i^{-1}\xi t$，则首先可知最高层四个竖立的正方形都是交换图。又因为 $xy=i^{-1}\eta\zeta s$，$wz=i^{-1}\xi\sigma s=i^{-1}\eta\zeta s$，故最上面水平的正方形是交换图。

定理18.8 设已给左R-映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{s} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{t} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (丙)$$

其中上、下两行都是短正合列。

再设在四个角 A'，A''，B'，B''上已分别竖起它们各自的投射分解P'，P''，Q'，Q''，并已给出f'上的链映射F'：$P'_{A'}\longrightarrow Q'_{B'}$及$f''$上的链映射$F''$：$P''_{A''}\longrightarrow Q''_{B''}$。

则可在 A，B上分别竖起它们各自的一个投射分解P，Q及建立f上的一个链映射F：$P_A\longrightarrow Q_B$，并可分别建立 i，s，j，t上

的链映射$\bar{f}$，$\bar{g}$，$\bar{\xi}$，$\bar{\eta}$使得有链映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P'_{A'} & \xrightarrow{\bar{f}} & P_A & \xrightarrow{\bar{g}} & P''_{A''} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F''} & & \\
0 & & Q'_{B'} & \xrightarrow{\bar{\xi}} & Q_B & \xrightarrow{\bar{\eta}} & Q''_{B''} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

且其中上、下两行都是可裂短正合列。

证。我们从(丙)出发，一层一层地向上作。

先来作第一层。

根据定理18.7的证明，首先可以作出两个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{\bar{f}_0} & P_0 & \xrightarrow{\bar{g}_0} & P''_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon''} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{s} & A'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中P_0是投射模，上面一行是可裂短正合列，ε是满射；

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Q'_0 & \xrightarrow{\bar{\xi}_0} & Q_0 & \xrightarrow{\bar{\eta}_0} & Q''_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta'} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{t} & B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

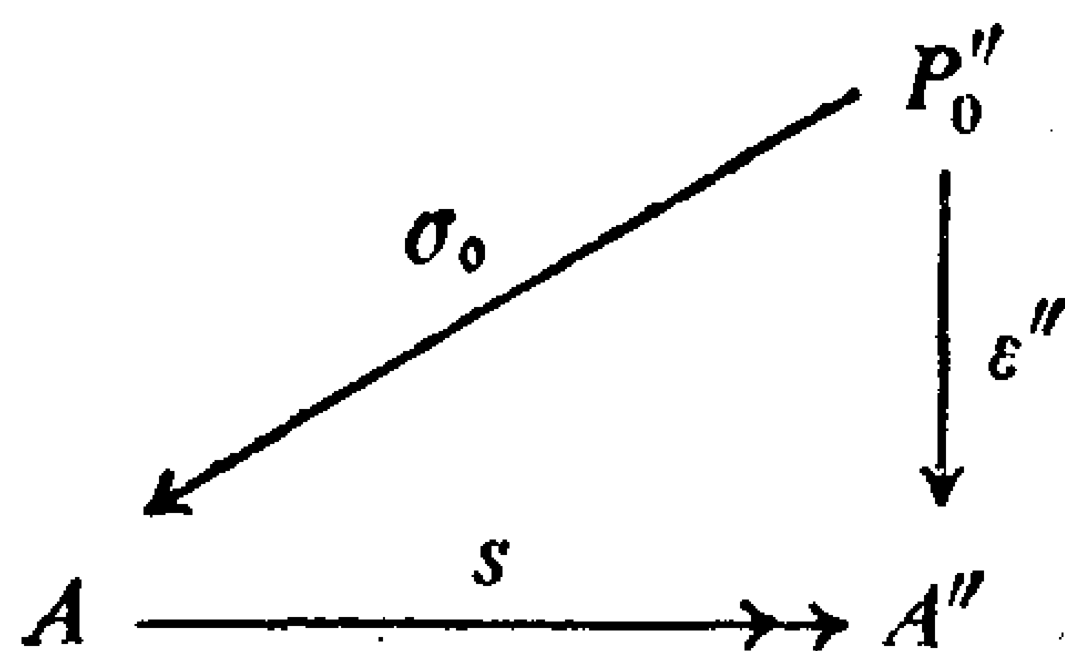
其中Q_0是投射模，上面一行是可裂短正合列，δ是满射。

于是我们先得到图

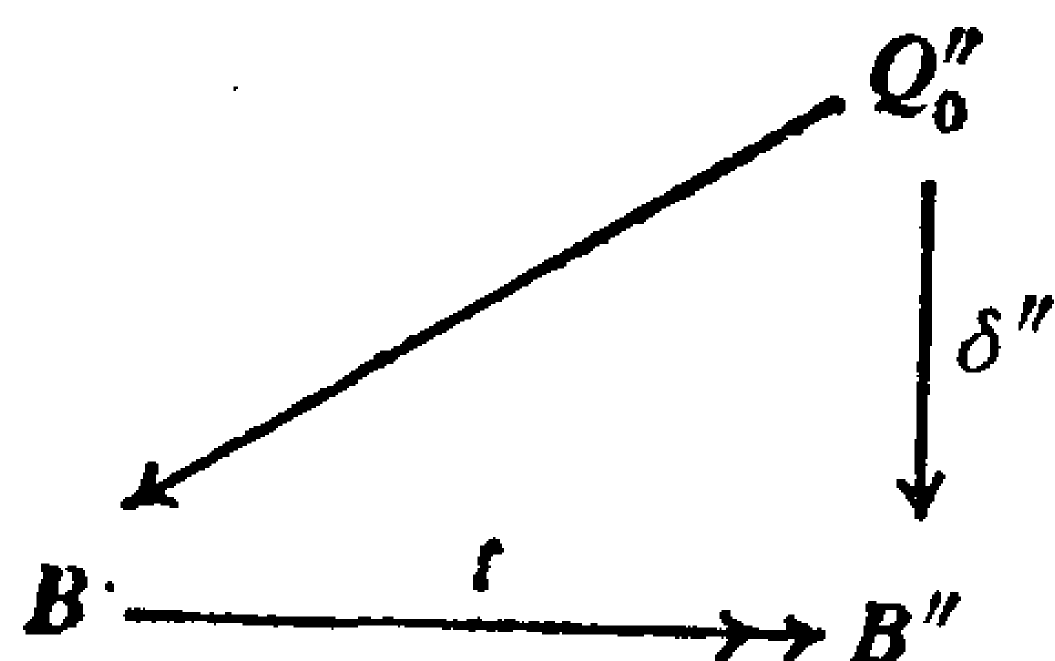
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & P'_0 & & \xrightarrow{\bar{f}_0} & & P_0 & \xrightarrow{\bar{g}_0} & P''_0 \\
 & {\scriptstyle F'_0}\swarrow & & & & & & {\scriptstyle F''_0}\swarrow & \\
Q'_0 & \xrightarrow{\bar{\xi}_0} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & Q_0 & & \xrightarrow{\bar{\eta}_0} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & Q''_0 & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon''} \\
 & & A' & \xrightarrow{i} & & & A & \xrightarrow{s} & A'' \\
\downarrow{\scriptstyle \delta'} & {\scriptstyle f'}\swarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & {\scriptstyle f}\swarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & \swarrow{\scriptstyle f''} \\
B' & & \xrightarrow{j} & B & & \xrightarrow{t} & & B'' &
\end{array} \qquad (丁)$$

现在只剩下作左R-映射 $F_0: P_0\longrightarrow Q_0$使得图（丁）中凡是含 F_0的正方形都是交换图。

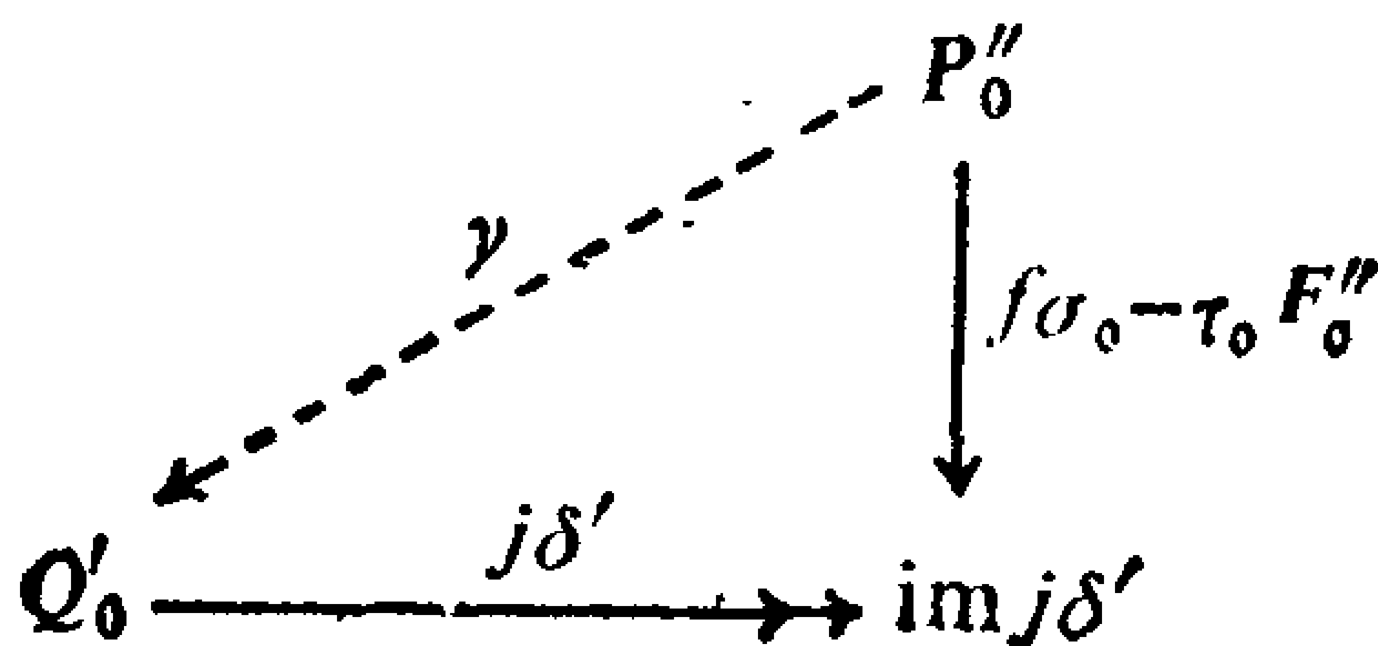
先据定理 18.7 的证明知 $P_0=P'_0\oplus P''_0$，ε: $P_0\longrightarrow A$ 是 $(x',x'')\longmapsto i\varepsilon'(x')+\sigma_0(x'')$，其中$\sigma_0$使下图交换：



$Q_0=Q'_0\oplus Q''_0$，δ: $Q_0\longrightarrow B$ 是 $(y',y'')\longmapsto f\delta'(y')+\tau_0(y'')$，其中$\tau_0$使下图交换：



考虑$f\sigma_0-\tau_0F''_0$: $P''_0\longrightarrow B$， 由于 $t(f\sigma_0-\tau_0F_0'')=tf\sigma_0-t\tau_0F''_0=f''s\sigma_0-\delta''F''_0=f''\varepsilon''-\delta''F''_0=0$，故 $\mathrm{im}(f\sigma_0-\tau_0F''_0)\subseteq\ker t=\mathrm{im}j$，但$\delta'$是满射，从而 $\mathrm{im}j=\mathrm{im}j\delta'$，因此 $\mathrm{im}(f\sigma_0-\tau_0F''_0)\subseteq\mathrm{im}j\delta'$.由于$P''_0$是投射模，故可补成交换图：



其中补出的γ是左R-映射。

现在命

$$F_0:\quad P_0 \longrightarrow Q_0$$
$$(x', x'') \longmapsto (F'_0(x') + \gamma(x''), F''_0(x''))$$

则易知F_0是左R-映射。

最后，我们证明图（丁）中凡是含F_0的正方形都是交换图。

当$x' \in P'_0$时，$\bar{\xi}_0 F'_0(x') = (F'_0(x'),\ 0)$，$F_0\bar{f}_0\ (x') = F_0(x',\ 0) = (F_0'(x') + \gamma(0), F_0''(0)) = (F_0'(x'), 0)$. 故$\bar{\xi}_0 F_0' = F_0 \bar{f}_0$。

当$(x', x'') \in P_0$时，$\bar{\eta}_0 F_0(x', x'') = \bar{\eta}_0(F_0'(x') + \gamma(x''), F_0''(x'')) = F_0''(x''), F_0''\bar{g}_0(x', x'') = F_0''(x'')$。故$\bar{\eta}_0 F_0 = F''_0\bar{g}_0$。

当$(x', x'') \in P_0$时，$\delta F_0(x', x'') = \delta(F_0'(x') + \gamma(x''), F''_0(x'')) = j\delta'(F'_0(x') + \gamma(x'')) + \tau_0 F''_0(x'') = j\delta' F'_0(x') + (f\sigma_0 - \tau_0 F'_0)(x'') + \tau_0 F''_0(x'') = j\delta' F'_0(x') + f\sigma_0(x'')$，$f\varepsilon(x', x'') = f(i\varepsilon'(x') + \sigma_0(x'')) = fi\varepsilon'(x') + f\sigma_0(x'') = jf'\varepsilon'(x') + f\sigma_0(x'') = j\delta' F_0'(x') + f\sigma_0(x'')$，故$\delta F_0 = f\varepsilon$。

这样，我们就已经向上作好了第一层。

在定理18.7的证明中，当作好了第一层以后，用核来过渡即可向上作出第二层。这里同样用核来过渡（利用引理18.1）即可向上作出第二层。然后继续向上作去即得。

定理18.7及定理18.8的对偶也成立，即：将定理18.7及定理18.8中所提到的投射分解都换成内射分解，定理也成立。请读者自己证明。

18.7 “长正合列”定理

前面我们曾经证明，当已给一个左R-链映射短正合列时，可以得到一个由左R-映射及同调模组成的长正合列（定理17.2）。现在我们证明，当已给一个左R-短正合列时，也可以得到一个长正合列，即有下面定理。

定理18.9 设已给左R-短正合列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

再设T是R-mod到S-mod的一个加法共变或逆变函子.

(i) 若T是共变函子，则有左S-长正合列

$$\cdots \longrightarrow L_nT(A') \xrightarrow{L_nT(i)} L_nT(A) \xrightarrow{L_nT(p)} L_nT(A'') \xrightarrow{\delta_n}$$
$$L_{n-1}T(A') \longrightarrow L_{n-1}T(A) \longrightarrow L_{n-1}T(A'') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \longrightarrow$$
$$L_0T(A') \longrightarrow L_0T(A) \qquad L_0T(A'') \longrightarrow 0$$

及

$$0 \longrightarrow R^0T(A') \longrightarrow R^0T(A) \longrightarrow R^0T(A'') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \longrightarrow$$
$$R^nT(A') \xrightarrow{R^nT(i)} R^nT(A) \xrightarrow{R^nT(p)} R^nT(A'') \xrightarrow{\sigma_n}$$
$$R^{n+1}T(A') \longrightarrow R^{n+1}T(A) \longrightarrow R^{n+1}T(A'') \longrightarrow \cdots,$$

这里的δ_n及σ_n我们将在定理的证明中说明。

(ii) 若T是逆变函子，则有和(i)类似的两个左S-长正合列，只要将(i)的两个长正合列中的A'换成A''，A''换成A'，并将$L_nT(i)$换成$L_nT(p)$，$L_nT(p)$换成$L_nT(i)$，$R^nT(i)$换成$R^nT(p)$，$R^nT(p)$换成$R^nT(i)$，δ_n及σ_n作相应改变.

证 我们只对共变函子的左导来函子进行证明. 其余情形可以完全类似地证得.

设构作L_nT时A'及A''的选定的投射分解是P'及P''. 于是根据定理18.7，A有一个投射分解$\hat{P}$（$\hat{P}$未必是构作L_nT时A的选定的投射分解），并分别有i上的链映射$\bar{f}$及p上的链映射$\bar{g}$使得

$$0 \longrightarrow P'_{A'} \xrightarrow{\bar{f}} \hat{P}_A \xrightarrow{\bar{g}} P''_{A''} \longrightarrow 0$$

是可裂短正合列.

因此对于每一个$n \in \mathbf{Z}$，有可裂短正合列

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\bar{f}_n} \hat{P}_n \xrightarrow{\bar{g}_n} P''_n \longrightarrow 0.$$

因为加法函子保持可裂短正合列，因此对于每一个$n \in \mathbf{Z}$，

有可裂短正合列

$$0 \longrightarrow T(P'_n) \xrightarrow{T(\bar{f}_n)} T(\hat{P}_n) \xrightarrow{T(\bar{g}_n)} T(P''_n) \longrightarrow 0$$

从而有短正合列

$$0 \longrightarrow TP'_{A'} \xrightarrow{T(\bar{f})} T\hat{P}_A \xrightarrow{T(\bar{g})} TP''_{A''} \longrightarrow 0,$$

于是据定理17.2知有左S-长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_n(TP'_{A'}) \xrightarrow{H_n(T(\bar{f}))} H_n(T\hat{P}_A) \xrightarrow{H_n(T(\bar{g}))} H_n(TP''_{A''})$$
$$\xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(TP'_{A'}) \longrightarrow \cdots,$$

其中∂_n是连接同态映射。而这就是正合列

$$\cdots \longrightarrow L_nT(A') \xrightarrow{H_n(T(\bar{f}))} \hat{L}_nT(A) \xrightarrow{H_n(T(\bar{g}))} L_nT(A'')$$
$$\xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}T(A') \quad \cdots.$$

据定理18.3知 L_nT与$\hat{L}_nT$自然等价，有左 S-同构映射 τ_A: $L_nT(A) \longrightarrow \hat{L}_nT(A)$，且在该定理的证明中我们已具体地作出了$\tau_A$及$\tau_A^{-1}$。用此容易验证下图中每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \longrightarrow L_nT(A') & \xrightarrow{H_n(T(\bar{f}))} & \hat{L}_nT(A) & \xrightarrow{H_n(T(\bar{g}))} & L_nT(A'') \\
\downarrow 1 & & \downarrow \tau_A^{-1} & & \downarrow 1 \\
\cdots \longrightarrow L_nT(A') & \xrightarrow{L_nT(i)} & L_nT(A) & \xrightarrow{L_nT(p)} & L_nT(A'')
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}T(A') \longrightarrow \cdots \\
\downarrow 1 \\
\xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}T(A') \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

因为上面横行是正合列，故下面横行也是正合列。由此并知δ_n恰是同调模到同调模的连接同态映射∂_n。

18.8 连接同态映射的自然性

我们曾经证明过连接同态映射的自然性定理（定理17.3）。现

在我们证明连接同态映射∂_n在另一种意义下也是自然的。这里我们只就共变函子的左导来函子进行讨论。有下面定理。

定理18.10　设已给左R-映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{q} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (\text{I})$$

其中上、下两行都是短正合列。

若T是 R-mod到S-mod的一个加法共变函子，则有交换图：

$$\begin{array}{ccc} L_nT(A'') & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}T(A') \\ \downarrow{\scriptstyle L_nT(f'')} & & \downarrow{\scriptstyle L_nT(f')} \\ L_nT(B'') & \xrightarrow{\partial_n'} & L_{n-1}T(B') \end{array}$$

证　先在图（I）的四个角A', A'', B', B''上竖起构成L_nT时它们各自的投射分解 P', P'', Q', Q''，并作出f'上的链映射F'：$P'_{A'}\longrightarrow Q'_{B'}$及 f''上的链映射 F''：$P''_{A''}$　　$Q''_{B''}$。然后根据定理18.8，在图(I)中的 A处竖起它的一个投射分解 $\hat{P}$，在B处竖起它的一个投射分解$\hat{Q}$，再作出f上的链映射F：$\hat{P}_A\longrightarrow\hat{Q}_B$，并分别作出$i, p, j, q$上的链映射$\bar{i}$, $\bar{p}$, $\bar{j}$, $\bar{q}$，使得有链映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_{A'} & \xrightarrow{\bar{i}} & \hat{P}_A & \xrightarrow{\bar{p}} & P''_{A''} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F''} & & \\ 0 & \longrightarrow & Q'_{B'} & \xrightarrow{\bar{j}} & Q_B & \xrightarrow{\bar{q}} & Q''_{B''} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

且其中上、下两行都是可裂短正合列。

用T作用时就得到链映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & TP'_{A'} & \xrightarrow{T(\overline{i})} & T\hat{P}_A & \xrightarrow{T(\overline{p})} & TP'_{A''} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle T(F')} & & \downarrow{\scriptstyle T(F)} & & \downarrow{\scriptstyle T(F'')} & & \\ 0 & \longrightarrow & TQ'_{B'} & \xrightarrow{T(\overline{j})} & T\hat{Q}_B & \xrightarrow{T(\overline{q})} & TQ'_{B''} & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (\text{II})$$

因为对于每一个$n\in\mathbf{Z}$，有可裂短正合列

$$0\longrightarrow P'_n\xrightarrow{\overline{i}_n}\hat{P}_n\xrightarrow{\overline{p}_n}P'_n\longrightarrow 0$$

而T是加法函子，它保持可裂短正合列，故对每一个$n\in\mathbf{Z}$，都有可裂短正合列

$$0\longrightarrow T(P'_n)\xrightarrow{T(\overline{i}_n)}T(\hat{P}_n)\xrightarrow{T(\overline{p}_n)}T(P'_n)\longrightarrow 0.$$

因此图(II)中上面一行是短正合列。同理，图(II)中下面一行也是短正合列。

于是据定理17.3知有交换图:

$$\begin{array}{ccc} H_n(TP'_{A''}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(TP'_{A'}) \\ \downarrow{\scriptstyle H_n(T(F''))} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(T(F'))} \\ H_n(TQ'_{B''}) & \xrightarrow{\partial_n'} & H_{n-1}(TQ'_{B'}) \end{array}$$

也即有交换图:

$$\begin{array}{ccc} L_nT(A'') & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}T(A') \\ \downarrow{\scriptstyle L_nT(f'')} & & \downarrow{\scriptstyle L_nT(f')} \\ L_nT(B'') & \xrightarrow{\partial_n'} & L_{n-1}T(B') \end{array}$$

习 题 五

(1) 证明：左R-复形(A,d)是左R-正合列，当且仅当$H_n(A)=0$，$\forall n\in\mathbf{Z}$。

(2) 设在左R-复形(A,d)中，$d_n=0$，$\forall n\in\mathbf{Z}$。证明：

$H_n(A) \cong A_n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

(3) 设T是R-mod到R-mod的一个正合的共变函子，证明：对于每一个左R-复形A，恒有

$$H_n(T(A)) \cong T(H_n(A)), \ \forall n \in \mathbf{Z}.$$

(4) 证明：在左R-复形作成的范畴 R-Comp中，一个左 R-链映射$f:(A,d) \longrightarrow (A',d')$是一个等价态射，当且仅当每一个$f_n$是左$R$-同构映射。

(5) 设$\{(A^{(k)},d^{(k)}) \mid k \in K\}$是一集左$R$-复形。命

$$\bigoplus_{k \in K} d_n^{(k)}: \bigoplus_{k \in K} A_n^{(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} A_{n-1}^{(k)}$$

$$(\cdots, a_n^{(i)}, \cdots, a_n^{(j)}, \cdots) \longmapsto (\cdots, d_n^{(i)}(a_n^{(i)}), \cdots, d_n^{(j)}(a_n^{(j)}), \cdots)$$

则得到左R-复形

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} A_{n+1}^{(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} A_n^{(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} A_{n-1}^{(k)} \longrightarrow \cdots$$

将此复形记作$(\bigoplus_{k \in K} A^{(k)}, \bigoplus_{k \in K} d^{(k)})$，证明：

$$H_n(\bigoplus_{k \in K} A^{(k)}) \cong \bigoplus_{k \in K} H_n(A^{(k)}), \ \forall n \in \mathbf{Z}.$$

(6) 设$f:(A,d) \longrightarrow (A',d')$是一个左$R$-链映射.
证明：在左R-复形作成的范畴R-Comp中，$A/\ker f$与$\operatorname{im} f$等价。

(7) 设已给左R-链映射短正合列

$$0 \longrightarrow (A',d') \xrightarrow{f} (A,d) \xrightarrow{g} (A'',d'') \longrightarrow 0$$

记$Z_n(A') = \ker d_n'$，$z_n(A) = \ker d_n$，$Z_n(A'') = \ker d_n''$，证明：存在交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
A_n'/\operatorname{im} d_{n+1}' & \longrightarrow & A_n/\operatorname{im} d_{n+1} & \longrightarrow & A_n''/\operatorname{im} d_{n+1}'' & \longrightarrow & 0 \\
\triangle' \downarrow & & \triangle \downarrow & & \triangle'' \downarrow & & \\
0 \longrightarrow Z_{n-1}(A') & \longrightarrow & Z_{n-1}(A) & \longrightarrow & Z_{n-1}(A'') & &
\end{array}$$

且其中上、下两行都是正合列。这里 $\triangle'$是 $a_n' + \operatorname{im} d_{n+1}' \longmapsto d_n'(a_n')$，$\triangle$，$\triangle''$自明。

(8) 设已给左R-映射交换图：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

其中每一列是短正合列，且最下面两行是短正合列。试用蛇引理或长正合列定理证明最上面一行是短正合列。

(9) 设已给左R-链映射短正合列

$$0 \quad (A', d') \xrightarrow{f} (A, d) \xrightarrow{g} (A'', d'') \longrightarrow 0$$

证明：若(A', d')及(A'', d'')都是左R-正合列，则(A, d)也是左R-正合列。

(10) 设已给左R-链映射f：$(A, d) \quad (A', d')$，若存在一集左R-映射$\{s_n: A_n \quad A'_{n+1} | n \in \mathbf{Z}\}$使

$$f_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n, \quad \forall n \in \mathbf{Z},$$

则称f是零同伦的。证明：若$1: (A, d) \quad (A, d)$是零同伦的，其中$1_n = 1_{A_n}$，则(A, d)是左R-正合列。

(11) 设f, g是(A, d)到(A', d')的两个左R-链映射。若F是R-mod到S-mod的一个加法共变函子，证明：$F(f)$与$F(g)$同伦。

(12) 证明定理18.2.

(13) 叙述并证明定理18.7（马蹄引理）的对偶。

(14) 设T是R-mod到S-mod的一个加法共变函子，且T是左

正合的. 证明: R^0T与T自然等价.

(15) 设 $0\to K_q\to P_{q-1}\to P_{q-2}\to\cdots\to P_0\to A\to 0$是左 R-正合列, 其中 $P_0, P_1, \cdots, P_{q-1}$都是投射左$R$-模, $q\geqslant 1$.若T是 R-mod 到S-mod的一个加法共变函子, 则存在ξ,η使

$$0\longrightarrow L_qT(A)\xrightarrow{\xi} T(K_q)\xrightarrow{\eta} T(P_{q-1})$$

是正合列.

第六章　函子Ext

Ext 及 Tor 是两种极其重要的导来函子。它们是同调代数的基本研究对象。本章对函子 Ext 作专门的讨论。

§19　若干基本性质

根据在第五章中给出的定义，$\mathrm{Ext}_R^n(A,-)=R^n\mathrm{Hom}_R(A,-)$，$\mathrm{Ext}_R^n(-,B)=R^n\mathrm{Hom}_R(-,B)$，并曾同时用$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ 记 $\mathrm{Ext}_R^n(A,-)(B)$ 及 $\mathrm{Ext}_R^n(-,B)(A)$，这里留下了一个问题：$\mathrm{Ext}_R^n(A,-)(B)$ 与 $\mathrm{Ext}_R^n(-,B)(A)$ 是否相等？

在这个问题得到解决以前，我们先记

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,-)=R^n\mathrm{Hom}_R(A,-),$$

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=\mathrm{Ext}_R^n(A,-)(B),$$

$$\mathrm{ext}_R^n(-,B)=R^n\mathrm{Hom}_R(-,B),$$

$$\mathrm{ext}_R^n(A,B)=\mathrm{ext}_R^n(-,B)(A).$$

19.1　关于 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$

首先，若 T 是 R-mod 到 S-mod 的一个加法共变函子，则易知当$n<0$时恒有

$$R^nT(B)=0,\quad \forall 左\ R\text{-}模\ B.$$

因此当取 $T=\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 时就得到下面定理。

定理19.1　当$n<0$时，

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0,\quad \forall 左\ R\text{-}模\ A\ 及\ B.$$

现在考虑 $n=0$ 时的情形。我们有下面定理。

定理19.2 $\mathrm{Ext}_R^0(A,-)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 自然等价。特别，有

$$\mathrm{Ext}_R^0(A,B)\cong \mathrm{Hom}_R(A,B),\quad \forall 左 R\text{-模 } A 及 B.$$

证 设左 R- 模 B 的选定的内射分解是

$$\mathrm{E}:\ 0\longrightarrow B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\longrightarrow\cdots$$

于是有复形

$$\mathrm{Hom}_R(A,-)E_B:\ 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,E^0)\xrightarrow{d_*^0}\mathrm{Hom}_R(A,E^1)\xrightarrow{d_*^1}\mathrm{Hom}_R(A,E^2)\longrightarrow\cdots$$

因此得到

$$\mathrm{Ext}_R^0(A,B)=\ker d_*^0\ /\mathrm{im} d_*^{-1}.$$

因为 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 左正合，故有正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,B)\xrightarrow{\varepsilon_*}\mathrm{Hom}_R(A,E^0)\xrightarrow{d_*^0}\mathrm{Hom}_R(A,E^1)$$

所以 $\ker d_*^0=\mathrm{im}\varepsilon_*$，且 ε_* 是单射。

现在命

$$\tau_B:\ \mathrm{Hom}_R(A,B)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(A,B)$$
$$\varphi\longmapsto \varepsilon_*(\varphi)+\mathrm{im} d_*^{-1}$$

则易知 τ_B 是左 $\mathbf{Z}$-同构映射。

我们再证明 τ 是自然变换，即下图变换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(A,B) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathrm{Ext}_R^0(A,B) \\
\downarrow f_* & & \downarrow \mathrm{Ext}_R^0(B,-)(f), \\
\mathrm{Hom}_R(A,C) & \xrightarrow{\tau_C} & \mathrm{Ext}_R^0(A,C)
\end{array}\qquad \forall B\xrightarrow{f}C,\quad (甲)$$

事实上，设 F 是左 R-模 C 的选定的内射分解，则据定理 18.2 知有 f 上的链映射 $\bar{f}: E_B \longrightarrow F_C$ 使下图中的每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varepsilon} & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \xrightarrow{d^1} & E^2 & \longrightarrow \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f}^0 & & \downarrow \bar{f}^1 & & \downarrow \bar{f}^2 & \\
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{h} & F^0 & \xrightarrow{e^0} & F^1 & \xrightarrow{e^1} & F^2 & \longrightarrow
\end{array}$$

用 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 作用之，即得交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,B) & \xrightarrow{\varepsilon_*} & \mathrm{Hom}_R(A,E^0) & \xrightarrow{d^0_*} & \mathrm{Hom}_R(A,E^1) \longrightarrow \cdots \\
\downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}^0_* & & \downarrow \bar{f}^1_* \\
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,C) & \xrightarrow{\eta_*} & \mathrm{Hom}_R(A,F^0) & \xrightarrow{e^0_*} & \mathrm{Hom}_R(A,F^1) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

于是有

$$\mathrm{Ext}^0_R(A,-)(f):\ \mathrm{Ext}^0_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A,C)$$
$$\psi + \mathrm{im}\, d^{-1}_* \longrightarrow \bar{f}^0_*(\psi) + \mathrm{im}\, e^{-1}_*.$$

由于 $\ker d^0_* = \mathrm{im}\,\varepsilon_*$，且 ε_* 是单射，故实际上是 $\varepsilon_*(\varphi) + \mathrm{im}\, d^{-1}_* \longmapsto \bar{f}^0_*\varepsilon_*(\varphi) + \mathrm{im}\, e^{-1}_*$，其中 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$。

这样，当 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ 时，由于

$\tau_c f_*(\varphi) = \eta_* f_*(\varphi) + \mathrm{im}\, e^{-1}_*$，

$\mathrm{Ext}^0_R(A,-)(f) \cdot \tau_B(\varphi) = \mathrm{Ext}^0_R(A,-)(f)(\varepsilon_*(\varphi) + \mathrm{im}$

$d^{-1}_*) = \bar{f}^0_* \varepsilon_*(\varphi) + \mathrm{im} e^{-1}_*$，而$\bar{f}^0_* \varepsilon_* = \eta_* f_*$，故有$\tau_* f_* = \mathrm{Ext}^0_R(A, -)(f)\tau_B$，即图（甲）交换。所以 $\mathrm{Ext}^0_R(A, -)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ 自然等价。

注．在定理 19.2 的证明中仅用到$\mathrm{Hom}_R(A, -)$ 是加法共变函子，且是左正合的．因此，一般地，若 T 是加法共变函子且是左正合的，同样可以证明 R^0T 与 T 自然等价．

由定理 19.2 及定理 18.9 容易得到下面定理．

定理19.3 设已给左 R-短正合列

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \longrightarrow 0,$$

则有左 **Z**- 长正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(A, B)$$

$$\xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(A, B'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A, B') \longrightarrow \cdots$$

证 首先由定理 18.9 知有长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A, B') \xrightarrow{\mathrm{Ext}^0_R(A,\ -)(\alpha)} \mathrm{Ext}^0_R(A, B)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^0_R(A-,\ )(\beta)} \mathrm{Ext}^0_R(A,\ B'') \xrightarrow{\partial_0} \mathrm{Ext}^1_R(A, B') \longrightarrow \cdots$$

于是由定理 19.2 知有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B') & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathrm{Hom}_R(A, B) \\
\downarrow \tau_{B'} & & \downarrow \tau_B \\
0 \longrightarrow \mathrm{Ex}^0_R(A, B') & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^0_R(A,\ -)(\alpha)} & \mathrm{Ext}^0_R(A, B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Hom}_R(A, B'') & \xrightarrow{\partial^0\tau_{B''}} & \mathrm{Ext}^1_R(A,\ B') & \to \cdots \\
 & \downarrow \tau_{B''} & & \downarrow 1 & \\
\xrightarrow{\mathrm{Ext}^0_B(A,\ -)(\beta)} & \mathrm{Ext}^0_R(A, B'') & \xrightarrow{\partial^0} & \mathrm{Ext}^1_R(A, B') & \to \cdots
\end{array}$$

因为下面横行是正合列，故上面横行也是正合列．

这个定理很有意思. 我们知道, 由于 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 一般仅是左正合的, 故仅有正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,B')\xrightarrow{\alpha_*}\mathrm{Hom}_R(A,B)\xrightarrow{\beta_*}\mathrm{Hom}_R(A,B'').$$

而此定理则说明, 若要继续下去并保持正合, 则可用 $\mathrm{Ext}_R^n(A,X)$ 络续补出之.

又, 当 A 是投射左 R-模时, 由于 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 是正合的, 就有正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,B')\xrightarrow{\alpha_*}\mathrm{Hom}_R(A,B)\xrightarrow{\beta_*}\mathrm{Hom}_R(A,B'')\longrightarrow 0.$$

因此自然地猜想当 A 是投射左 R-模时,

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,X)=0,\ \forall \text{左 } R\text{- 模 } X,\ \forall n\geqslant 1.$$

以后我们将证实之.

对于 $n\geqslant 1$ 的情形, 我们有下面定理.

定理19.4 若 B 是内射左 R-模, 则当 $n\geqslant 1$ 时, 有

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0,\ \forall \text{左 } R\text{- 模 } A.$$

证 首先由定理 18.3 知 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ 是否为 0 与 B 的内射分解的选取无关. 今 B 是内射模, 故可取 B 的一个内射分解是

$$E:\qquad 0\longrightarrow B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\longrightarrow\cdots,$$

其中 $E^0=B$; $\varepsilon=1_B$; $E^i=0$, $d^{i-1}=0$, $\forall i\geqslant 1$.

于是得到复形

$$\mathrm{Hom}_R(A,-)E_B:\ 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,E^0)\xrightarrow{d^0{}_*}\mathrm{Hom}_R(A,E^1)\longrightarrow\cdots,$$

从而 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0$, $\forall n\geqslant 1$.

19.2 关于 $\mathrm{ext}_R^n(A,B)$

对于 $\mathrm{ext}_R^n(A,B)$，有与 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ 相平行的定理，其证明也完全类似。因此我们在这里只写出定理而略去证明。

定理19.1′ 当 $n<0$ 时，

$$\mathrm{ext}_R^n(A,B)=0, \quad \forall \text{左 } R\text{-模 } A \text{ 及 } B.$$

定理19.2′ $\mathrm{ext}_R^0(-,B)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 自然等价。特别，有

$$\mathrm{ext}_R^0(A,B)\cong \mathrm{Hom}_R(A,B), \quad \forall \text{左 } R\text{-模 } A \text{ 及 } B.$$

定理19.3′ 设已给左 R-短正合列：

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}A''\longrightarrow 0,$$

则有左$\mathbf{Z}$-长正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A'',B)\xrightarrow{\beta^*}\mathrm{Hom}_R(A,B)\xrightarrow{\alpha^*}$$
$$\mathrm{Hom}_R(A',B)\longrightarrow \mathrm{ext}_R^1(A'',B)\longrightarrow\cdots.$$

这个定理说明，可用 $\mathrm{ext}_R^n(X,B)$ 将正合列 $0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A'',B)\xrightarrow{\beta^*}\mathrm{Hom}_R(A,B)\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}_R(A',B)$ 向右继续补出成为正合列。同时，自然地猜想，当 B 是内射左 R-模时，$\mathrm{ext}_R^n(X,B)=0$，$\forall$ 左R-模X，$\forall n\geqslant 1$，以后我们将证实之。

定理19.4′ 若 A 是投射左 R-模，则当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$\mathrm{ext}_R^n(A,B)=0, \quad \forall \text{左 } R\text{-模 } B.$$

19.3 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ 与 $\mathrm{ext}_R^n(A,B)$ 之间的关系

现在我们来研究 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ 与 $\mathrm{ext}_R^n(A,B)$ 之间的关系。有下面定理。

定理19.5 对每一个 $n\in\mathbf{Z}$，有

$$\mathrm{Ext}_R^n(C,A)\cong \mathrm{ext}_R^n(C,A), \quad \forall \text{左 } R\text{-模} C \text{及} A.$$

证 因为当 $n<0$ 时，$\mathrm{Ext}_R^n(C,A)=0$，$\mathrm{ext}_R^n(C,A)=0$，而 $\mathrm{Ext}_R^0(C,A)\cong\mathrm{Hom}_R(C,A)$，$\mathrm{ext}_R^0(C,A)\cong\mathrm{Hom}_R(C,A)$，

故定理对于 $n\leqslant 0$ 成立。因此只要再证明定理对于$n\geqslant 1$ 成立。

我们先证明

$$\mathrm{Ext}_R^1(C,A)\cong \mathrm{ext}_R^1(C,A).$$

为此，任取 A 的一个内射分解

$$E:\qquad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\longrightarrow\cdots$$

及 C 的一个投射分解

$$P:\qquad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2'}P_1\xrightarrow{d_1'}P_0\xrightarrow{\varepsilon'}C\longrightarrow 0$$

命$L^1=\mathrm{im}d^0$，$K_0=\ker\varepsilon'$，则有两个短正合列：

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}L^1\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow K_0\overset{\gamma_0}{\hookrightarrow}P_0\xrightarrow{\varepsilon'}C\longrightarrow 0$$

明显看出下图是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(C,A) & \xrightarrow{\varepsilon_{*1}} & \mathrm{Hom}_R(C,E^0) & \xrightarrow{d^0_{*1}} & \mathrm{Hom}_R(C,L^1) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(C,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'^{*1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'^{*2}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'^{*3}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0,A) & \xrightarrow{\varepsilon_{*2}} & \mathrm{Hom}_R(P_0,E^0) & \xrightarrow{d^0_{*2}} & \mathrm{Hom}_R(P_0,L^1) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0^{*1}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0^{*2}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0^{*3}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(K_0,A) & \xrightarrow{\varepsilon_{*3}} & \mathrm{Hom}_R(K_0,E^0) & \xrightarrow{d^0_{*3}} & \mathrm{Hom}_R(K_0,L^1) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(K_0,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{ext}_R^1(C,A) & & 0 & & \mathrm{ext}_R^1(C,L^1) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

(乙)

不难看出，图（乙）中每一横行及每一竖列都是正合列。事实上，由于P_0是投射模，故第二行是正合列。由于E^0是内射模，故$\mathrm{Ext}_R^1(C, E^0)=0$，$\mathrm{Ext}_R^1(K_0, E^0)=0$，从而第一行及第三行都是正合列。由于$E^0$是内射模，故第二列是正合列。最后，由于$P_0$是投射模，故$\mathrm{ext}_R^1(P_0, A)=0$，$\mathrm{ext}_R^1(P_0, L^1)=0$，从而第一列及第三列都是正合列。

对于图（乙）中用虚线框起来的部分应用定理17.4，就得到正合列：

$$\ker\gamma_0^{*2}\xrightarrow{d^0{}_{*2}}\ker\gamma_0^{*3}\longrightarrow\mathrm{Coker}\gamma_0^{*1}\longrightarrow\mathrm{Coker}\gamma_0^{*2}$$

又从图（乙）看出，它就是正合列：

$$\mathrm{im}\varepsilon'^{*2}\xrightarrow{d^0{}_{*2}}\mathrm{im}\varepsilon'^{*3}\longrightarrow\mathrm{Coker}\gamma_0^{*1}\longrightarrow 0$$

再根据图（乙），就得到交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_R(C,E^0) & \xrightarrow{d^0{}_{*1}} & \mathrm{Hom}_R(C,\ L^1) & \longrightarrow\mathrm{Ext}_R^1(C,\ A)\longrightarrow 0 \\
\varepsilon'^{*2}\downarrow & & \varepsilon'^{*3}\downarrow & \\
\mathrm{im}\varepsilon'^{2*} & \xrightarrow{d^0{}_{*2}} & \mathrm{im}\varepsilon'^{*3} & \longrightarrow\mathrm{Coker}\gamma_0^{*1}\longrightarrow 0
\end{array}$$

因为此图中上、下两行都是正合列，故有左R-映射φ: $\mathrm{Ext}_R^1(C,A)\longrightarrow\mathrm{Coker}\gamma_0^{*1}$将上图补成交换图。于是由五引理知$\varphi$是同构映射。但由图(乙)知$\mathrm{Coker}\gamma_0^{*1}\cong\mathrm{ext}_R^1(C,A)$．这就证得了

$$\mathrm{Ext}_R^1(C,A)\cong\mathrm{ext}_R^1(C,A)\ .$$

现在命

$$L^{i+1}=\mathrm{im}d^i,\ i\geqslant 0;\ L^0=\mathrm{im}\varepsilon.$$

则得到短正合列

$$0 \longrightarrow L^i \xhookrightarrow{\gamma_i'} E^i \xrightarrow{d^i} L^{i+1} \longrightarrow 0$$

$$(i \geqslant 0)。 \quad (*)$$

且据推论18.5知有

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(C, A) \cong \mathrm{Ext}_R^1(C, L^n), \quad \forall n \geqslant 1$$

再命

$$K_i = \ker d_i', \quad i \geqslant 1; \quad K_0 = \ker \varepsilon'; \quad K_{-1} = C$$

则得到短正合列

$$0 \longrightarrow K_j \xhookrightarrow{\gamma_j} P_j \xrightarrow{d_j'} K_{j-1} \longrightarrow 0$$

$$(j \geqslant 1)。 \quad (**)$$

且据推论18.7知有

$$\mathrm{ext}_R^{n+1}(C, A) \cong \mathrm{ext}_R^1(K_{n-1}, A) \cong \mathrm{ext}_R^1(K_{n-1}, L^0) .$$

利用短正合列（*）及（**）可得下面交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_R(K_{j-1}, L^i) & \xrightarrow{\gamma'_{i*1}} & \mathrm{Hom}_R(K_{j-1}, E^i) & \xrightarrow{d^i_{*1}} & \mathrm{Hom}_R(K_{j-1}, L^{i+1}) & \rightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(K_{j-1}, L^i) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_j'^{*1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_j'^{*2}} & & \downarrow{\scriptstyle d_j'^{*3}} & & & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_j, L^i) & \xrightarrow{\gamma'_{i*2}} & \mathrm{Hom}_R(P_j, E^i) & \xrightarrow{d^i_{*2}} & \mathrm{Hom}_R(P_j, L^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_j^{*1}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_j^{*2}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_j^{*3}} & & & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_R(K_j, L^i) & \xrightarrow{\gamma'_{i*3}} & \mathrm{Hom}_R(K_j, E^i) & \xrightarrow{d^i_{*3}} & \mathrm{Hom}_R(K_j, L^{i+1}) & \rightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(K_j, L^i) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{ext}_R^1(K_{j-1}, L^i) & & 0 & & \mathrm{ext}_R^1(K_{j-1}, L^{i+1}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

(丙)

且其中每一横行及每一竖列都是正合列（理由与图（乙）情形类似）.

我们考察图（丙）中用虚线框起来的部分. 首先有

$$\mathrm{Ext}_R^1(K_j, L^i) \cong \mathrm{Hom}_R(K_j, L^{i+1})/\mathrm{im}d_3^i$$

$$\mathrm{ext}_R^1(K_{j-1}, L^{i+1}) \cong \mathrm{Hom}_R(K_j, L^{i+1})/\mathrm{im}\gamma_j^{*3}$$

由γ_j^{*2}及d_2^i是满射，易知$\mathrm{im}d_3^i = \mathrm{im}\gamma_j^{*3}$，故$\mathrm{ext}_R^1(K_{j-1}, L^{i+1}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_j, L^i)$. 但已证得 $\mathrm{ext}_R^1(K_{j-1}, L^{i+1}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{j-1}, L^{i+1})$. 因此得到

$$\mathrm{Ext}_R^1(K_{j-1}, L^{i+1}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_j, L^i).$$

于是据推论18.5有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_R^{n+1}(C, A) &\cong \mathrm{Ext}_R^1(C, L^n) = \mathrm{Ext}_R^1(K_{-1}, L^n)\\ &\cong \mathrm{Ext}_R^1(K_0, L^{n-1}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_1, L^{n-2})\\ &\cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1}, L^0).\end{aligned}$$

而　$\mathrm{ext}_R^{n+1}(C, A) \cong \mathrm{ext}_R^{n+1}(C, L^0) \cong \mathrm{ext}_R^1(K_{n-1}, L^0) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1}, L^0)$，故得到

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(C, A) \cong \mathrm{ext}_R^{n+1}(C, A).$$

由于这个定理，今后我们只用记号 Ext: $\mathrm{Ext}_R^n(A, B)$ 既作为 $\mathrm{Ext}_R^n(A, -)(B) = R^n\mathrm{Hom}_R(A, -)(B)$，也作为 $\mathrm{Ext}_R^n(-, B)(A) = R^n\mathrm{Hom}_R(-, B)(A)$.

由这个定理及定理19.4，定理19.4′，立刻得到下面推论.

推论19.1　当 $n \geqslant 1$ 时，若 A 是投射左 R- 模或 B 是内射左 R- 模，则

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, B) = 0.$$

作为本段的结束，我们证明推论19.1的较强意义的逆，即有下面两个定理.

定理19.6　若对任何左 R- 模 A 都有

$$\mathrm{Ext}_R^1(A, B) = 0,$$

则 B 是内射左 R- 模.

证　设

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} Y \longrightarrow 0 \qquad (\text{I})$$

是一个左 R- 短正合列.

因为由已给条件知 $\mathrm{Ext}_R^1(Y,B)=0$，故据定理 19.3′ 知有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Y,B) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(X,B) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(B,B) \longrightarrow 0$$

因此对于 $1_B \in \mathrm{Hom}_R(B,B)$，有 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(X,B)$ 使 $\alpha^*(\varphi)=1_B$，即 $\varphi\alpha=1_B$. 故（I）可裂. 所以由定理7.3知 B 是内射模.

定理19.6′ 若对任何左 R- 模 B 都有

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,B) = 0,$$

则 A 是投射左 R- 模.

证 设

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0 \qquad (\text{II})$$

是一个左 R- 短正合列.

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(A,X)=0$，故有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, X) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(A,Y) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(A,A) \longrightarrow 0.$$

因此对于 $1_A \in \mathrm{Hom}_R(A,A)$，有 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,Y)$ 使 $\beta_*(\varphi)=1_A$，即 $\beta\varphi=1_A$，故（II）可裂. 所以 A 是投射模.

19.4 Ext 作用于直和及直积

我们知道，对于函子 Hom，有

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \cong \prod_{k\in K} \mathrm{Hom}_R(A_k, B);$$

$$\mathrm{Hom}_R(A, \prod_{k\in K} B_k) \cong \prod_{k\in K} \mathrm{Hom}_R(A, B_k).$$

现在我们证明对于函子 Ext 也有同样结果，即有下面两个定理。

定理19.7 $\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \cong \prod_{k\in K} \mathrm{Ext}_R^n(A_k, B), \quad \forall n\in \mathbf{Z}.$

证 当 $n<0$ 时，左右两端都是 0．当 $n=0$ 时，$\mathrm{Ext}_R^0(X, Y)\cong \mathrm{Hom}_R(X,Y)$，故当 $n\leqslant 0$ 时结论成立。因此只要对 $n\geqslant 1$ 进行证明。

我们先证明

$$\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \cong \prod_{k\in K} \mathrm{Ext}_R^1(A_k, B).$$

首先对于每一个 $k\in K$，可作出一个左 R- 短正合列：

$$0 \longrightarrow L_k \xrightarrow{\alpha_k} P_k \xrightarrow{\beta_k} A_k \longrightarrow 0,$$

其中 P_k 是投射模。

于是有短正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} L_k \xrightarrow{\oplus\alpha_k} \bigoplus_{k\in K} P_k \xrightarrow{\oplus\beta_k} \bigoplus_{k\in K} A_k \longrightarrow 0,$$

其中

$$\oplus\alpha_k: \bigoplus_{k\in K} L_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} P_k$$

$$(\cdots, l_k, \cdots) \longmapsto (\cdots, \alpha_k(l_k), \cdots)$$

$\oplus\beta_k$ 的意义自明。

因为 $\bigoplus_{k\in K} P_k$ 是投射模，故 $\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} P_k, B)=0$．因此有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{k\in K} P_k, B) \xrightarrow{(\oplus\alpha_k)^*} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{k\in K} L_k, B) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \longrightarrow 0$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(P_k, B)=0$，故有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(P_k, B) \xrightarrow{\alpha_k^*} \mathrm{Hom}_R(L_k, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(A_k, B) \longrightarrow 0$$

从而有正合列

$$\prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(P_k, B) \xrightarrow{\Pi\alpha_k^*} \prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(L_k, B) \longrightarrow \prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^1(A_k, B) \longrightarrow 0.$$

这里

$$\prod \alpha_k^*: \prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(P_k, B) \longrightarrow \prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(L_k, B)$$

$$(\cdots, f_k, \cdots) \longmapsto (\cdots, \alpha_k^*(f_k), \cdots).$$

由定理5.5知有左 **Z**- 同构映射

$$\theta_X: \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{k\in K} X_k, B) \longrightarrow \prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(X_k, B)$$

$$\varphi \longmapsto (\cdots, \varphi\lambda_k, \cdots),$$

其中 λ_j 是 X_j 到 $\bigoplus_{k\in K} X_k$ 的入射。

通过简单的直接计算即可知下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{k\in K} P_k, B) & \xrightarrow{(\oplus\alpha_k)^*} & \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{k\in K} L_k, B) \\
\Big\downarrow \theta_P & & \Big\downarrow \theta_L \\
\prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(P_k, B) & \xrightarrow{\Pi\alpha_k^*} & \prod_{k\in K}\mathrm{Hom}_R(L_k, B)
\end{array}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow \prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^1(A_k, B) \longrightarrow 0$$

因为此图中上、下两行都是正合列，故存在左 Z-映射 φ: $\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \longrightarrow \prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^1(A_k, B)$ 使上图交换．由五引理知 φ 是同构映射．这就证得了

$$\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \simeq \prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^1(A_k, B).$$

现在假定对于 $n-1$，定理成立，这里 $n>1$．于是由于 $\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{k\in K} P_k, B)=0$，就有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus_{k\in K} P_k, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus_{k\in K} L_k, B)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \longrightarrow 0$$

因为 $n>1$，故 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus_{k\in K} P_k, B)=0$．因此有

$$\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \simeq \mathrm{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus_{k\in K} L_k, B).$$

于是由归纳假定知

$$\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \simeq \prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^{n-1}(L_k, B).$$

最后，由正合列

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(P_k,B)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{n-1}(L_k,B)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^n(A_k,B)\longrightarrow 0$$

及 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(P_k,B)=0$ 知 $\mathrm{Ext}_R^n(A_k,B)\cong\mathrm{Ext}_R^{n-1}(L_K,B)$，从而

$$\prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^n(A_k,B)\cong\prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^{n-1}(L_k,B).$$

这样就得到

$$\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{k\in k}A_k,B)\cong\prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^n(A_k,B).$$

定理19.7′ $\mathrm{Ext}_R^n(A,\prod_{k\in K}B_k)\cong\prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^n(A,B_k)$,

$$\forall n\in\mathbf{Z}.$$

其证明与定理19.7的证明完全类似．请读者自己证明．

最后，我们以定理的形式给出一个计算 Ext的例子．

定理19.8 设 B 是加法 Abel 群，m 是正整数，则

$$\mathrm{Ext}_z^1(\mathbf{Z}/(m\mathbf{Z}),B)\cong B/(mB).$$

证　首先取短正合列

$$0\longrightarrow\mathbf{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbf{Z}\xrightarrow{\beta}\mathbf{Z}/(m\mathbf{Z})\longrightarrow 0$$

其中 $\alpha(a)=ma$，$\forall a\in\mathbf{Z}$；β 是自然同态映射．

因为 $\mathrm{Ext}_z^1(\mathbf{Z},B)=0$，故有正合列

$$\mathrm{Hom}_z(\mathbf{Z},B)\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}_z(\mathbf{Z},B)\longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}_z^1(\mathbf{Z}/(m\mathbf{Z}),B)\longrightarrow 0$$

从而有

$$\mathrm{Ext}_z^1(\mathbf{Z}/(m\mathbf{Z}),B)\cong\mathrm{Hom}_z(\mathbf{Z},B)/\mathrm{im}\alpha^*.$$

命 ψ: $\mathrm{Hom}_z(\mathbf{Z},B)\longrightarrow B$ 是 $f\longmapsto f(1)$，则 ψ 是左 $\mathbf{Z}$-同构映射．于是由 $\rho\psi$: $\mathrm{Hom}_z(\mathbf{Z},B)\twoheadrightarrow B/(mB)$，其中$\rho$: $B\longrightarrow B/(mB)$是自然同态映射，知

$$B/(mB)\cong\mathrm{Hom}_z(\mathbf{Z},B)/\ker\rho\psi.$$

不难证明 $\mathrm{im}\alpha^* = \ker\rho\psi$. 事实上，当 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, B)$ 时，$\rho\psi\alpha^*(f) = \rho(f\alpha(1)) = f(m) + mB = mf(1) + mB = 0$，故 $\mathrm{im}\alpha^* \subseteq \ker\rho\psi$. 反之，若 $f \in \ker\rho\psi$，则 $\rho\psi(f) = 0$，从而 $\rho(f(1)) = 0$. 故$f(1) + mB = 0$. 因此$f(1) \in mB$. 所以有 $b \in B$ 使 $f(1) = mb$. 命 $g: \mathbf{Z} \longrightarrow B$ 是 $k \longmapsto kb$，则$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, B)$ 且 $\alpha^*(g) = f$. 于是 $\ker\rho\psi \subseteq \mathrm{im}\alpha^*$.

因此 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/(m\mathbf{Z}), B) \cong B/(mB)$.

§20　Ext¹ 及模的扩张

Ext^1 和模的扩张有着密切的联系。我们将在本节中确立它们之间的关系。

20.1　模的扩张的概念

这里要讨论的模的扩张本质上是指：当已给模 A 及模 C 时，要找模 $E' \supseteq A$ 使$E'/A \cong C$. 更一般地，我们引入下面定义。

定义20.1　设已给左 R-模 A 及 C，则左 R-短正合列

$$\xi:\quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

叫做模 A 借助模 C 的一个扩张。

若短正合列ξ是可裂的，则称此扩张ξ是可裂的。

当已给左 R-模 A 及 C 时，

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} A \oplus C \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

就是 A 借助 C 的一个扩张，且是可裂扩张，其中 λ 是 A 到 $A \oplus C$ 的入射，p 是 $A \oplus C$ 到 C 的投射。因此 A 借助 C 的扩张及可裂扩张恒存在。

定义20.2　设已给左 R-模 A 借助模 C 的两个扩张：

$$\xi:\quad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}C\longrightarrow 0$$

$$\xi':\quad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha'}E'\xrightarrow{\beta'}C\longrightarrow 0$$

若存在左 R- 映射 φ：$E\longrightarrow E'$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则称ξ与ξ'等价。

由五引理知当 φ 存在时必是同构映射。从而又知两个扩张的等价是一种等价关系。

当左 R- 模 A 及 C 已给定时，A 借助 C 的一个扩张 ξ 所在的等价类用〔ξ〕表示。所有等价类作成的集用 $e(C,A)$ 表示。本节的目标是要说明 $e(C,A)$ 本质上就是 $\mathrm{Ext}_R^1(C,A)$。

首先有下面定理。

定理20.1 左 R- 模 A 借助模 C 的任意两个可裂扩张必等价。

证 设已给 A 借助 C 的两个可裂扩张：

$$\xi:\quad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}C\longrightarrow 0$$

$$\xi':\quad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha'}E'\xrightarrow{\beta'}C\longrightarrow 0$$

于是有左 R- 映射 δ'：$E\longrightarrow A$ 使 $\delta'\alpha=1_A$ 及左 R- 映射 δ：$C\longrightarrow E'$ 使 $\beta'\delta=1_C$。

命 $\varphi=\delta\beta+\alpha'\delta'$，即得交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\beta'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

故 ξ 与 ξ' 等价。

又有下面定理。

定理20.2 若左 R- 模 A 借助模 C 的两个扩张等价，则当其中一个是可裂扩张时，另一个也必是可裂扩张。

证 设 ξ 及 ξ' 是 A 借助 C 的两个扩张，并设 ξ 与 ξ' 等价，且 ξ 是可裂扩张。于是有交换图：

$$\begin{array}{cccccccccc} \xi: & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1 & & \\ \xi': & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\beta'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

且有左 R- 映射 $g: C \longrightarrow E$ 使 $\beta g = 1_C$。从而有

$$\beta'(\varphi g) = (\beta'\varphi)g = \beta g = 1_C$$

故 ξ' 是可裂扩张。

由定理 20.1 及定理 20.2 知 A 借助 C 的所有可裂扩张恰好组成一个等价类。

20.2 由扩张 ξ 引起的扩张 $\alpha\xi$ 及 $\xi\gamma$

为了得到 Ext^1 和模的扩张之间的关系，也即得到 $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ 和 $e(C, A)$ 之间的关系，我们引入由扩张ξ 引起的扩张 $\alpha\xi$及$\xi\gamma$. 为此，先证明下面引理。

引理20.1 设已给左 R- 模 A 及 C，并设已给左 R- 映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi: & 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & & & & \\ & & & A & & & & & \end{array}$$

其中横行 ξ 是 X_1 借助 C 的一个扩张，则有

(i) 存在A借助C的一个扩张 $0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\eta}C\longrightarrow 0$ 及左 R- 映射 β：$X_0\longrightarrow B$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi: & 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & \\ & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow 0 \end{array}$$

(ii) 若 A 借助 C 的两个扩张 $0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\eta}C\longrightarrow 0$ 及 $0\longrightarrow A\xrightarrow{i'}B\xrightarrow{\eta'}C\longrightarrow 0$ 使下面两个图都是交换图：

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta'} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\eta'} & C & \longrightarrow 0 \end{array}$$

则 A 借助 C 的这两个扩张等价。

证 (i) 由引理7.1知，命 $B=(A\oplus X_0)/W$。其中

$W=\{(\alpha(x_1),\ j(-x_1))\mid x_1\in X_1\}$，并命

$$i:\ A\longrightarrow B \qquad\qquad \eta:\ B\longrightarrow C$$
$$a\longmapsto (a,0)+W, \qquad\qquad (a,x_0)+W\longmapsto \varepsilon(x_0),$$
$$\beta:\ X_0\longrightarrow B$$
$$x_0\longmapsto (0,x_0)+W$$

则有左 R- 映射交换图：

$$\begin{array}{lccccccccc}
\xi: & 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0\\
 & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
 & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

且下面一行是短正合列，即下面一行是 A 借助 C 的一个扩张。

(ii) 先取 B，i，η 及 β 如 (i)，然后命

$$\theta:\ B\longrightarrow B'$$
$$(a,x_0)+W\longmapsto i'(a)+\beta'(x_0)$$

则 θ 是左 R- 映射，且因当 $a\in A$时，$\theta i(a)=i'(a)$，当$x_0\in X_0$时，$\theta\beta(x_0)=\beta'(x_0)$，故有

$$\theta i=i',\qquad \theta\beta=\beta'.$$

现在不难证明下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\eta'} & C & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

事实上已有 $\theta i=i'$。又，$\eta'\theta((a,\ x_0)+W)=\eta'(i'(a)+\beta'(x_0))=\eta'\beta'(x_0)$，$\eta((a,x_0)+W)=\varepsilon(x_0)$。而 $\eta'\beta'=\varepsilon$，故 $\eta'\theta'=\eta$。这就证明了 A 借助 C 的这两个扩张是等价的。

符合本引理中条件 (i) 的 A 借助 C 的扩张用 $\alpha\xi$ 来记。当

然，$\alpha\xi$并非由 ξ 及 α 唯一确定，但由（ii）知〔$\alpha\xi$〕是由ξ 及α 唯一确定的.

对偶地有下面引理.

引理20.2 设已给左 R- 模 A 及 C，并设已给左 R- 映射图：

$$\begin{array}{rccccccccc} & & & & & & C & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ \xi: & 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & Y_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Y_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中下面一行 ξ 是 A 借助 Y_1 的一个扩张. 则有

(i) 存在 A 借助 C 的一个扩张 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\eta} C \longrightarrow 0$ 及左 R- 映射 β: $B \longrightarrow Y_0$ 使下图交换：

$$\begin{array}{rccccccccc} & 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ \xi: & 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & Y_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Y_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ii) 若 A 借助 C 的两个扩张 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\eta} C \longrightarrow 0$ 及 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{\eta'} C \longrightarrow 0$ 使下面两个图都是交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & Y_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Y_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\eta'} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & Y_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Y_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则 A 借助 C 的这两个扩张等价。

请读者自己证明。

符合本引理中条件(i)的A借助C的扩张用 $\xi\gamma$ 来记。当然，$\xi\gamma$ 并非由 ξ 及 γ 唯一确定。但由(ii)知〔$\xi\gamma$〕是由 ξ 及γ 唯一确定的。

20.3 $e(C,A)$ 到 $\mathrm{Ext}_R^1(C,A)$ 的一个特殊的双射ψ

设已给左 R-模 A 及 C，并用

$$\mathrm{Ext}_R^1(C,A)=\mathrm{Ext}_R^1(-,A)(C).$$

为了计算 $\mathrm{Ext}_R^1(C,A)$，先取定 C 的一个投射分解：

$$P_: \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

于是得到复形

$$\mathrm{Hom}_R(-,A)P_C: \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0,A) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_R(P_1, A) \xrightarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_R(P_2,A) \longrightarrow \cdots.$$

因此

$$\mathrm{Ext}_R^1(C,A)=\ker d_2^* / \mathrm{im}\, d_1^* .$$

定理20.3 对于〔ξ〕$\in e(C,A)$，设 ξ 是

$$\xi: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} C \longrightarrow 0 .$$

根据定理18.1，有 1_C 上的链映射 $\alpha: P_C \longrightarrow Q_C$ 使下图中每一个正方形都是交换图：

$$\begin{array}{cccccccccccc} P: & \cdots \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d^3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_C} & \\ Q: & \cdots \longrightarrow & O & \longrightarrow & O & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\tau} & C & \longrightarrow 0 \end{array} \qquad (\mathrm{I})$$

命

$$\psi: e(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$$
$$[\xi] \longmapsto \alpha_1 + \mathrm{im}d_1^*$$

则 ψ 是双射。

证 我们先证明 ψ 是映射。

因为 $d_2^*(\alpha_1) = \alpha_1 d_2 = 0\,\alpha_2 = 0$，故 $\alpha_1 \in \ker d_2^*$ 因此 $\alpha_1 + \mathrm{mid}_1^* \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$。

若换用 1_C 上的链映射 $\beta: P_C \longrightarrow Q_C$，则 α 与 β 同伦，从而有 $\{s_n | n \in \mathbf{Z}\}$ 使 $\alpha_1 - \beta_1 = 0\,s_1 + s_0 d_1$。于是 $\alpha_1 - \beta_1 = s_0 d_1 = d_1^*(s_0) \in \mathrm{im}d_1^*$。从而 $\alpha_1 + \mathrm{im}d_1^* = \beta_1 + \mathrm{im}d_1^*$.

最后，若 $\xi': 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\sigma'} B' \xrightarrow{\tau'} C \longrightarrow 0$ 与 ξ 等价，则有左 R- 映射 φ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\tau} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (\mathrm{II})$$

将交换图（I）和（II）接起来就得到交换图：

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma'} & B' & \xrightarrow{\tau'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因此仍得 $\alpha_1+\mathrm{imd}_1^*$．这就证明了 ψ 是映射。

为证 ψ 是双射，我们来作映射 θ: $\mathrm{Ext}_R^1(C,A)\longrightarrow e(C,A)$ 使 $\theta\psi=1$，$\psi\theta=1$．

首先由 $\mathrm{imd}_2=\mathrm{kerd}_1$ 知可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 \\ & {\scriptstyle\rho'}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle j} & \\ & P_1/\mathrm{im}d_2 & \end{array}$$

其中 ρ' 是自然同态映射，补出的 j 是左 R-映射．可知 j 是单射，且 $\mathrm{im}j=\mathrm{im}d_1=\ker\varepsilon$．因此先得到一个短正合列

$$\Xi:\quad 0\longrightarrow P_1/\mathrm{im}d_2\xrightarrow{j}P_0\xrightarrow{\varepsilon}C\longrightarrow 0,$$

它完全由 C 的事先取定的投射分解确定，而与 $e(C,A)$无关。

当 $\alpha+\mathrm{imd}_1^*\in\mathrm{Ext}_R^1(C,A)$，其中 $\alpha\in\mathrm{ker}d_2^*$ 时，由 $\alpha\in\mathrm{ker}d_2^*$ 知 $d_2^*(\alpha)=0$，即 $\alpha d_2=0$，故 $\mathrm{imd}_2\subseteq\ker\alpha$．因此可以唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & {\scriptstyle\rho'}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\bar\alpha} & \\ & P_1/\mathrm{im}d_2 & \end{array}$$

其中 ρ' 是自然同态映射，补出的 $\bar{\alpha}$ 是左 R-映射。

于是根据引理20.1，有 A 借助 C 的一个扩张 $\bar{\alpha}\Xi$ 及左 R-映射 β 使下图交换：

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\boxminus: & 0 & \longrightarrow & P_1/\mathrm{im}d_2 & \xrightarrow{j} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\alpha}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
\bar{\alpha}\boxminus: & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

现在命

$$\theta:\quad \mathrm{Ext}_R^1(C, A) \longrightarrow e(C, A)$$

$$\alpha + \mathrm{im}d_1^* \longmapsto [\bar{\alpha}\boxminus],$$

因为$\bar{\alpha}$由α唯一确定，故首先知道$[\bar{\alpha}\boxminus]$由α唯一确定。

若$\alpha' + \mathrm{im}d_1^* = \alpha + \mathrm{im}d_1^*$，则$\alpha' - \alpha \in \mathrm{im}d_1^*$．故有$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P_0, A)$ 使 $\alpha' - \alpha = d_1^*(\varphi)$。

对于α'，相应地有$\overline{\alpha'}$．不难证明，刚才得到的 A 借助 C 的扩张 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\eta} C \longrightarrow 0$ 也使下图交换：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_1/\mathrm{im}d_2 & \xrightarrow{j} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\alpha}'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta + i\varphi} & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

事实上，$\eta(\beta + i\varphi) = \eta\beta + \eta i\varphi = \eta\beta = \varepsilon$．又，当$p_1 + \mathrm{im}d_2 \in P_1/\mathrm{im}d_2$时，$(\beta + i\varphi)j(p_1 + \mathrm{im}d_2) = \beta j(p_1 + \mathrm{im}d_2) + i\varphi d_1(p_1)$，$i\bar{\alpha}'(p_1 + \mathrm{im}d_2) = i\alpha'(p_1) = i(\alpha + \varphi d_1)(p_1) = i\alpha(p_1) + i\varphi d_1(p_1)$ $= i\bar{\alpha}(p_1 + \mathrm{im}d_2) + i\varphi d_1(p_1) = \beta j(p_1 + \mathrm{im}d_2) + i\varphi d_1(p_1)$． 故 $(\beta + i\varphi)j = i\bar{\alpha}'$．

因此 $[\bar{\alpha}\boxminus] = [\bar{\alpha}'\boxminus]$．故 θ 是映射。

现在我们证明 $\psi\theta = 1$．

为此，设 $\alpha + \mathrm{im}d_1^* \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$，其中 $\alpha \in \ker d_2^*$．则

$\theta(\alpha+\mathrm{im}d_1^*)=[\bar{\alpha}\,\bar{\sqsubset\!\sqsupset}]$如上。

不难看出下图交换：

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

事实上，当 $p_1\in P_1$ 时，由于 $i\bar{\alpha}=\beta j$，故有$i\bar{\alpha}(p_1+\mathrm{im}d_2)=\beta j(p_1+\mathrm{im}d_2)$.从而 $i\alpha(p_1)=\beta d_1(p_1)$.因此 $i\alpha=\beta d_1$。

于是得到交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots\longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow 1 & & \\ \cdots\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

而这说明 $\psi[\bar{\alpha}\,\bar{\sqsubset\!\sqsupset}]=\alpha+\mathrm{im}d_1^*$.因此$\psi\theta=1$.

最后，我们证明 $\theta\psi=1$.

为此，设 $[\xi]\in e(C,A)$，并设 ξ: $0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\eta}C\longrightarrow 0$，$\psi[\xi]=\alpha+\mathrm{im}d_1^*$. 于是有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots\longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow 1 & & \\ \cdots\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

容易知道有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1/\operatorname{im}d_2 & \xrightarrow{j} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这说明 $\theta(\alpha+\operatorname{im}d_1^*)=[\xi]$. 因此 $\theta\psi=1$.

到此我们证明了 $\psi: e(C,A)\longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(C,A)$ 是双射。

因为 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)$ 是加法 Abel 群，所以我们可以利用双射 ψ 在 $e(C,A)$ 中定义加法运算使 $e(C,A)$ 成为加法 Abel 群，且 ψ 成为 $e(C,A)$ 到 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)$ 的群同构映射。这样，我们就确立了 Ext^1 和模的扩张之间的关系：$e(C,A)$ 本质上就是加法 Abel 群 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)$。

最后，作为本节的结束，我们证明下面定理。

定理20.4 左 R- 模 A 借助模 C 的每一个扩张都是可裂扩张，当且仅当 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)=0$.

证 设 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)=0$，若 ξ：$0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\eta}C\longrightarrow 0$ 是 A 借助 C 的一个扩张，则有正合列

$$0\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,A)\xrightarrow{\eta^*}\operatorname{Hom}_R(B,A)\xrightarrow{i^*}\operatorname{Hom}_R(A,A)\longrightarrow 0.$$

于是对于 $1_A\in\operatorname{Hom}_R(A,A)$，有 $\varphi\in\operatorname{Hom}_R(B,A)$ 使 $i^*(\varphi)=1_A$，即 $\varphi i=1_A$. 故 ξ 可裂。

反之，若 A 借助 C 的每一个扩张都是可裂扩张，则 $e(C,A)$ 只含一个元，从而 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)$ 只含一个元，故 $\operatorname{Ext}_R^1(C,A)=0$.

§21　函子序列 $\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$, $n\geqslant 0$ 的公理化刻划及反交换图定理

我们已经对函子 $\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$ 作了一些讨论。本节我们将概括出函子序列 $\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$ 的最本质的特性，给出它的公理化刻划。

21.1　连通的函子序列及强连通的函子序列

定义21.1　设已给一个 R-mod 到 $\mathbf{Z}$-mod 的共变函子序列 $\{T_n: R\text{-mod}\longrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod}\mid n\in\mathbf{Z}\}$：

$$\cdots, T_{n+1},\ T_n,\ T_{n-1},\cdots \tag{甲}$$

若满足：

(i) 若 $0\longrightarrow A'\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}A''\longrightarrow 0$ 是左 R-短正合列，则对每一个$n\in\mathbf{Z}$。恒存在一个左$\mathbf{Z}$-映射

$$\Delta_n:\ T_n(A'')\longrightarrow T_{n-1}(A')$$

使得有左$\mathbf{Z}$-复形

$$\cdots\longrightarrow T_n(A')\xrightarrow{T_n(\alpha)}T_n(A)\xrightarrow{T_n(\beta)}T_n(A'')\xrightarrow{\Delta_n}$$
$$T_{n-1}(A')\longrightarrow T_{n-1}(A)\longrightarrow T_{n-1}(A'')\longrightarrow\cdots \tag{乙}$$

（Δ_n叫做连接同态映射）；

(ii) 每一个 Δ_n都是自然的，即：若已给左 R-映射交换图，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & A'' & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\tau} & B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中上、下两行都是短正合列，则对每一个 $n\in\mathbf{Z}$，恒有交换图，

$$\begin{array}{ccc} T_n(A'') & \xrightarrow{\Delta_n^A} & T_{n-1}(A') \\ \downarrow{\scriptstyle T_n(f'')} & & \downarrow{\scriptstyle T_{n-1}(f')} \\ T_n(B'') & \xrightarrow{\Delta_n^B} & T_{n-1}(B') \end{array}$$

则称函子序列（甲）是连通的。

定义21.2 若共变函子序列（甲）是连通的，且复形（乙）是正合列，则称函子序列（甲）是强连通的。

定义21.3 若共变函子序列（甲）满足

$$T_n=0,\quad \forall\, n>0,$$

这里 $T_n=0$ 是指 $T_n(A)=0$，$\forall$ 左R-模A，则称（甲）是一个负序列，并记$T^n=T_{-n}$。若（甲）又是连通的，则记 $\Delta^n=\Delta_{-n}$。

由定义可知，共变函子序列$\{\mathrm{Ext}_R^n(C,-): R\text{-mod}\to\mathbf{Z}\text{-mod}\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个负序列，且是强连通的。

21.2 函子序列 $\{\mathrm{Ext}_R^n(C,-)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 的公理化刻划

我们知道，$\{\mathrm{Ext}_R^n(C,-)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是负序列，强连通的，$\mathrm{Ext}_R^0(C,-)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(C,-)$ 自然等价，且$\mathrm{Ext}_R^n(C,E)=0$，$\forall$ 内射左R-模E，$\forall\, n\geqslant 1$。

现在我们给出 $\{\mathrm{Ext}_R^n(C,-)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 的公理化刻划，即有下面定理。

定理21.1 若共变函子负序列$\{T^n: R\text{-mod}\longrightarrow\mathbf{Z}\text{-mod}\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 满足：

(i) $\{T^n: R\text{-mod}\longrightarrow\mathbf{Z}\text{-mod}\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是强连通的；

(ii) 存在一个左R-模C使T^0与$\mathrm{Hom}_R(C,-)$ 自然等价；

(iii) $T^n(E)=0$，$\forall$ 内射左R-模E，$\forall\, n\geqslant 1$

则T^n 与 $\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$自然等价，$\forall\, n\in\mathbf{Z}$。

证 可知只要对 $n\geqslant 1$ 进行证明。

我们先证明

$$T^1\cong\mathrm{Ext}_R^1(C,-).$$

首先对于每一个左R-模A可以取定一个左R-短正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} D \longrightarrow 0,$$

其中E是内射左R-模。

因为$\{T^n | n \in \mathbf{Z}\}$是强连通的，且因$E$是内射模，从而$T^1(E) = 0$，故有正合列

$$T^0(E) \xrightarrow{T^0(\beta)} T^0(D) \xrightarrow{\Delta_A^0} T^1(A) \longrightarrow 0$$

因为E是内射模，从而 $\mathrm{Ext}_R^1(C, E) = 0$，故有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(C, E) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(C, D) \xrightarrow{\partial_A^0} \mathrm{Ext}_R^1(C, A) \longrightarrow 0$$

设自然变换τ给出 $T^0 \cong \mathrm{Hom}_R(C, -)$，则有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
T^0(E) & \xrightarrow{T^0(\beta)} & T^0(D) & \xrightarrow{\Delta_A^0} & T^1(A) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_E} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_D} & & & & \\
\mathrm{Hom}_R(C, E) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Hom}_R(C, D) & \xrightarrow{\partial_A^0} & \mathrm{Ext}_R^1(C, A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

于是有左$\mathbf{Z}$-映射φ_A: $T^1(A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
T^0(E) & \xrightarrow{T^0(\beta)} & T^0(D) & \xrightarrow{\Delta_A^0} & T^1(A) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_E} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_D} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_A} & & \\
\mathrm{Hom}_R(C, E) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathrm{Hom}_R(C, D) & \xrightarrow{\partial_A^0} & \mathrm{Ext}_R^1(C, A) & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (\mathrm{I})$$

故φ_A是同构映射。

我们再证明φ是T^1到 $\mathrm{Ext}_R^1(C, -)$ 的自然变换。

为此，设$f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$，并设对于左$R$-模$B$，取定的左$R$-短正合列是

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha'} G \xrightarrow{\beta'} H \longrightarrow 0$$

其中G是内射左R-模。则有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
T^0(G) & \xrightarrow{T^0(\beta')} & T^0(H) & \xrightarrow{\Delta_B^0} & T^1(B) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_G} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_H} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_B} & & \\
\mathrm{Hom}_R(C, G) & \xrightarrow{\beta'_*} & \mathrm{Hom}_R(C, H) & \xrightarrow{\partial_C^B} & \mathrm{Ext}_R^1(C, B) & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (\mathrm{II})$$

其中φ_B是左Z-同构映射。

我们的目标是要证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
T^1(A) & \xrightarrow{T^1(f)} & T^1(B) \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_A} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_B} \\
\mathrm{Ext}_R^1(C,A) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^1(C,-)(f)} & \mathrm{Ext}_R^1(C,B)
\end{array} \qquad (\mathrm{III})$$

为此，先考虑图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & D & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\alpha'} & G & \xrightarrow{\beta'} & H & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由于G是内射模，故有左R-映射$\sigma: E\longrightarrow G$使上图中的左边正方形是交换图。从而又有左$R$-映射$\rho: D\longrightarrow H$使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & D & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\alpha'} & G & \xrightarrow{\beta'} & H & \longrightarrow & 0.
\end{array} \qquad (\mathrm{IV})$$

现在考察下面的立体图：

$$\begin{array}{l}
T^0(D) \xrightarrow{\Delta_A^0} T^1(A),\quad T^0(D) \xrightarrow{T^0(\rho)} T^0(H),\quad T^1(A) \xrightarrow{T^1(f)} T^1(B),\quad T^0(H) \xrightarrow{\Delta_B^0} T^1(B) \\
T^0(D) \overset{\tau_D}{\dashrightarrow} \mathrm{Hom}_R(C,D),\quad T^0(H) \xrightarrow{\tau_H} \mathrm{Hom}_R(C,H),\quad T^1(A) \xrightarrow{\varphi_A} \mathrm{Ext}_R^1(C,A),\quad T^1(B) \xrightarrow{\varphi_B} \mathrm{Ext}_R^1(C,B) \\
\mathrm{Hom}_R(C,D) \overset{\partial_A^0}{\dashrightarrow} \mathrm{Ext}_R^1(C,A),\quad \mathrm{Hom}_R(C,D) \overset{\rho_*}{\dashrightarrow} \mathrm{Hom}_R(C,H),\quad \mathrm{Ext}_R^1(C,A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^1(c,-)(f)} \mathrm{Ext}_R^1(C,B) \\
\mathrm{Hom}_R(C,H) \xrightarrow{\partial_B^0} \mathrm{Ext}_R^1(C,B)
\end{array}$$

因为 Δ^0 及 ∂^0 都是自然的，故上、下两个水平的正方形都是交换图。由图（Ⅰ）及图（Ⅱ）知前、后两个竖立的正方形都是交换图。又因为 τ 是自然变换，故左边竖立的正方形是交换图。

现在已不难看出右边竖立的正方形是交换图。事实上，当 $x\in T^1(A)$ 时，由于 Δ_A^0 是满射，故有 $y\in T^0(D)$ 使 $x=\Delta_A^0(y)$。于是有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_R^1(C,-)(f)\cdot\varphi_A(x)&=\mathrm{Ext}_R^1(C,-)(f)\cdot\varphi_A\Delta_A^0(y)\\&=\mathrm{Ext}_R^1(C,-)(f)\cdot\partial_A^0\tau_D(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_BT^1(f)(x)&=\varphi_BT^1(f)\Delta_A^0(y)=\varphi_B\Delta_B^0T^0(\rho)(y)\\&=\partial_B^0\tau_HT^0(\rho)(y)=\partial_B^0\rho_*\tau_D(y)\\&=\mathrm{Ext}_R^1(C,-)(f)\cdot\partial_A^0\tau_D(y).\end{aligned}$$

这样，我们证明了右边竖立的正方形是交换图，也即证明了图（Ⅲ）是交换图。因此 φ 是自然变换。而每一个 φ_A 都是同构映射，故 $T^1\cong\mathrm{Ext}_R^1(C,-)$。

现在假设自然变换 η 给出 $T^{n-1}\cong\mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,-),n\geqslant2$。

我们仍旧对于每一个左 R-模 A 取定一个左 R-短正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}D\longrightarrow0$，其中 E 是内射模。

因为 $\{T^n\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是强连通的，且因 $n\geqslant2$，从而 $T^{n-1}(E)=0$，$T^n(E)=0$，故有正合列

$$0\longrightarrow T^{n-1}(D)\xrightarrow{\Delta_A^{n-1}}T^n(A)\longrightarrow0.$$

因此 Δ_A^{n-1} 是同构映射。

因为 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,E)=0$，$\mathrm{Ext}_R^n(C,E)=0$，故有正合列：

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,D)\xrightarrow{\partial_A^{n-1}}\mathrm{Ext}_R^n(C,A)\longrightarrow0$$

因此 ∂_A^{n-1} 是同构映射。

现在命 $\psi_A=\partial_A^{n-1}\eta_D(\Delta_A^{n-1})^{-1}$，则

$$\psi_A:\ T^n(A)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^n(C,A)$$

是同构映射，且有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
T^{n-1}(D) & \xrightarrow{\Delta_A^{n-1}} & T^n(A) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \eta_D} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_A} \\
\mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,D) & \xrightarrow{\partial_A^{n-1}} & \mathrm{Ext}_R^n(C,A).
\end{array}$$

我们证明ψ是T^n到$\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$的自然变换.

为此，设$f\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$，并设对于左R-模B，取定的左R-短正合列是$0\longrightarrow B\xrightarrow{\alpha'}G\xrightarrow{\beta'}H\longrightarrow 0$，其中$G$是内射模。则有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
T^{n-1}(H) & \xrightarrow{\Delta_B^{n-1}} & T^n(B) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \eta_H} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_B} \\
\mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,H) & \xrightarrow{\partial_B^{n-1}} & \mathrm{Ext}_R^n(C,B)
\end{array}$$

当然仍有交换图（Ⅳ）.

现在考察下面的立体图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & T^{n-1}(D) & \xrightarrow{\quad\Delta_A^{n-1}\quad} & & & T^n(A) \\
 & \swarrow{\scriptstyle T^{n-1}(\rho)} & \Big\downarrow{\scriptstyle \eta_D} & & & \swarrow{\scriptstyle T^n(f)} & \\
T^{n-1}(H) & & \xrightarrow{\quad\Delta_B^{n-1}\quad} & & T^n(B) & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_A} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \eta_H} & & \mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,D) & \xrightarrow{\quad\partial_A^{n-1}\quad} & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_B} & & \mathrm{Ext}_R^n(C,A) \\
 & \swarrow & & & & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}_R^n(C,-)(f)} & \\
\mathrm{Ext}_R^{n-1}(C,H) & & \xrightarrow{\quad\partial_B^{n-1}\quad} & & \mathrm{Ext}_R^n(C,B) & &
\end{array}$$

和前面一样，先可知上、下、前、后及左边正方形都是交换图，从而又可知右边正方形是交换图。故ψ是自然变换。因此$T^n\cong\mathrm{Ext}_R^n(C,-)$.

21.3 迭代连接同态映射

设$\{T^n: R-\mathrm{mod}\longrightarrow \mathbf{Z}-\mathrm{mod}\mid n\in\mathbf{Z}\}$是一个共变函子负序

列，且是连通的。再设已给一个左R－正合列：

$$0 \longrightarrow A_p \xrightarrow{\alpha_p} A_{p-1} \xrightarrow{\alpha_{p-1}} \cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \longrightarrow 0 \qquad (乙)$$

命$K_i = \ker\alpha_i, i = 1, \cdots, p-1; K_0 = A_0$，则有短正合列：

$$0 \longrightarrow K_i \hookrightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_i} K_{i-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_p \xrightarrow{\alpha_p} A_{p-1} \xrightarrow{\alpha_{p-1}} K_{p-2} \longrightarrow 0$$

$$i = 1, \cdots, p-2,$$

于是对于每一个 $n \in \mathbf{Z}$，有连接同态映射

$$T^n(A_0) = T^n(K_0) \longrightarrow T^{n+1}(K_1)$$
$$T^{n+1}(K_1) \longrightarrow T^{n+2}(K_2)$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$T^{n+p-3}(K_{p-3}) \longrightarrow T^{n+p-2}(K_{p-2})$$
$$T^{n+p-2}(K_{p-2}) \longrightarrow T^{n+p-1}(A_p)$$

它们的积

$$T^n(A_0) \longrightarrow T^{n+p-1}(A_p)$$

叫做正合列（乙）确定的迭代连接同态映射。

现在我们证明关于迭代连接同态映射的一个定理。

定理21.2 设 $\{T^n | n \in \mathbf{Z}\}$ 是一个共变函子负序列，且是连通的。若已给左R－映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha_3} & X & \xrightarrow{\alpha_2} & Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\xi} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & \\
0 \longrightarrow & W' & \xrightarrow{\alpha_3'} & X' & \xrightarrow{\alpha_2'} & Y' & \xrightarrow{\alpha_1'} & Z' & \longrightarrow 0
\end{array}$$

其中上、下两行都是正合列，并设上面正合列及下面正合列确定的迭代连接同态映射分别是

D: $T^{n-1}(Z)\longrightarrow T^{n+1}(W)$,

D': $T^{n-1}(Z')\longrightarrow T^{n+1}(W')$.

则有交换图:

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(Z) & \xrightarrow{D} & T^{n+1}(W) \\ {\scriptstyle T^{n-1}(\beta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{n+1}(\alpha)} \\ T^{n-1}(Z') & \xrightarrow{D'} & T^{n+1}(W'). \end{array}$$

证 设$K_i=\ker\alpha_i$, $i=1,2$; $K_0=Z$,则有短正合列:

$$0\longrightarrow W\xrightarrow{\alpha_3}X\xrightarrow{\alpha_2}K_1\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow K_1\hookrightarrow Y\xrightarrow{\alpha_1}Z\longrightarrow 0$$

从而有连接同态映射:

$$T^{n-1}(Z)\xrightarrow{\Delta^{n-1}}T^n(K_1),\quad T^n(K_1)\xrightarrow{\Delta^n}T^{n+1}(W).$$

故 $D=\Delta^n\Delta^{n-1}$: $T^{n-1}(Z)\longrightarrow T^{n+1}(W)$.

同样,设 $K'_i=\ker\alpha'_i$, $i=1,2$; $K_0'=Z'$, 则有短正合列:

$$0\longrightarrow W'\xrightarrow{\alpha'_3}X'\xrightarrow{\alpha'_2}K'_1\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow K'_1\hookrightarrow Y'\xrightarrow{\alpha'_1}Z'\longrightarrow 0$$

从而有连接同态映射

$$T^{n-1}(Z')\xrightarrow{\Delta'^{n-1}}T^n(K'_1),$$

$$T^n(K_1')\xrightarrow{\Delta'^n}T^{n+1}(W').$$

故 $D' = \Delta'^{n}\Delta'^{n-1}: T^{n-1}(Z') \longrightarrow T^{n+1}(W')$.

因为明显知有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha_3} & X & \xrightarrow{\alpha_2} & K_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\xi} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \xrightarrow{\alpha'_3} & X' & \xrightarrow{\alpha'_2} & K_1' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1 & \hookrightarrow & Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1' & \hookrightarrow & Y' & \xrightarrow{\alpha'_1} & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

故由于连接同态映射是自然的，就有交换图:

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(Z) & \xrightarrow{\Delta^{n-1}} & T^{n}(K_1) \\ \downarrow{\scriptstyle T^{n-1}(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle T^{n}(\eta)} \\ T^{n-1}(Z') & \xrightarrow{\Delta'^{n-1}} & T^{n}(K_1'), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^{n}(K_1) & \xrightarrow{\Delta^{n}} & T^{n+1}(W) \\ \downarrow{\scriptstyle T^{n}(\eta)} & & \downarrow{\scriptstyle T^{n+1}(\alpha)} \\ T^{n}(K_1') & \xrightarrow{\Delta'^{n}} & T^{n+1}(W') \end{array}$$

将这两个图接起来，就得到交换图:

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(Z) & \xrightarrow{D} & T^{n+1}(W) \\ \downarrow{\scriptstyle T^{n-1}(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle T^{n+1}(\alpha)} \\ T^{n-1}(Z') & \xrightarrow{D'} & T^{n+1}(W') \end{array}$$

21.4 反交换图定理

若左R-映射图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \end{array}$$

满足

$$\beta\alpha = -\alpha'\beta',$$

则称此图是一个反交换图。

我们给出几个有用的反交换图定理。

定理21.3 设$\{T^n | n\in \mathbf{Z}\}$是一个共变函子负序列，且是连通的。若已给左$R$－映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\alpha'} & B & \xrightarrow{\beta'} & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & g'\downarrow & & g\downarrow & & \downarrow g'' & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\alpha''} & C & \xrightarrow{\beta''} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

其中每一行及每一列都是短正合列，则有反交换图：

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{\Delta_1^{n-1}} & T^n(C') \\ \Delta_3^{n-1}\downarrow & & \downarrow \Delta_4^n \\ T^n(A'') & \xrightarrow{\Delta_2^n} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

其中Δ是连接同态映射。

证 首先容易知道有两个正合列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{f''\beta} B'' \xrightarrow{g''} C'' \longrightarrow 0, \qquad (\text{I})$$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g\alpha'} C \xrightarrow{\beta''} C'' \longrightarrow 0, \qquad (\text{II})$$

再设正合列（I）、（II）确定的迭代连接同态映射分别是

$$D:\quad T^{n-1}(C'') \longrightarrow T^{n+1}(A'),$$

$$D':\quad T^{n-1}(C'') \longrightarrow T^{n+1}(A').$$

我们先证明

$$D = -D'.$$

为此，命

$$\sigma:\ A' \longrightarrow A \oplus B' \qquad\qquad \tau:\ A \oplus B' \longrightarrow B$$

$$a' \longmapsto (\alpha(a'), f'(a')), \qquad (a, b') \longmapsto f(a) - \alpha'(b')$$

则直接验证即知有左R－短正合列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\sigma} A \oplus B' \xrightarrow{\tau} B \xrightarrow{g''\beta'} C'' \longrightarrow 0 \qquad (\text{III})$$

再命

$$\xi:\ A \oplus B' \longrightarrow A \qquad \varepsilon:\ A' \longrightarrow A' \qquad \eta:\ A \oplus B' \longrightarrow B'$$

$$(a, b') \longmapsto a, \qquad a' \longmapsto -a', \qquad (a, b') \longrightarrow -b'$$

则直接验证即知有下面两个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\sigma} & A \oplus B' & \xrightarrow{\tau} & B & \xrightarrow{g''\beta'} & C'' & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & \\
0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{f''\beta} & B'' & \xrightarrow{g''} & C'' & \longrightarrow 0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\sigma} & A \oplus B' & \xrightarrow{\tau} & B & \xrightarrow{g''\beta'} & C'' & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & \\
0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g\alpha'} & C & \xrightarrow{\beta''} & C'' & \longrightarrow 0
\end{array}$$

于是当设正合列（III）确定的迭代连接同态映射是

$$D'':\ T^{n-1}(C'') \longrightarrow T^{n+1}(A')$$

时，据定理21.2知有两个交换图：

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{D''} & T^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle 1=T^{n-1}(1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{n+1}(1)=1} \\ T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{D} & T^{n+1}(A') \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{D''} & T^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle 1=T^{n-1}(1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{n+1}(\varepsilon)=-1} \\ T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{D'} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

因此 $D=D''$，$D'=-D''$. 从而有

$$D=-D'.$$

根据D的构成可知 $D=\delta^n\delta^{n-1}$:

$$T^{n-1}(C'')\xrightarrow{\delta^{n-1}}T^n(K_1)\xrightarrow{\delta^n}T^{n+1}(A'),$$

其中δ是连接同态映射，$K_1=\ker g''$.

明显知道存在左R-映射φ: $A''\longrightarrow K_1$使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{f''} & B'' & \xrightarrow{g''} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1 & \xhookrightarrow{i} & B'' & \xrightarrow{g''} & C'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

且易知φ 也使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{f''\beta} & K_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

于是根据连接同态映射是自然的，知有交换图：

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{\Delta_3^{n-1}} & T^n(A'') \\ \downarrow 1 & & \downarrow T^n(\varphi) \\ T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & T^n(K_1) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \xrightarrow{\Delta_2^n} & T^{n+1}(A') \\ \downarrow T^n(\varphi) & & \downarrow 1 \\ T^n(K_1) & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

因此有 $\Delta_2^n\Delta_3^{n-1}=\delta^n\delta^{n-1}=D$.

同样，可以证明 $\Delta_4^n\Delta_1^{n-1}=D'$.

这样，由于 $D=-D'$，就有 $\Delta_4^n\Delta_1^{n-1}=-\Delta_2^n\Delta_3^{n-1}$，故有反交换图：

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C'') & \xrightarrow{\Delta_1^{n-1}} & T^nC') \\ \downarrow \Delta_3^{n-1} & & \downarrow \Delta_4^n \\ T^n(A'') & \xrightarrow{\Delta_2^n} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

推论21.1 设 $\{T^n | n\in \mathbf{Z}\}$ 是一个共变函子负序列，且是连通的。若已给左 R - 链映射交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

其中每一行及每一列都是短正合列，则有左R-链映射反交换图：

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}C'' & \longrightarrow & T^nC' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^nA'' & \longrightarrow & T^{n+1}A' \end{array}$$

证 左R-链映射的正合列、短正合列、交换图及反交换图无非由左R-映射的相应概念综合而成。故由定理21.3即得此推论。

习 题 六

（1）设已给左R-短正合列

$$0\longrightarrow A'\overset{\alpha}{\hookrightarrow} A\overset{\beta}{\longrightarrow} A/A'\longrightarrow 0$$

并设已给左R-模B，则有长正合列：

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A/A',B)\xrightarrow{\beta^*}\mathrm{Hom}_R(A,B)\xrightarrow{\alpha^*}$$

$$\mathrm{Hom}_R(A',B)\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}_R^1(A/A',B)\to\cdots$$

证明：左R-映射$A'\xrightarrow{f}B$能被扩张成$A\to B$，当且仅当$\partial(f)=0$。

（2）设A，B是任意Abel群。证明：

$\mathrm{Ext}_Z^n(A,B)=0$，$\forall n\geqslant 2$.

（3）设A是Abel群，且有$m\in\mathbf{Z}$使$mA=A$。证明：若$0\to A\to E\to \mathbf{Z}/(m\mathbf{Z})\to 0$是一个$\mathbf{Z}$-短正合列，则此短正合列可裂。

（4）设A是挠Abel群，证明：

$\mathrm{Ext}_Z^1(A,\mathbf{Z})\cong\mathrm{Hom}_Z(A,\mathrm{R}/\mathbf{Z})$.

（5）设R是交换整环．对于R-模A，当$r\in R$时，命μ_r: $A\longrightarrow A$是$a\longmapsto ra$，则μ_r是R-映射．
证明：

（i）A是非挠模，当且仅当对于每一个$0\neq r\in R$，μ_r是单射；

（ii）A是可除模，当且仅当对于每一个$0\neq r\in R$，μ_r是满射．

（6）设R是交换整环，T是R-mod到R-mod的一个加法函子．设T保持乘法，即对μ_r: $A\longrightarrow A$，必定$T(\mu_r)$: $T(A)\longrightarrow T(A)$是$x\longmapsto rx$．证明：若R-模A既是非挠模，又是可除模，则$T(A)$也既是非挠模又是可除模．

（7）设R是交换整环．证明：$\mathrm{Ext}^n_R(A,-)$及$\mathrm{Ext}^n_R(-,B)$都保持乘法．

（8）设R是左遗传环．证明：当$n\geqslant 2$时，对于任何左R-模A及B，恒有$\mathrm{Ext}^n_R(A,B)=0$。

（9）设R是Dedekind环，A是非挠R-模．证明：对于任何R-模B，$\mathrm{Ext}^1_R(A,B)$恒是可除模．

（10）设R是Dedekind环，$t(B)$是R-模B的挠子模．证明：若存在$0\neq r\in R$使$rt(B)=0$，则$t(B)$是B的一个直和项．

（11）设A及C是Abel群，且有$mA=0=nC$，其中$(m,n)=1$，证明：A借助C的每一个扩张都可裂．

（12）设ξ: $0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{p}C\longrightarrow 0$是左$R$-模$A$借助左$R$-模$C$的一个扩张．证明：$[\xi]$在加法Abel群$e(C,A)$中的阶有限，当且仅当存在$m\in\mathbf{Z}$，$m\neq 0$及左$R$-映射$s$: $B\longrightarrow A$满足$si=m1_A$．

（13）设T是R-mod到$\mathbf{Z}$-mod的一个左正合的共变函子，$\{T^n$: R-mod$\longrightarrow\mathbf{Z}$-mod$\}$是一个共变函子负序列，满足：

（i）$\{T^n\}$是强连通的；

(ii) $T^0\cong T$;

(iii) 当$n\geqslant 1$时，对于每一个内射左R-模E，恒有$T^n(E)=0$.

证明: $T^n\cong R^nT$, $\forall n\geqslant 0$.

(14) 若逆变函子负序列$\{T^n: R\text{-mod}\longrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod}\}$满足:

(i) $\{T^n\}$是强连通的;

(ii) 存在左R-模C使$T^0\cong \mathrm{Hom}_R(-,C)$;

(iii) 对于每一个自由左R-模B，恒有$T^n(B)=0$, $\forall n\geqslant 1$.

证明: $T^n\cong \mathrm{Ext}_R^n(-,C)$, $\forall n\geqslant 0$.

第七章　函子 Tor

本章对函子Tor作专门的讨论。

§22　若干基本性质

根据在第五章中给出的定义，$\mathrm{Tor}_n^R(A,-)=L_nA\otimes_R$，$\mathrm{Tor}_n^R(-,B)=L_n\otimes_RB$，并曾同时用$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$记$\mathrm{Tor}_n^R(A,-)(B)$及$\mathrm{Tor}_n^R(-,B)(A)$。这里留下了一个问题：$\mathrm{Tor}_n^R(A,-)(B)$与$\mathrm{Tor}_n^R(-,B)(A)$是否相等？

在这个问题得到解决以前，我们先记

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,-)=L_nA\otimes_R,$$
$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=\mathrm{Tor}_n^R(A,-)(B);$$
$$\mathrm{tor}_n^R(-,B)=L_n\otimes_RB,$$
$$\mathrm{tor}_n^R(A,B)=\mathrm{tor}_n^R(-,B)(A).$$

22.1　关于$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$

首先，若T是R-mod到S-mod的一个加法共变函子，则易知当$n<0$时，恒有

$$L_nT(B)=0,\quad\forall\text{左}R\text{-模}B.$$

因此当取$T=A\otimes_R$时就得到下面定理。

定理22.1　当$n<0$时，

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0,\quad\forall\text{右}R\text{-模}A\text{及左}R\text{-模}B.$$

现在考虑$n=0$时的情形。我们有下面定理。

定理22.2　$\mathrm{Tor}_0^R(A,-)$与$A\otimes_R$自然等价。特别，有

$$\mathrm{Tor}_0^R(A,B)\cong A\otimes_R B,\quad \forall A,B.$$

证 设左R-模B的选定的投射分解是

$$P:\quad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}B\longrightarrow 0$$

于是有复形

$$A\otimes_R P_B:\quad \cdots\longrightarrow A\otimes_R P_2\xrightarrow{1\otimes d_2}A\otimes_R P_1\xrightarrow{1\otimes d_1}A\otimes_R P_0\longrightarrow 0$$

因此得到

$$\mathrm{Tor}_0^R(A,B)=\frac{A\otimes_R P_0}{\mathrm{im}\,(1\otimes d_1)}$$

因为$A\otimes_R$右正合，故有正合列

$$A\otimes_R P_1\xrightarrow{1\otimes d_1}A\otimes_R P_0\xrightarrow{1\otimes\varepsilon}A\otimes_R B\longrightarrow 0$$

于是$\mathrm{im}(1\otimes d_1)=\ker(1\otimes\varepsilon)$，从而可补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} A\otimes_R P_0 & \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} & A\otimes_R B\\ & \searrow \qquad \nearrow{\scriptstyle \tau_B} & \\ & A\otimes_R P_0/\mathrm{im}(1\otimes d_1) & \end{array}$$

故得到

$$\tau_B:\ \mathrm{Tor}_0^R(A,B)\longrightarrow A\otimes_R B$$
$$x+\mathrm{im}(1\otimes d_1)\longrightarrow(1\otimes\varepsilon)(x)$$

且可知τ_B是左$\mathbf{Z}$-同构映射。

现在我们再证明τ是$\mathrm{Tor}_0^R(A,-)$到$A\otimes_R$的自然变换，即有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_0^R(A,B) & \xrightarrow{\tau_B} & A\otimes_R B\\ {\scriptstyle \mathrm{Tor}_0^R(A,-)(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes f},\quad \forall B\xrightarrow{f}C\\ \mathrm{Tor}_0^R(A,C) & \xrightarrow{\tau_C} & A\otimes_R C, \end{array}\qquad (甲)$$

为此，设C的选定的投射分解是

$$Q: \quad \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{e_2} Q_1 \xrightarrow{e_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} C \longrightarrow 0$$

则据定理18.1知有f上的链映射$\bar{f}$：$P_B \longrightarrow Q_C$使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & B & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & \\
\cdots \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{e_2} & Q_1 & \xrightarrow{e_1} & Q_0 & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow 0
\end{array}$$

用$A\otimes_R$作用之，得到交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & A\otimes_R P_1 & \xrightarrow{1\otimes d_1} & A\otimes_R P_0 & \xrightarrow{1\otimes \varepsilon} & A\otimes_R B & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle 1\otimes \bar{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes \bar{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes f} & \\
\cdots \longrightarrow & A\otimes_R Q_1 & \xrightarrow{1\otimes e_1} & A\otimes_R Q_0 & \xrightarrow{1\otimes \eta} & A\otimes_R C & \longrightarrow 0
\end{array}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_0^R(A,-)(f)\colon \mathrm{Tor}_0^R(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(A, C)\ x+\mathrm{im}(1\otimes d_1) \\
&\longmapsto (1\otimes \bar{f}_0)(x)+\mathrm{im}(1\otimes e_1).
\end{aligned}$$

这样，当$x+\mathrm{im}(1\otimes d_1)\in \mathrm{Tor}_0^R(A, B)$时，有

$$\begin{aligned}
(\tau_C\cdot \mathrm{Tor}_0^R(A,-)(f))\ (x+\mathrm{im}(1\otimes d_1)) &= \tau_C((1\otimes \bar{f}_0)(x)+\mathrm{im}(1\otimes e_1)) \\
&= (1\otimes \eta)(1\otimes \bar{f}_0)(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((1\otimes f)\tau_B)(x+\mathrm{im}(1\otimes d_1)) &= (1\otimes f)(1\otimes \varepsilon)(x) \\
&= (1\otimes \eta)(1\otimes \bar{f}_0)(x).
\end{aligned}$$

因此图(甲)交换。从而τ是自然变换。故$\mathrm{Tor}_0^R(A,-)$与$A\otimes_R$自然等价。

注：在定理的证明中仅用到$A\otimes_R$是加法共变函子，且是右正合的。因此，一般地，若T是加法共变函子且是右正合的，同样可以证明L_0T与T自然等价。

由定理22.2及定理18.9，容易得到下面定理。

定理22.3 设已给左R-短正合列

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \longrightarrow 0,$$

则有左$\mathbf{Z}$-长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(A, B') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B'')$$
$$\longrightarrow A \otimes_R B' \xrightarrow{1\otimes\alpha} A \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes\beta} A \otimes_R B'' \longrightarrow 0.$$

证 首先由定理18.9知有长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B'')$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(A, B') \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(A, B'')$$
$$\longrightarrow 0$$

然后利用定理22.2，仿照定理19.3的证明即可证得。

这个定理很有意思。我们知道，由于$A\otimes_R$一般仅是右正合的，故仅有正合列

$$A \otimes_R B' \xrightarrow{1\otimes\alpha} A \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes\beta} A \otimes_R B'' \longrightarrow 0$$

而此定理则说明，若要向左延伸并保持正合，则可用$\mathrm{Tor}_n^R(A, X)$络续补出之。

又，当A是平坦右R-模时，由于$A\otimes_R$是正合的，就有正合列

$$0 \longrightarrow A \otimes_R B' \xrightarrow{1\otimes\alpha} A \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes\beta} A \otimes_R B'' \longrightarrow 0.$$

因此自然地猜想当A是平坦右R-模时，

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, X) = 0, \quad \forall \text{左}R\text{-模}X, \forall n \geq 1.$$

以后我们将证实之。

对于$n\geq 1$的情形，我们有下面定理。

定理22.4 若B是投射左R-模，则当$n\geq 1$时，有

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0, \quad \forall \text{右}R\text{-模}A.$$

证 首先由定理18.3知$\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$是否为0与B的投射分解的选取无关。今B是投射模，故可取B的一个投射分解是

$$P:\ \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}B\longrightarrow 0,$$

其中　$P_0=B$，$\varepsilon=1_B$；$P_i=0$，$d_i=0$，$i\geqslant 1$.

于是得到复形

$$A\otimes_R P_B:\ \cdots\longrightarrow A\otimes_R P_2\xrightarrow{1\otimes d_2}A\otimes_R P_1\xrightarrow{1\otimes d_1}A\otimes_R P_0\longrightarrow 0.$$

从而$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0$，$\forall n\geqslant 1$.

22.2　关于$\mathrm{tor}_n^R(A,B)$

对于$\mathrm{tor}_n^R(A,B)$，有与$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$相平行的定理，其证明也完全类似。因此我们在这里只写出定理而略去证明。

定理22.1′　当$n<0$时，

$$\mathrm{tor}_n^R(A,B)=0,\quad \forall A,B.$$

定理22.2′　$\mathrm{tor}_0^R(-,B)$ 与$\otimes_R B$自然等价。特别，有

$$\mathrm{tor}_0^R(A,B)\cong A\otimes_R B,\quad \forall A,B.$$

定理22.3′　设已给右R-短正合列：

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}A''\longrightarrow 0,$$

则有长正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{tor}_1^R(A',B)\longrightarrow\mathrm{tor}_1^R(A,B)\longrightarrow\mathrm{tor}_1^R(A'',B)$$
$$\longrightarrow A'\otimes_R B\xrightarrow{\alpha\otimes 1}A\otimes_R B\xrightarrow{\beta\otimes 1}A''\otimes_R B\longrightarrow 0$$

同样，自然地猜想，当B是平坦模时，

$$\mathrm{tor}_n^R(X,B)=0,\quad \forall X,\quad \forall n\geqslant 1.$$

定理22.4′　若A是投射模，则当$n\geqslant 1$时，有

$$\mathrm{tor}_n^R(A,B)=0,\quad \forall B.$$

22.3　$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ 与 $\mathrm{tor}_n^R(A,B)$ 之间的关系

和Ext的情形一样，有下面定理。

定理22.5　对每一个$n\in\mathbf{Z}$都有

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\cong \mathrm{tor}_n^R(A,B),\quad \forall\ A,B.$$

证 只要证明定理对于 $n\geqslant 1$ 成立。

我们先证明

$$\mathrm{Tor}_1^R(A,B)\cong \mathrm{tor}_1^R(A,B),\quad \forall\ A,B.$$

为此，任取A的一个投射分解

$$P:\quad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

及B的一个投射分解

$$Q:\quad \cdots\longrightarrow Q_2\xrightarrow{e_2}Q_1\xrightarrow{e_1}Q_0\xrightarrow{\eta}B\longrightarrow 0$$

命$K_0=\ker\varepsilon$，$H_0=\ker\eta$，则得到两个短正合列：

$$0\longrightarrow K_0\overset{\alpha}{\hookrightarrow}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow H_0\overset{\beta}{\hookrightarrow}Q_0\xrightarrow{\eta}B\longrightarrow 0$$

容易看出有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & \mathrm{tor}_1^R(A,H_0) & & 0 & & \mathrm{tor}_1^R(A,B) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(K_0,B) & \longrightarrow & K_0\otimes H_0 & \xrightarrow{1_{K_0}\otimes\beta} & K_0\otimes Q_0 & \xrightarrow{1_{K_0}\otimes\eta} & K_0\otimes B & \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1_{H_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1_{Q_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1_B} \\
 & & 0 & \longrightarrow & P_0\otimes H_0 & \xrightarrow{1_{P_0}\otimes\beta} & P_0\otimes Q_0 & \xrightarrow{1_{P_0}\otimes\eta} & P_0\otimes B & \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes 1_{H_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes 1_{Q_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes 1_B} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(A,B) & \longrightarrow & A\otimes H_0 & \xrightarrow{1_A\otimes\beta} & A\otimes Q_0 & \xrightarrow{1_A\otimes\eta} & A\otimes B & \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}\qquad (\mathrm{I})$$

不难看出图（I）中的每一行及每一列都是正合列。事实上，由于P_0是投射模，故中间一行是正合列。因为Q_0是投射模，故$\mathrm{Tor}_1^R(K_0,Q_0)=0$，$\mathrm{Tor}_1^R(A,Q_0)=0$，故最上面一行及最下面一行都是正合列。由于$Q_0$是投射模，故中间一列是正合列。最后，因为$P_0$是投射模，$\mathrm{tor}_1^R(P_0,H_0)=0$，$\mathrm{tor}_1^R(P_0,B)=0$。因此最左边的一列及最右边的一列都是正合列。

对于图（I）中用虚线框起来的部分应用定理17.4，得到正合列：

$$\ker(\alpha\otimes 1_{Q_0})\longrightarrow\ker(\alpha\otimes 1_B)\longrightarrow\mathrm{Coker}(\alpha\otimes 1_{H_0})\\ \longrightarrow\mathrm{Coker}(\alpha\otimes 1_{Q_0})$$

也即正合列：

$$0\longrightarrow\ker(\alpha\otimes 1_B)\longrightarrow\frac{P_0\otimes H_0}{\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{H_0})}\xrightarrow{\sigma}\frac{P_0\otimes Q_0}{\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{Q_0})},$$

其中　$\sigma(x+\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{H_0}))=(1_{P_0}\otimes\beta)(x)+\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{Q_0})$.

因为$\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{H_0})=\ker(\varepsilon\otimes 1_{H_0})$，$\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{Q_0})=\ker(\varepsilon\otimes 1_{Q_0})$，故可补成两个交换图：

$$\begin{array}{ccc} P_0\otimes H_0 & \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1_{H_0}} & A\otimes H_0 \\ & \searrow \quad \nearrow \rho & \\ & P_0\otimes H_0/\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{H_0}) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P_0\otimes Q_0 & \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1_{Q_0}} & A\otimes Q_0 \\ & \searrow \quad \nearrow \tau & \\ & P_0\otimes Q_0/\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{Q_0}) & \end{array}$$

直接验证即知有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \ker(\alpha\otimes 1_B) \longrightarrow & P_0\otimes H_0/\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{H_0}) & \xrightarrow{\sigma} & P_0\otimes Q_0/\mathrm{im}(\alpha\otimes 1_{Q_0}) \\ & \downarrow \rho & & \downarrow \tau \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A,B) \longrightarrow & A\otimes H_0 & \xrightarrow{1_A\otimes\beta} & A\otimes Q_0 \end{array}$$

于是存在φ: $\ker(\alpha\otimes 1_B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B)$ 使上图交换。由五引理知φ是同构映射，故 $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)\cong\ker(\alpha\otimes 1_B)$。但由图（I）知 $\ker(\alpha\otimes 1_B)\cong\mathrm{tor}_1^R(A, B)$。所以 $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)\cong\mathrm{tor}_1^R(A, B)$。

现在命$K_j=\ker d_j$, $j\geq 1$; $K_0=\ker\varepsilon$; $K_{-1}=A$，则有短正合列

$$0\longrightarrow K_j \xhookrightarrow{\alpha_j} P_j \xrightarrow{d_j} K_{j-1}\longrightarrow 0$$

$$j\geq 0, \quad (*)$$

且由推论18.3知

$$\mathrm{tor}_{n+1}^R(A, B)\cong\mathrm{tor}_1^R(K_{n-1}, B), \quad n\geq 1$$

再命 $H_i=\ker e_i$, $i\geq 1$; $H_0=\ker\eta$; $H_{-1}=B$，则有短正合列

$$0\longrightarrow H_i \xhookrightarrow{\beta_i} Q_i \xrightarrow{e_i} H_{i-1}\longrightarrow 0$$

$$i\geq 0 \quad (**)$$

且由推论18.2知

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B)\cong\mathrm{Tor}_1^R(A, H_{n-1}), \qquad n\geq 1.$$

利用短正合列（*）及（**），可知有交换图

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathrm{tor}_1^R(K_{j-1},H_i) & & 0 & & \mathrm{tor}_1^R(K_{j-1},H_{i-1}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Tor}_1^R(K_j,H_{i-1}) & \to & K_j\otimes H_i & \xrightarrow{1_{K_j}\otimes\beta_i} & K_j\otimes Q_i & \to & K_j\otimes H_{i-1} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_j\otimes 1_{H_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_j\otimes 1_{Q_i}} & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & P_j\otimes H_i & \xrightarrow{1_{P_j}\otimes\beta_i} & P_j\otimes Q_i & \to & P_j\otimes H_{i-1} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Tor}_1^R(K_{j-1},H_{i-1}) & \to & K_{j-1}\otimes H_i & \to & K_{j-1}\otimes Q_i & \to & K_{j-1}\otimes H_{i-1} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad (\text{II})
$$

且其中每一行及每一列都是正合列（理由与图（Ⅰ）情形类似）。

我们考察图（Ⅱ）中用虚线框起来的部分。首先有

$$\mathrm{Tor}_1^R(K_j, H_{i-1}) \cong \ker(1_{k_j}\otimes\beta_i),$$

$$\mathrm{tor}_1^R(K_{j-1}, H_i) \cong \ker(\alpha_j\otimes 1_{H_i}).$$

利用$\alpha_j\otimes 1_{Q_i}$及$1_{P_j}\otimes\beta_i$是单射，并利用虚线方框内的正方形交换图即知 $\ker(1_{k_j}\otimes\beta_i)=\ker(\alpha_j\otimes 1_{H_i})$.

因此有

$$\mathrm{Tor}_1^R(K_j, H_{i-1}) \cong \mathrm{tor}_1^R(K_{j-1}, H_i).$$

因为$\mathrm{tor}_1^R(K_{j-1}, H_i)\cong\mathrm{Tor}_1^R(K_{j-1}, H_i)$，故有

$$\mathrm{Tor}_1^R(K_{j-1}, H_i) \cong \mathrm{Tor}_1^R(K_j, H_{i-1})$$

这样，就有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_{n+1}^{R}(A,B)&\cong\mathrm{Tor}_1^R(A,H_{n-1})=\mathrm{Tor}_1^R(K_{-1},H_{n-1})\\&\cong\mathrm{Tor}_1^R(K_0,H_{n-2})\cong\cdots\\&\cong\mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},H_{-1})=\mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},B)\\&\cong\mathrm{tor}_1^R(K_{n-1},B)\cong\mathrm{tor}_{n+1}^R(A,B),\ n\geqslant 1.\end{aligned}$$

由于这个定理，今后我们只用记号 Tor: $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ 既作为 $\mathrm{Tor}_n^R(A,-)(B)=L_nA\otimes_R(B)$，也作为 $\mathrm{Tor}_n^R(-,B)(A)=L_n\otimes_R B(A)$.

现在我们指出，函子Tor具有“对称性”.

首先容易知道，当已给左R-模X时，对于$r\in R^{op}$及$x\in X$，定义 $xr=rx$，则X成为右 R^{op}-模。这里 R^{op}是环 R的逆环：集$R^{op}=$集R；当$a,b\in R^{op}$时，a,b在R^{op}中的和$a+b$就是 a，b在R中的和 $a+b$；a,b在R^{op} 中的积 ab 是 b,a 在R中的积 ba。同样，当已给右R-模X时，对于$r\in R^{op}$及$x\in X$，定义 $rx=xr$时，则X成为左R^{op}-模。又易知 $\mathrm{Hom}_R(X,Y)=\mathrm{Hom}_{R^{op}}(X,Y)$。从而又可知，$X$是投射左（右）$R$-模当且仅当$X$是投射右(左) R^{op}-模；$\cdots\to X_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}X_n\xrightarrow{f_n}X_{n-1}\to\cdots$是左（右）$R$-复形（正合列）当且仅当它是右（左）$R^{op}$-复形（正合列）。

定理22.6 设已给右R-模A及左R-模B，则有

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\cong\mathrm{Tor}_n^{R^{op}}(B,A),\ \forall n\in\mathbf{Z}.$$

证 任取右R-模A的一个投射分解

$$P:\quad\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0,$$

则 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\cong H_n(P_A\otimes_R B)$。这里 $P_A\otimes_R B$ 是 $(\otimes_R B)P_A$。

根据上面所说，P也是左 R^{op}-模A的一个投射分解，我们将它记作$\overline{P}$，则 $\mathrm{Tor}_n^{R^{op}}(B,A)\cong H_n(B\otimes_{R^{op}}\overline{P}_A)$.

利用张量积的泛性质易知有$\mathbf{Z}$-同构映射 $t_n: P_n\otimes_R B\longrightarrow B\otimes_{R^{op}}P_n$满足$x_n\otimes b\longmapsto b\otimes x_n$。于是立刻知道有交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} P_A\otimes_R B:\cdots \to & P_{n+1}\otimes B & \xrightarrow{d_{n+1}\otimes 1} & P_n\otimes B & \xrightarrow{d_n\otimes 1} & P_{n-1}\otimes B & \to\cdots \\ & \downarrow t_{n+1} & & \downarrow t_n & & \downarrow t_{n-1} & \\ B\otimes_{R^{op}}\bar{P}_A:\cdots\to & B\otimes P_{n+1} & \longrightarrow & B\otimes P_n & \longrightarrow & B\otimes P_{n-1} & \to\cdots \end{array}$$

由此可知 $H_n(P_A\otimes_R B)\cong H_n(B\otimes_{R^{op}}\bar{P}_A)$，故

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B)\cong \mathrm{Tor}_n^{R^{op}}(B, A).$$

注：函子Ext没有这种"对称性"。

定理22.7 当 $n\geqslant 1$ 时，若 A，B 中至少有一个是平坦模，则

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0 .$$

证 我们只对 A 是平坦模的情形证明。B 是平坦模的情形可以类似地证明。

任取 B 的一个投射分解

$$Q:\ \cdots\longrightarrow Q_2\xrightarrow{e_2}Q_1\xrightarrow{e_1}Q_0\xrightarrow{\eta}B\longrightarrow 0$$

因为 A 是平坦模，故 $A\otimes_R$ 正合，从而有正合列：

$$\cdots\longrightarrow A\otimes Q_2\xrightarrow{1\otimes e_2}A\otimes Q_1\xrightarrow{1\otimes e_1}A\otimes Q_0\xrightarrow{1\otimes\eta}A\otimes B\longrightarrow 0 .$$

因此得到

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0 ,\quad \forall n\geqslant 1 .$$

我们来证明这个定理的较强形式的逆，即下面的定理。

定理22.8

（i）若 $\mathrm{Tor}_1^R(A, B) = 0$，$\forall B$，则 A 是平坦模；

（ii）若 $\mathrm{Tor}_1^R(A, B) = 0$，$\forall A$，则 B 是平坦模。

证 我们只证明（i）。完全类似地可证（ii）。

为证 A 是平坦模，任取左 R-单射

$$B' \overset{i}{\rightarrowtail} B$$

这时总可将它补成左R-短正合列：

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\eta} B'' \longrightarrow 0$$

于是有正合列：

$$\mathrm{Tor}_1^R(A, B'') \longrightarrow A\otimes B' \xrightarrow{1\otimes i} A\otimes B$$

据已给条件知 $\mathrm{Tor}_1^R(A, B'') = 0$。故$1\otimes i$是单射。因此$A$是平坦模。

最后，我们指出，由于定理22.7，在计算 $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$时，可以用A的平坦分解或B的平坦分解来代替它们的投射分解。即有下面定理。

定理22.9 设

$$P:\ \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$$

$$Q:\ \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{e_2} Q_1 \xrightarrow{e_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} B \longrightarrow 0$$

分别是A及B的平坦分解，即P及Q都是正合列，且每一个P_i及每一个Q_i都是平坦模。则有

(i) $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong H_n(P_A\otimes_R B)$, $\quad \forall n\in \mathbf{Z}$;

(ii) $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong H_n(A\otimes_R Q_B)$, $\quad \forall n\in \mathbf{Z}$.

证 我们只证明 (i)。完全类似地可以证明 (ii)。又，明显知道只要对$n\geqslant 0$进行证明即可。

由复形

$$P\otimes B:\ \cdots \longrightarrow P_2\otimes B \xrightarrow{d_2\otimes 1} P_1\otimes B \xrightarrow{d_1\otimes 1}$$

$$P_0\otimes B \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} A\otimes B \longrightarrow 0$$

知$H_0(P_A\otimes B)$

$= \dfrac{P_0\otimes B}{\mathrm{im}(d_1\otimes 1)}$。又因为$\otimes_R B$是右正合的，从而 $P_1\otimes B \xrightarrow{d_1\otimes 1}$ $P_0\otimes B \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} A\otimes B \longrightarrow 0$ 是正合列。 故 $\mathrm{im}\ (d_1\otimes 1) = \ker(\varepsilon\otimes 1)$。因此$H_0(P_A\otimes B)\cong A\otimes B\cong \mathrm{Tor}_0^R(A, B)$。

现在证明 $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)\cong H_1(P_A\otimes B)$。

为此，命$K_0 = \ker\eta$。则有短正合列

于是有正合列 $0 \to K_0 \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Q_0 \xrightarrow{\eta} B \to 0$

$$\mathrm{Tor}_1^R(A, Q_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow A \otimes K_0 \xrightarrow{1 \otimes \alpha} A \otimes Q_0$$

因为Q_0是平坦模，故$\mathrm{Tor}_1^R(A, Q_0) = 0$。因此有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow A \otimes K_0 \xrightarrow{1 \otimes \alpha} A \otimes Q_0. \tag{I}$$

又，明显知道有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \underline{P_A \otimes K_0} & & \underline{P_A \otimes Q_0} & & \underline{P_A \otimes B} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_2 \otimes K_0 & \xrightarrow{1_{P_2} \otimes \alpha} & P_2 \otimes Q_0 & \xrightarrow{1_{P_2} \otimes \eta} & P_2 \otimes B & \longrightarrow & 0 \\
 & d_2 \otimes 1_{K_0} & \downarrow & & \downarrow d_2 \otimes 1_{Q_0} & & \downarrow d_2 \otimes 1_B & & \\
0 & \longrightarrow & P_1 \otimes K_0 & \xrightarrow{1_{P_1} \otimes \alpha} & P_1 \otimes Q_0 & \xrightarrow{1_{P_1} \otimes \eta} & P_1 \otimes B & \longrightarrow & 0 \\
 & d_1 \otimes 1_{K_0} & \downarrow & & \downarrow d_1 \otimes 1_{Q_0} & & \downarrow d_1 \otimes 1_B & & \\
0 & \longrightarrow & P_0 \otimes K_0 & \xrightarrow{1_{P_0} \otimes \alpha} & P_0 \otimes Q_0 & \xrightarrow{1_{P_0} \otimes \eta} & P_0 \otimes B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

且因每一个 P_i 都是平坦模，故图中每一横行都是短正合列。于是得到链映射短正合列：

$$0 \longrightarrow P_A \otimes K_0 \xrightarrow{1 \otimes \alpha} P_A \otimes Q_0 \xrightarrow{1 \otimes \eta} P_A \otimes B \longrightarrow 0$$

从而有正合列

$$H_1(P_A \otimes Q_0) \longrightarrow H_1(P_A \otimes B) \longrightarrow H_0(P_A \otimes K_0) \xrightarrow{\varphi} H_0(P_A \otimes Q_0),$$

其中

$$\varphi:\ H_0(P_A\otimes K_0)=\frac{P_0\otimes K_0}{\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{k_0})}\longrightarrow H_0(P_A\otimes Q_0)=\frac{P_0\otimes Q_0}{\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{Q_0})}$$

$$x+\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{K_0})\longmapsto (1_{P_0}\otimes\alpha)(x)+\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{Q_0})$$

因为Q_0是平坦模，故$P_2\otimes Q_0\xrightarrow{d_2\otimes 1_{Q_0}}P_1\otimes Q_0\xrightarrow{d_1\otimes 1_{Q_0}}P_0\otimes Q_0$ 是正合列，从而$H_1(P_A\otimes Q_0)=0$。因此有正合列

$$0\longrightarrow H_1(P_A\otimes B)\longrightarrow H_0(P_A\otimes K_0)\xrightarrow{\varphi}H_0(P_A\otimes Q_0)\qquad (\mathrm{II})$$

因为$\otimes_R K_0$是右正合的，故$\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{k_0})=\ker(\varepsilon\otimes 1_{k_0})$，因此有交换图：

$$\begin{array}{ccc} P_0\otimes K_0 & \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1_{K_0}} & A\otimes K_0\\ & \searrow & \nearrow{\scriptstyle\sigma}\\ & P_0\otimes K_0/\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{K_0}) & \end{array}$$

即

$$\sigma:\ H_0(P_A\otimes K_0)\longrightarrow A\otimes K_0$$
$$x+\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{k_0})\longmapsto(\varepsilon\otimes 1_{k_0})(x)$$

且σ是同构映射。

同样，有

$$\rho:\ H_0(P_A\otimes Q_0)\longrightarrow A\otimes Q_0$$
$$y+\mathrm{im}(d_1\otimes 1_{Q_0})\longmapsto(\varepsilon\otimes 1_{Q_0})(y)$$

且ρ 是同构映射。

容易验证有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(P_A\otimes B) & \longrightarrow & H_0(P_A\otimes K_0) & \xrightarrow{\varphi} & H_0(P_A\otimes Q_0) & & (\mathrm{II})\\ & & & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(A,B) & \longrightarrow & A\otimes K_0 & \xrightarrow{1_A\otimes\alpha} & A\otimes Q_0 & & (\mathrm{I}) \end{array}$$

因此$\mathrm{Tor}_1^R(A, B)\cong H_1(P_A\otimes B)$.

现在假设定理对于n成立，其中$n\geqslant 1$，这时首先有正合列：

$$H_{n+1}(P_A\otimes Q_0)\longrightarrow H_{n+1}(P_A\otimes B)\longrightarrow H_n(P_A\otimes K_0)\longrightarrow H_n(P_A\otimes Q_0).$$

因为Q_0是平坦模，且$n\geqslant 1$，可知$H_{n+1}(P_A\otimes Q_0)=0$，$H_n(P_A\otimes Q_0)=0$．因此$H_{n+1}(P_A\otimes B)\cong H_n(P_A\otimes K_0)$，故据归纳假定知$H_{n+1}(P_A\otimes B)\cong \mathrm{Tor}_n^R(A,K_0)$．但因有正合列：

$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,Q_0)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B)\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A,K_0)\longrightarrow$ $\mathrm{Tor}_n^R(A,Q_0)$，而$n\geqslant 1$，Q_0是平坦模，从而$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,Q_0)=0$，$\mathrm{Tor}_n^R(A,Q_0)=0$．故$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B)\cong \mathrm{Tor}_n^R(A,K_0)$，所以$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B)\cong H_{n+1}(P_A\otimes B)$.

22.4 Tor作用于直和

我们知道，对于函子$\otimes$，有$A\otimes(\bigoplus_{k\in K} B_k)\cong\bigoplus_{k\in K}(A\otimes B_k)$及$(\bigoplus_{k\in K} A_k)\otimes B\cong\bigoplus_{k\in K}(A_k\otimes B)$．现在我们证明，对于函子Tor有同样结果，即有下面定理．

定理22.10

(i) $\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus_{k\in K} A_k, B)\cong\bigoplus_{k\in K}\mathrm{Tor}_n^R(A_k, B)$，$\forall n\in \mathbf{Z}$；

(ii) $\mathrm{Tor}_n^R(A, \bigoplus_{k\in K} B_k)\cong\bigoplus_{k\in K}\mathrm{Tor}_n^R(A, B_k)$，$\forall n\in \mathbf{Z}$.

证 我们只证明(i)，完全类似地可证(ii).

易知只要对$n>0$的情形证明即可.

先证明$\mathrm{Tor}_1^R(\bigoplus_{k\in K} A_k, B)\cong\bigoplus_{k\in K}\mathrm{Tor}_1^R(A_k, B)$.

首先，对于每一个$k\in K$，总有一个短正合列：

$$0\longrightarrow L_k\overset{f_k}{\hookrightarrow} P_k\overset{g_k}{\longrightarrow} A_k\longrightarrow 0$$

其中P_k是投射模．从而有短正合列

$$0 \longrightarrow \oplus L_k \xrightarrow{f} \oplus P_k \xrightarrow{g} \oplus A_k \longrightarrow 0$$

这里 $f(\cdots, l_k, \cdots) = (\cdots, f_k(l_k), \cdots)$. g的意义自明。

这样，我们得到两个正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(\oplus A_k, B) \longrightarrow (\oplus L_k) \otimes B \xrightarrow{f \otimes 1_B} (\oplus P_k) \otimes B,$$

$$0 \longrightarrow \oplus \mathrm{Tor}_1^R(A_k, B) \longrightarrow \oplus (L_k \otimes B) \xrightarrow{\sigma} \oplus (P_k \otimes B),$$

这里$\sigma(\cdots, x_k, \cdots) = (\cdots, (f_k \otimes 1_B)(x_k), \cdots)$.

容易验证下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(\oplus A_k, B) & \longrightarrow & (\oplus L_k) \otimes B & \xrightarrow{f \otimes 1_B} & (\oplus P_k) \otimes B \\
 & & & \downarrow \theta_L & & \downarrow \theta_P \\
0 \longrightarrow & \oplus \mathrm{Tor}_1^R(A_k, B) & \longrightarrow & \oplus (L_k \otimes B) & \xrightarrow{\sigma} & \oplus (P_k \otimes B),
\end{array}$$

这里θ_L满足$\theta_L((\cdots, l_k, \cdots) \otimes b) = (\cdots, l_k \otimes b, \cdots)$，且是同构映射；$\theta_P$ 的意义随之自明，且是同构映射。因此 $\mathrm{Tor}_1^R(\oplus A_k, B) \cong \oplus \mathrm{Tor}_1^R(A_k, B)$.

现在假设式(i)对n成立，其中$n \geqslant 1$.

这时有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(\oplus A_k, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(\oplus L_k, B) \longrightarrow 0.$$

因此 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(\oplus A_k, B) \cong \mathrm{Tor}_n^R(\oplus L_k, B)$，故据归纳假定知 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(\oplus A_k, B) \cong \oplus \mathrm{Tor}_n^R(L_k, B)$，又因为 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(P_k, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A_k, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_k, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(P_k, B)$ 是正合列，而$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(P_k, B) = 0$, $\mathrm{Tor}_n^R(P_k, B) = 0$，故 $\mathrm{Tor}_n^R(L_k, B) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A_k, B)$. 所以$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(\oplus A_k, B) \cong \oplus \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A_k, B)$.

§23 Tor 及 挠

函子Tor 与挠的概念有着密切的联系。本节研究这两者之间的联系。

23.1　函子$\mathrm{Tor}_1^R(K, -)$

设R是非零交换整环，并设A是R-模。命

$$t(A)=\{a\in A \mid 存在0\neq r\in R使\ ra=0\}.$$

则易知$t(A)$是A的一个子模.

当$t(A)=A$时，称A是挠R-模；当$t(A)=0$时，称A是非挠R-模。

容易知道，$t(A)$恒是挠R-模，$\dfrac{A}{t(A)}$恒是非挠R-模。

现在我们设Q是R的分式域，并命

$$K=\frac{Q}{R}$$

我们在本段中将证明，对于任何R-模A，恒有

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, -)(A)\cong t(A).$$

为此，先证明下面三个引理。

引理23.1　当$n\geqslant 2$时，

$$\mathrm{Tor}_n^R(K, A)=0,\quad \forall\ R\text{-模}A.$$

证　由短正合列　$0\longrightarrow R\hookrightarrow Q\longrightarrow K\longrightarrow 0$

可得正合列

$$\mathrm{Tor}_n^R(Q, A)\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(K, A)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(R, A).$$

当$n\geqslant 2$时，由于Q及R都是平坦R-模，故$\mathrm{Tor}_n^R(Q, A)=0$，$\mathrm{Tor}_{n-1}^R(R, A)=0$，因此$\mathrm{Tor}_n^R(K, A)=0$.

引理23.2　当A是挠R-模时，

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, A)\cong A.$$

证　由短正合列　$0\longrightarrow R\hookrightarrow Q\longrightarrow K\longrightarrow 0$

可得正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(Q, A)\qquad \mathrm{Tor}_1^R(K, A)\qquad R\otimes A\qquad Q\otimes A.$$

因为 Q是平坦R-模，故 $\mathrm{Tor}_1^R(Q, A)=0$，因为A是挠R-模，而Q是R的分式域，易知 $Q\otimes A=0$．因此 $\mathrm{Tor}_1^R(K, A)\cong R\otimes A$，但$R\otimes A\cong A$，所以$\mathrm{Tor}_1^R(K, A)\cong A$.

引理23.3 当A是非挠R-模时，

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, A)=0.$$

证 首先由引理14.1的证明知A可以嵌入域Q上向量空间，即存在一个Q-模E，并存在R-单射$\varphi: A\longrightarrow E$，于是有短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\varphi} E\longrightarrow \frac{E}{\mathrm{im}\varphi}\longrightarrow 0.$$

从而有正合列

$$\mathrm{Tor}_2^R\left(K, \frac{E}{\mathrm{im}\varphi}\right)\longrightarrow \mathrm{Tor}_R^1(K, A)\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, E).$$

由引理 23.1知 $\mathrm{Tor}_2^R\left(K, \frac{E}{\mathrm{im}\varphi}\right)=0$，又因为$E$是域$Q$上的模，故$Q$-模$E$与若干个$Q$-模$Q$的直和同构．从而 R-模 E与若干个R-模Q 同构．但是Q是平坦R-模，故E是平坦 R-模．因此 $\mathrm{Tor}_1^R(K, E)=0$．所以 $\mathrm{Tor}_1^R(K, A)=0$．

定理23.1 对于任何R-模A，恒有

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, A)\cong t(A).$$

证 由短正合列

$$0\longrightarrow t(A)\hookrightarrow A\longrightarrow A/t(A)\longrightarrow 0$$

有正合列

$$\mathrm{Tor}_2^R\left(K, \frac{A}{t(A)}\right)\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, t(A))\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, A)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\left(K, \frac{A}{t(A)}\right).$$

由引理23.1知$\mathrm{Tor}_2^R\left(K, \dfrac{A}{t(A)}\right)=0$．又因为$\dfrac{A}{t(A)}$是非挠$R$-模，故由引理23.3知$\mathrm{Tor}_1^R\left(K,\dfrac{A}{t(A)}\right)=0$．因此

$$\mathrm{Tor}_1^R(K,A)\cong\mathrm{Tor}_1^R(K,t(A)).$$

因为$t(A)$是挠R-模，故由引理23.2知$\mathrm{Tor}_1^R(K,t(A))\cong t(A)$。于是$\mathrm{Tor}_1^R(K,A)\cong t(A)$．

由这个定理可以得到下面两个推论．

推论23.1 对于每一个R-模，恒有正合列：

$$0\longrightarrow t(A)\longrightarrow A\longrightarrow Q\otimes A\longrightarrow K\otimes A\longrightarrow 0.$$

证 由短正合列$0\longrightarrow R\hookrightarrow Q\longrightarrow K\longrightarrow 0$知有正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(Q,A)\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^R(K,A)\longrightarrow R\otimes A\longrightarrow Q\otimes A\longrightarrow K\otimes A\longrightarrow 0.$$

因为Q是平坦R-模，故$\mathrm{Tor}_1^R(Q,A)=0$．从而有正合列：

$$0\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^R(K,A)\longrightarrow R\otimes A\longrightarrow Q\otimes A\longrightarrow K\otimes A\longrightarrow 0$$

因为$\mathrm{Tor}_1^R(K,A)\cong t(A)$，$R\otimes A\cong A$，故有正合列：

$$0\longrightarrow t(A)\longrightarrow A\longrightarrow Q\otimes A\longrightarrow K\otimes A\longrightarrow 0.$$

推论23.2 设A是R-模，则A是挠R-模，当且仅当$Q\otimes A=0$．

证 当A是挠R-模时，当然$Q\otimes A=0$，反之，设$Q\otimes A=0$，则由推论23.1知有正合列

$$0\longrightarrow t(A)\longrightarrow A\longrightarrow 0$$

故$A\cong t(A)$．因此A是挠R-模。

23.2 当$n\geqslant1$时，$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$恒是挠模

在本段中我们将证明，当$n\geqslant1$时，对于任何R-模A,B，必定$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$是挠模。

为此，先证明两个引理。

引理23.4 若在R-正合列

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

中X及Z都是挠R-模，则Y也是挠R-模。

证 因为Q是平坦R-模，故有正合列

$$Q\otimes X \longrightarrow Q\otimes Y \longrightarrow Q\otimes Z$$

由推论23.2知$Q\otimes X=0$，$Q\otimes Z=0$。故$Q\otimes Y=0$。因此由推论23.2 知Y是挠R-模。

引理23.5 若B是挠R-模，则当$n\geqslant 0$ 时，

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\text{是挠模，}\quad \forall\, R\text{-模}A.$$

证 首先知 $A\otimes_R B$ 是挠模，故由 $\mathrm{Tor}_0^R(A,B)\cong A\otimes_R B$ 知 $\mathrm{Tor}_0^R(A,B)$ 是挠模。

再证明 $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$ 是挠模。为此，任取一个R-短正合列 $0\longrightarrow N\longrightarrow P\longrightarrow A\longrightarrow 0$，其中 P是投射模。于是有正合列：

$$0=\mathrm{Tor}_1^R(P,B)\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A,B)\longrightarrow N\otimes B$$

因此 $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$与$N\otimes B$ 的一个子模同构。但 $N\otimes B$ 是挠模，而挠模的子模当然是挠模，故 $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$是挠模。

现在假设引理对n成立，其中 $n\geqslant 1$，由正合列

$$0=\mathrm{Tor}_{n+1}^R(P,B)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(N,B)$$

知 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)$与$\mathrm{Tor}_n^R(N,B)$ 的一个子模同构。据归纳假定知$\mathrm{Tor}_n^R(N,B)$是挠模，故$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)$是挠模。

定理23.2 当$n\geqslant 1$ 时，

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\text{是挠模，}\quad \forall\, R\text{-模}A\text{及}B.$$

证 先考虑B是非挠 R-模的情形。由推论 23.1 知有正合列 $0\longrightarrow t(B)\longrightarrow B\longrightarrow Q\otimes B\longrightarrow K\otimes B\longrightarrow 0$。因为$B$是非挠$R$-模，故$t(B)=0$，从而有短正合列

$$0\longrightarrow B\longrightarrow Q\otimes B\longrightarrow K\otimes B\longrightarrow 0,$$

因此有正合列

$$\operatorname{Tor}_{n+1}^R(A,\ K\otimes B)\longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A,B)\longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A,\ Q\otimes B).$$

易知 Q是挠 R-模，且易知挠模的同态象是挠模，故K是挠R-模，从而$K\otimes B$是挠模，因此由引理23.5知 $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(A,K\otimes B)$是挠模．又因为$Q\otimes B$是域$Q$上向量空间，故$Q$-模 $Q\otimes B$ 与若干个Q-模Q的直和同构，从而R-模 $Q\otimes B$ 与若干个R-模Q的直和同构，因此$Q\otimes B$是平坦R-模，于是 $\operatorname{Tor}_n^R(A,Q\otimes B)=0$。这样，就有正合列$\operatorname{Tor}_{n+1}^R(A,K\otimes B)\longrightarrow\operatorname{Tor}_n^R(A,B)\longrightarrow 0$。故 $\operatorname{Tor}_n^R(A,B)$ 作为挠模 $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(A,K\otimes B)$ 的同态象，是挠模。

现在考虑B是任意R-模的情形．由短正合列 $0\longrightarrow t(B)\longrightarrow B\longrightarrow \dfrac{B}{t(B)}\longrightarrow 0$ 知有正合列

$$\operatorname{Tor}_n^R(A,t(B))\longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A,B)\longrightarrow \operatorname{Tor}_n^R\left(A,\ \frac{B}{t(B)}\right).$$

因为 $t(B)$是挠模，故由引理23.5知 $\operatorname{Tor}_n^R(A,t(B))$是挠模．因为$\dfrac{B}{t(B)}$是非挠模，故由刚才所证明的，知 $\operatorname{Tor}_n^R\left(A,\dfrac{B}{t(B)}\right)$是挠模。于是由引理23.4 知$\operatorname{Tor}_n^R(A,B)$ 是挠模。

§24　泛系数定理

本节给出来源于代数拓扑并在代数拓扑中有重要应用的同调泛系数定理及上同调泛系数定理。

我们先证明下面引理。

引理24.1　设R是右遗传环，则当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\operatorname{Tor}_n^R(X,Y)=0,\quad \forall\ X,Y.$$

证　首先总有一个右R-短正合列

$$P: \quad 0 \longrightarrow P_1 \hookrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

其中 P_0 是投射模。

因为R是右遗传环，故投射模 P_0 的子模P_1是投射模。因此上面的正合列成为 X 的一个投射分解，从而当 $n\geqslant 2$ 时由于 $H_n(P_X\otimes Y)=0$ 就有$\mathrm{Tor}_n^R(X,Y)=0$。

当一个复形

$$C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

中每一个C_i都是投射模时，我们称此复形是投射复形。

定理24.1（同调泛系数定理） 设R是右遗传环。则对任何左R-模A及任何投射右R-复形

$$K: \cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \longrightarrow \cdots,$$

恒有可裂的短正合列

$$0 \longrightarrow H_n(K)\otimes_R A \longrightarrow H_n(K\otimes_R A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K),A) \longrightarrow 0$$

也即有

$$H_n(K\otimes_R A)\cong H_n(K)\otimes_R A\oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K),A).$$

证 我们先来计算 $H_n(K)\otimes_R A, H_n(K\otimes_R A)$ 及 $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K),A)$。

仿前，记

$$B_n(K)=\mathrm{im}\,d_{n+1},\quad Z_n(K)=\ker d_n$$

则$H_n(K)=\dfrac{Z_n(K)}{B_n(K)}$.

易知有正合列

$$0 \longrightarrow Z(K) \xrightarrow{i_j} K_j \xrightarrow{d'_j} Z_{j-1}(K) \xrightarrow{\gamma_{j-1}} H_{j-1}(K) \longrightarrow 0 \qquad (甲)$$

其中 d'_j: $K_j \longrightarrow Z_{j-1}(K)$ 是 $x \longmapsto d_j(x)$，γ_{j-1} 是自然同态映射。

因为每一个K_j都是投射模，而R是右遗传环，故作为K_j的子模，每一个$Z_j(K)$都是投射模。因此(甲)是$H_{j-1}(K)$的一个投射分解。

于是有

$$H_n(K)\otimes A\cong \mathrm{Tor}_0^R(H_n(K),A)\cong\frac{Z_n(K)\otimes A}{\mathrm{im}(d'_{n+1}\otimes 1_A)},$$

$$H_n(K\otimes A)=\frac{\ker(d_n\otimes 1_A)}{\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)},$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K),A)\cong\frac{\ker(d_n'\otimes 1_A)}{\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)}.$$

首先容易证明:

$$\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)\subseteq\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)\subseteq\ker(d_n\otimes 1_A)$$

故有

$$(\ker(d_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A))/(\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A))$$

$$\cong\ker(d_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A).$$

从而有短正合列

$$0\to\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(\alpha_{n+1}\otimes 1_A)\xrightarrow{\alpha}\ker(d_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)$$

$$\longrightarrow\ker(d_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)\longrightarrow 0 \qquad (乙)$$

其次容易证明:

$$\ker(d'_n\otimes 1_A)=\ker(d_n\otimes 1_A).$$

故有

$$\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K),A)\cong\frac{\ker(d_n\otimes 1_A)}{\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)}.$$

又由引理24.1知$\mathrm{Tor}_2^R(H_{n-1}(K), A)=0$，故 $\ker(i_n\otimes 1_A)=0$，因此$i_n\otimes 1_A$是单射，从而有满射：

$$Z_n(K)\otimes A\xrightarrow{\rho(i_n\otimes 1_A)}\frac{\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)}{\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)}$$

且易知 $\ker\rho(i_n\otimes 1_A)=\mathrm{im}(d'_{n+1}\otimes 1_A)$.故有

$$H_n(K)\otimes A\cong\frac{\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)}{\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)}.$$

这样，由(乙)就得到一个短正合列

$$0\longrightarrow H_n(K)\otimes A\longrightarrow H_n(K\otimes A)\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K), A)\longrightarrow 0,\qquad (丙)$$

最后，我们证明（丙）是可裂的，由于(丙)是由(乙)得到的，因此只要证明(乙)是可裂的。

为此，考虑短正合列

$$0\longrightarrow Z_n(K)\xrightarrow{i_n} K_n\xrightarrow{d''_n} B_{n-1}(K)\longrightarrow 0\qquad (丁)$$

其中 $d_n''(x)=d_n(x)$，$\forall x\in K_n$.

因为 $B_{n-1}(K)$作为投射模K_{n-1}的子模是投射模，故（丁）可裂。从而由于加法函子保持可裂短正合列，知有可裂短正合列

$$0\longrightarrow Z_n(K)\otimes A\xrightarrow{i_n\otimes 1_A} K_n\otimes A\xrightarrow{d''_n\otimes 1_A} B_{n-1}(K)\otimes A\longrightarrow 0$$

由交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Z_n(K)\otimes A & \xrightarrow{i_n\otimes 1_A} & K_n\otimes A & \xrightarrow{d''_n\otimes 1_A} & B_{n-1}(K)\otimes A & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle i_n\otimes 1_A} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \to & \mathrm{im}(i_n\otimes 1_A) & \hookrightarrow & K_n\otimes A & \xrightarrow{d''_n\otimes 1_A} & B_{n-1}(K)\otimes A & \to & 0
\end{array}$$

知下面一行是可裂短正合列，因此

$$K_n\otimes A=\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)\oplus W,$$

从而

$$\ker(d_n\otimes 1_A)=\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)\oplus(W\cap\ker(d_n\otimes 1_A)),$$

因此

$$\ker(d_n\times 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)=\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)$$

$$\oplus((w\cap\ker(d_n\otimes 1_A))\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A))/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)$$

从而有可裂短正合列

$$0\to\mathrm{im}(i_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)\xhookrightarrow{\alpha}\ker(d_n\otimes 1_A)/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)$$
$$\to((w\cap\ker(d_n\otimes 1_A))+\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A))/\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_A)\to 0$$

于是α左可裂．从而(Z)可裂．因此(丙)可裂．

对偶地有下面定理．

定理24.2（上同调泛系数定理） 设R是左遗传环.则对任何左R-模A及任何投射左R-复形

$$K:\quad\cdots\longrightarrow K_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}K_n\xrightarrow{d_n}K_{n-1}\longrightarrow\cdots,$$

恒有可裂的短正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(K),A)\longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(-,A)K)$$
$$\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(H_n(K),A)\longrightarrow 0,$$

也即有

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(-,A)K)\cong\mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(K),A)\oplus$$
$$\mathrm{Hom}_R(H_n(K),A).$$

习 题 七

（1）设R是交换环．若$\mathrm{Ext}_1^R(A,B)=0$，$\forall B$.则对任何正整数n，恒有$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0$，$\forall B$.

（2）证明：对于任何Abel群A及B，当$n\geqslant 2$时，恒有$\mathrm{Tor}_n^Z(A,B)=0$.

（3）设$0\longrightarrow A'\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}A''\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列，且$A''$是平坦左$R$-模．证明：对于任何右$R$-模$B$，恒有短正合列$0\longrightarrow B\otimes A'\xrightarrow{1\otimes\alpha}B\otimes A\xrightarrow{1\otimes\beta}B\otimes A''\longrightarrow 0$.

（4）设$0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0$是左$R$-短正合列，且$A'$及$A''$都是平坦模．证明：$A$是平坦模．

（5）设n是正整数．证明：$\mathrm{Tor}_1^Z(\mathbf{Z}/(n\mathbf{Z}),B)\cong B[n]$，其中$B[n]=\{b\in B\mid nb=0\}$.

（6）设A,B是循环群，计算$\mathrm{Tor}_1^Z(A,B)$.

（7）设A,B是Abel群，正整数m,n互素，且$mA=nB=0$.

证明：$\mathrm{Tor}_1^Z(A,B)=0$，且当$0\to D\to C\to B\to 0$正合时，$0\to A\otimes D\to A\otimes C\to A\otimes B\to 0$正合．

第八章　环及模的维数

本章讨论环及模的维数。旨在说明函子 Ext 及 Tor 是研究环的有价值的工具。

§25　环及模的维数

25.1　模的投射维数

定义25.1　若左R-模A有一个如下形状的投射分解

$$\cdots\to 0\to 0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0$$

即$P_k=0$，$\forall k>n$（注意：允许$P_n=0$），则在A的所有这种形状的投射分解中，必有一个投射分解，其中的非负整数n是最小的，即A有一个投射分解　$\cdots\to 0\to 0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0$，但$A$没有以下形状的投射分解：

$$\cdots\to 0\to 0\to Q_m\to\cdots\to Q_0\to A\to 0,\ m<n.$$

这个最小的非负整数n由A唯一确定，叫做左R-模A的投射维数（或同调维数），记作pd_RA（或$\mathrm{h.dim}_RA$）。

若在A的任何一个投射分解

$$\cdots\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0$$

中，对于任何非负整数m，恒存在正整数$k>m$使$P_k\neq 0$，则称左R-模的投射维数（或同调维数）是∞，记作$pd_RA=\infty$（或$\mathrm{h.dim}_RA=\infty$）。

关于投射模的投射维数，有下面定理。

定理25.1　左R-模A是投射模，当且仅当$pd_RA=0$。

证 若A是投射模，则A有投射分解

$$\cdots \to 0 \to 0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中$P_0 = A$；$P_i = 0$，$\forall i \geqslant 1$；$\varepsilon = 1_A$。故$pd_R A = 0$。

反之，若$pd_R A = 0$，则A有一个投射分解

$$\cdots \to 0 \to 0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

其中$P_i = 0$，$\forall i \geqslant 1$。于是$A \cong P_0$。故A是投射模。

关于遗传环上模的投射维数，有下面定理。

定理25.2 设R是左遗传环，则

$$pd_R A \leqslant 1, \quad \forall \text{左} R\text{-模} A.$$

证 对于任何左R-模A，首先总有一个左R-短正合列：

$$0 \longrightarrow P_1 \hookrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

其中P_0是投射左R-模。

因为R是左遗传环，故投射左R-模P_0的子模P_1是投射左R-模。于是以上短正合列是A的一个投射分解。故$pd_R A \leqslant 1$。

现在我们给出 $pd_R A \leqslant n$ 的一种刻划，即有下面定理。

定理25.3 设已给左R-模A，并设n是非负整数，则以下条件等价：

(i) $pd_R A \leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Ext}_R^k(A, B) = 0$，$\forall k \geqslant n+1$，$\forall B$；

(iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, B) = 0$，$\forall B$。

证 (i)⇒(ii)。这时A有一个投射分解

$$P: \quad \cdots \to 0 \to 0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中$P_i = 0$，$\forall i > n$。

由复形

$$\mathrm{Hom}_R(-, B)P_A: \quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, B) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_n, B) \xrightarrow{d^*_{n+1}} 0 \to 0 \to \cdots$$

即知$\mathrm{Ext}_R^k(A,B)=0$，$\forall k\geqslant n+1$，$\forall B$.

(ii)⇒(iii)．这是当然的.

(iii)⇒(i)．若$n=0$，则由$\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0$，$\forall B$，根据定理19.6′知A是投射模．因此$pd_RA=0$.

设$n\geqslant 1$，命

$$P:\qquad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0$$

是A的任意一个投射分解，并命$K_i=\ker d_i$，$i\geqslant 1$；$K_0=\ker\varepsilon$，$K_{-1}=A$，则由推论18.7知$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)\cong\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1},B)$．但$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall B$，故$\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1},B)=0$，$\forall B$．因此由定理19.6′知$K_{n-1}$是投射模．于是$A$有投射分解

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow 0\longrightarrow K_{n-1}\hookrightarrow P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

故$pd_RA\leqslant n$.

完全类似地定义右R-模A的投射维数$pd\,A_R$，并有与定理25.1、定理25.2及定理25.3相应的定理.

25.2　环的左投射大范围维数

定义25.2　设R是环．记

$$l.D(R)=\sup\{pd_RA\mid A\text{是左}R\text{-模}\}.$$

它叫做环R的左投射大范围维数.

我们给出$l.D(R)\leqslant n$的一种条件，即有下面定理.

定理25.4　设R是环，n是非负整数．则$l.D(R)\leqslant n$，当且仅当$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall A,B$.

证　首先当然有$l.D(R)\leqslant n$当且仅当$pd_RA\leqslant n$，$\forall A$．而由定理25.3知，$pd_RA\leqslant n$当且仅当$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall B$，故$l.D(R)\leqslant n$当且仅当$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall A,B$.

作为例子，我们来确定半单环及左遗传环的左投射大范围维数.

关于半单环的左投射大范围维数，有下面定理．

定理25.5 环R是半单环，当且仅当$l.D(R)=0$．

证 R是半单环当且仅当每一个左R-模A是投射模，即当且仅当$pd_R A=0$，$\forall A$．因此R是半单环当且仅当$l.D(R)=0$．

关于左遗传环的左投射大范围维数，有下面定理．

定理25.6 环R是左遗传环，当且仅当$l.D(R)\leqslant 1$．

证 设R是左遗传环，则据定理25.2知

$$pd_R A\leqslant 1,\quad \forall A.$$

因此$l.D(R)\leqslant 1$．

反之，设$l.D(R)\leqslant 1$，则据定理25.4知

$$\mathrm{Ext}_R^2(A,B)=0,\quad \forall A,\ B.$$

现在设A是任意一个投射左R-模，并设X是A的任意一个子模．则由左R-短正合列

$$0\longrightarrow X\hookrightarrow A\longrightarrow A/X\longrightarrow 0$$

知有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,B)\to\mathrm{Ext}_R^1(X,B)\to\mathrm{Ext}_R^2(A/X,B),\ \forall B.$$

因为$\mathrm{Ext}_R^2(A/X,B)=0$，而$A$是投射模，从而$\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0$，故$\mathrm{Ext}_R^1(X,B)=0$，$\forall B$．所以$X$是投射模．这样，我们证明了投射左$R$-模的子模是投射左$R$-模，因此$R$是左遗传环．

同样定义环R的右投射大范围维数是

$$rpD(R)=\sup\{pd\,A_R\mid A是右R\text{-}模\}.$$

易知有与定理25.4、定理25.5及定理25.6相应的定理．

25.3 模的内射维数

定义25.3 若左R-模A有如下形状的内射分解

$$0\to A\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^n\to 0\to 0\to\cdots,$$

即$E^k=0$，$\forall k>n$（注意：允许$E^n=0$），则在A的所有这种形状的内射分解中，必有一个内射分解其中的非负整数n是最小的，即A有一个内射分解$0\to A\to E^0\to\cdots\to E^n\to 0\to 0\to\cdots$，但$A$没有以下形状的内射分解：

$$0\to A\to E^0\to\cdots\to E^m\to 0\to 0\to\cdots,\quad m<n.$$

这个最小的非负整数n由A唯一确定，叫做左R-模A的内射维数，记作$id_R A$。

若在模A的任意一个内射分解

$$0\to A\to E^0\to\cdots\to E^n\to\cdots$$

中，对于任意非负整数m，恒存在正整数$k>m$使$E^k\neq 0$，则称A的内射维数是∞，记作$id_R A=\infty$。

关于内射模的内射维数，有下面定理。

定理25.7　左R-模A是内射模，当且仅当$id_R A=0$。

证　设A是内射模，则A有内射分解

$$0\to A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\to 0\to 0\to\cdots$$

其中$E^0=A$，$E^i=0$，$\forall i\geq 1$，$\varepsilon=1_A$。故$id_R A=0$。

反之，设$id_R A=0$，则A有一个内射分解

$$0\to A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\to 0\to 0\to\cdots,$$

其中$E^i=0$，$\forall i\geq 1$，于是$A\cong E^0$。故A是内射模。

现在我们给出$id_R B\leqslant n$的一种刻划，即有下面定理。

定理25.8　设已给左R-模B，并设n是非负整数。则以下条件等价：

(i) $id_R B\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Ext}_R^k(A,B)=0$，$\forall k\geqslant n+1$，$\forall A$；

(iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall A$。

证　(i)⇒(ii)。这时B有一个内射分解

$$E:\ 0\to B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\cdots\to E^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}E^n\to 0\to 0$$

$\to\cdots$其中$E^i=0$，$\forall i>n$。

由复形

$$\mathrm{Hom}_R(A,-)E_B:\ 0\to \mathrm{Hom}_R(A,E^0)\xrightarrow{d^0{}_*}\cdots\to \mathrm{Hom}_R(A,E^n)\to 0\to 0\to\cdots$$

知 $\mathrm{Ext}_R^k(A,B)=0$，　　$\forall\ k\geqslant n+1$，$\forall\ A$。

(ii)⇒(iii)．　这是当然的。

(iii)⇒(i)．　若$n=0$，则由 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0$，　$\forall\ A$，知 B 是内射模。故$id_RB=0$。

设 $n\geqslant 1$．命

$$E:\ 0\to B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\cdots$$

是B的任意一个内射分解，并命 $L^i=\mathrm{im}d^{i-1}$，$i\geqslant 1$；$L^0=\mathrm{im}\varepsilon$，则$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)\cong\mathrm{Ext}_R^1(A,L^n)$．于是 $\mathrm{Ext}_R^1(A,L^n)=0$，$\forall\ A$。故$L^n$是内射模。因此$B$有内射分解

$$0\to B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}\cdots\to E^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}L^n\to 0\to 0\to\cdots$$

故 $id_RB\leqslant n$。

完全类似地定义右 R-模 A 的内射维数 $id\,A_R$，并有与定理25.7及定理25.8相应的定理。

25.4 环的左内射大范围维数

定义25.4 设R是环。记

$$l.iD(R)=\sup\{id_RA\mid A\text{是左}R\text{-模}\}.$$

它叫做环R的左内射大范围维数。

我们给出 $l.iD(R)\leqslant n$ 的一种条件，即有下面定理。

定理25.9 设R是环，n是非负整数，则 $l.iD(R)\leqslant n$，当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall\ A,B$。

证 首先当然有：$l.iD(R)\leqslant n$ 当且仅当 $id_RB\leqslant n$，$\forall\ B$，而由定理25.8知，$id_RB\leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall\ A$，故 $l.iD(R)\leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall\ A,B$。

同样定义环R的右内射大范围维数是

$$riD(R)=\sup\{id\,A_R \mid A\text{是右}R\text{-模}\}.$$

易知有与定理25.9相应的定理.

25.5　环的左大范围维数

由定理25.4及定理25.9立刻知道对于任何环R,恒有$l_pD(R)=l_iD(R)$。同样,$rpD(R)=riD(R)$。

定义25.5　$l_pD(R)$(或$l_iD(R)$)叫做环R的左大范围维数,记作$lD(R)$。

同样,$rpD(R)$(或$riD(R)$)叫做环R的右大范围维数,记作$rD(R)$。

对于环R,若$lD(R)=rD(R)$,则$lD(R)$(或$rD(R)$)叫做环R的大范围维数,记作$D(R)$.

可知,当R是交换环时,恒有$lD(R)=rD(r)$.但当R不是交换环时,未必有$lD(R)=rD(R)$.

在$lD(R)$的定义中涉及到所有左R-模的投射维数.事实上可以证明它只涉及到所有循环左R-模的投射维数.为此,我们先证明下面引理.

引理25.1　左R-模B是内射模,当且仅当

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0,\ \forall R\text{的左理想}I.$$

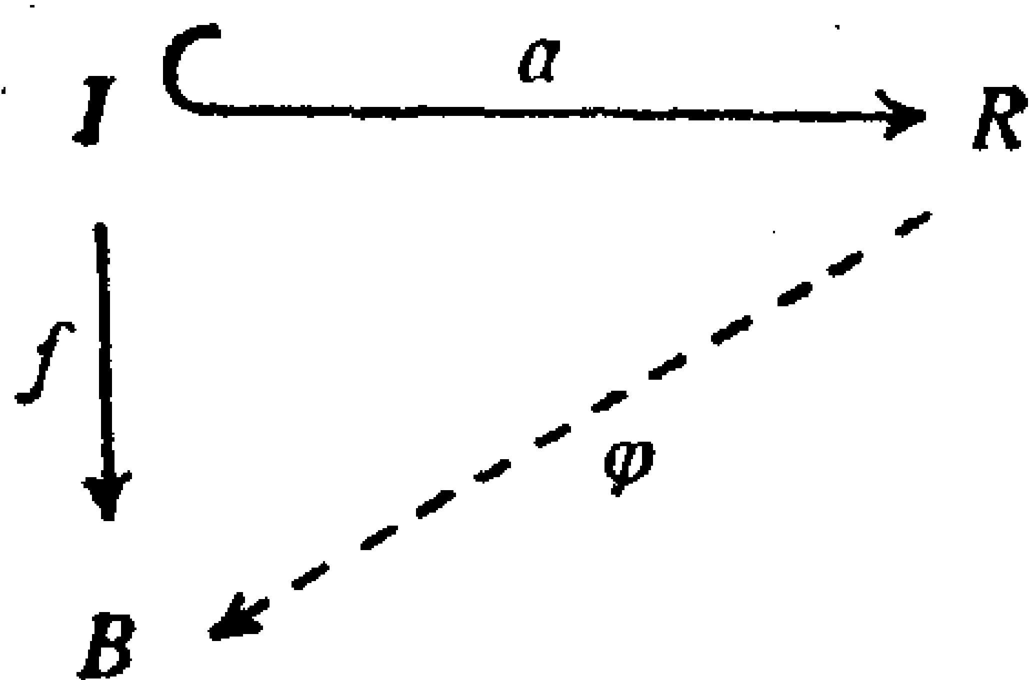
证　设B是内射模,则当然有$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0$,$\forall R$的左理想$I$.

反之,设$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0$,$\forall R$的左理想$I$.

为证B是内射模,命I是R的任一左理想.则由左R-短正合列 $0\longrightarrow I\overset{\alpha}{\hookrightarrow}R\overset{\beta}{\longrightarrow}R/I\longrightarrow 0$ 有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(R,B)\overset{\alpha^*}{\longrightarrow}\mathrm{Hom}_R(I,B)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B).$$

因为$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0$,故$\alpha^*$是满射.于是对于任何$f\in\mathrm{Hom}_R(I,B)$,恒可补成交换图:



故B是内射模。

定理25.10 (**Auslander**) 对于任何环R，恒有

$$lD(R)=\sup\{pd\ R/I \mid I\text{是}R\text{的左理想}\}.$$

证 设$\sup\{pd\ R/I \mid I$是R的左理想$\}=m$，则首先当然有

$$m\leqslant lD(R).$$

若 $m=\infty$，则 $lD(R)=\infty$。于是$lD(R)=m$。

设 $m<\infty$。

若$m=0$，则$pd\ R/I=0$，$\forall R$的左理想I.故对任意左R-模B有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0$，$\forall R$的左理想$I$。于是由引理25.1知$B$是内射模。从而$id_RB=0$。所以$lD(R)=0$。

若 $m\geqslant 1$.命

$$E:\quad 0\to B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\cdots$$

是B的任意一个内射分解，并命 $L^i=\mathrm{im}d^{i-1}$，$i\geqslant 1$；$L^0=\mathrm{im}\varepsilon$，则 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(R/I,B)\cong\mathrm{Ext}_R^1(R/I,L^m)$。因为 $pdR/I\leqslant m$，故 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(R/I,B)=0$。从而 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,L^m)=0$，$\forall I$。于是$L^m$是内射模。因此$B$有内射分解

$$0\to B\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}\cdots\to E^{m-1}\xrightarrow{d^{m-1}}L^m\to 0\to 0\to\cdots$$

所以 $id_RB\leqslant m$。从而 $lD(R)\leqslant m$。故$lD(R)=m$。

根据 $lD(R)$的定义及定理25.5，定理25.6立刻知道，R是半单环当且仅当 $lD(R)=0$；R是左遗传环当且仅当 $lD(R)\leqslant 1$。

因为同样有：R是半单环当且仅当 $rD(R)=0$，故又得到：R是半单环当且仅当$D(R)=0$。

25.6　模的平坦维数

定义25.6　若右 R-模 A 有一个如下形状的平坦分解

$$\cdots\to 0\to 0\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to A\to 0$$

即 $F_k=0$，$\forall k>n$（注意：允许 $F_n=0$），则在 A 的所有这种形状的平坦分解中，必有一个平坦分解其中的非负整数 n 是最小的。这个最小的非负整数由 A 唯一确定，叫做 A 的平坦维数，记作 fdA_R。若 A 没有上述形状的平坦分解，则称 A 的平坦维数是 ∞，记作 $fdA_R=\infty$。

关于平坦模的维数，有下面定理。

定理25.11　右 R-模 A 是平坦模，当且仅当 $fdA_R=0$。

证　设 A 是平坦模，则 A 有平坦分解：

$$\cdots\to 0\to 0\to F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0,$$

其中 $F_0=A$；$F_i=0$，$i\geqslant 1$；$\varepsilon=1_A$，因此 $fdA_R=0$。

反之，设 $fdA_R=0$，则 A 有一个平坦分解：

$$\cdots\to 0\to 0\to F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0$$

其中 $F_i=0$，$i\geqslant 1$，于是 $A\cong F_0$，故 A 是平坦模。

现在我们给出 $fdA_R\leqslant n$ 的一种刻划，即有下面定理。

定理25.12　设已给右 R-模 A，并设 n 是非负整数，则以下条件等价：

(i) $fdA_R\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Tor}_k^R(A,B)=0$，$\forall k\geqslant n+1$，$\forall B$；

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)=0$，$\forall B$。

证　(i)⇒(ii)。这时 A 有一个平坦分解：

$$F:\quad\cdots\to 0\to 0\to F_n\xrightarrow{d_n}F_{n-1}\to\cdots\to F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0$$

其中 $F_k=0$，$\forall k>n$。

由复形

$$F_A\otimes B:\ \cdots\to 0\to 0\to F_n\otimes B\xrightarrow{d_n\otimes 1}\cdots\to F_1\otimes B\xrightarrow{d_1\otimes 1}F_0\otimes B\to 0$$

知$H_k(F_A \otimes B)=0$，$\forall k \geqslant n+1$，$\forall B$。故由定理 22.9知
$\mathrm{Tor}_k^R(A,B)=0$，$\forall k \geqslant n+1$，$\forall B$。

(ii)⇒(iii)。这是当然的。

(iii)⇒(i)。若$n=0$，则$\mathrm{Tor}_1^R(A,B)=0$，$\forall B$。故由定理22.8知A是平坦模。因此 $fdA_R=0$。

设 $n \geqslant 1$。命

$$F: \quad \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

是A的任意一个投射分解，并命$K_i=\ker d_i$，$i \geqslant 1$；$K_0=\ker \varepsilon$；$K_{-1}=A$，则 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B) \simeq \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},B)$。于是
$\mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},B)=0$，$\forall B$。故$K_{n-1}$是平坦模。因此$A$有平坦分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_{n-1} \hookrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

所以 $fdA_R \leqslant n$。

完全类似地定义左 R-模A的平坦维数 fd_RA，并有与定理25.11及定理25.12相应的定理。

25.7 环的弱维数

定义25.7 设R是环。记

$$rwD(R)=\sup\{fdA_R \mid A\text{是右}R\text{-模}\}$$

它叫做环R的右弱维数。

我们给出 $rwD(R) \leqslant n$ 的一种条件，即有下面定理。

定理25.13 设R是环，n是非负整数。则$rwD(R) \leqslant n$，当且仅当 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)=0$，$\forall A, B$。

证 首先当然有 $rwD(R) \leqslant n$ 当且仅当 $fdA_R \leqslant n$，$\forall A$。而由定理 25.12知 $fdA_R \leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)=0$，$\forall B$。故 $rwD(R) \leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)=0$，$\forall A,B$。

同样定义环R的左弱维数是

$$lwD(R)=\sup\{fd_RA \mid A\text{是左}R\text{-模}\}。$$

易知有 $lwD(R)\leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)=0$，$\forall A,B$。

由此即知，对于任何环R，恒有

$$rwD(R)=lwD(R)。$$

定义25.8 $rwD(R)$（或$lwD(R)$）叫做环R的弱维数，记作$wD(R)$。

回想起 (i)$lD(R)=0$ 当且仅当R是半单环。其根本原因是R为半单环当且仅当每一个左R-模是投射模；(ii)$lD(R)\leqslant 1$当且仅当R是左遗传环。其根本原因是R为左遗传环当且仅当投射左R-模的子模是投射左R-模。因此易知有下面两个定理。

定理25.14 $wD(R)=0$，当且仅当R是 Von Neumann正则环。

证 因为$wD(R)=0$ 当且仅当$fdA_R=0$，$\forall A$。而$fdA_R=0$当且仅当A是平坦模，故$wD(R)=0$ 当且仅当R是 Von Neumarn正则环。

定理25.15 $wD(R)\leqslant 1$，当且仅当每一个平坦右R-模的子模是平坦右R-模。

证 设 $wD(R)\leqslant 1$。则据定理25.13知

$$\mathrm{Tor}_2^R(X,Y)=0,\quad \forall X, Y。$$

若A是平坦右R-模，A'是A的子模，则有右R-短正合列

$0\longrightarrow A'\hookrightarrow A\longrightarrow A/A'\longrightarrow 0$ 从而有正合列

$$\mathrm{Tor}_2^R(A/A',B)\to\mathrm{Tor}_1^R(A',B)\to\mathrm{Tor}_1^R(A,B),$$

$$\forall B。$$

因为$\mathrm{Tor}_2^R(A/A',B)=0$，而$A$是平坦模，从而$\mathrm{Tor}_1^R(A,B)=0$，故$\mathrm{Tor}_1^R(A',B)=0$，$\forall B$。因此$A'$是平坦模。

反之，设每一个平坦右R-模的子模是平坦模。命A是任意

一个右R-模，则有一个短正合列

$$0 \longrightarrow K_0 \hookrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

其中F_0是自由右R-模，从而是平坦右R-模。于是F_0的子模K_0是平坦模。因此以上短正合列是A的一个平坦分解。故 $fd\,A_R \leqslant 1$。所以$wD(R)\leqslant 1$。

$wD(R)$与$lD(R)$及$rD(R)$之间有一个重要的关系，即有下面定理。

定理25.16 $wD(R)\leqslant \min(lD(R), rD(R))$。

证 设A是任意一个右R-模。因为A的一个投射分解也是A的一个平坦分解，故 $fd\,A_R \leqslant pd\,A_R$。从而 $wD(R)=rwD(R)\leqslant rD(R)$。同理，$wD(R)=lwD(R)\leqslant lD(R)$，因此$wD(R)\leqslant \min(lD(R), rD(R))$。

由这个定理立刻得到下面推论。

推论25.1 若$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall A,B$，则
$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(C,D)=0$，$\forall C,D$。

证 由$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，$\forall A, B$，得到 $lD(R)\leqslant n$，故 $wD(R)\leqslant n$。因此$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(C, D)=0$，$\forall C,D$。

在$wD(R)$的定义中涉及到所有右R-模（或所有左R-模）的平坦维数。事实上可以证明只涉及到所有循环R-模的平坦维数。为此，我们先证明下面引理。

引理25.2 左R-模B是平坦模，当且仅当 $\mathrm{Tor}^R_1(R/I,B)=0$，$\forall R$的右理想$I$。

证 若B是平坦模，则对R的任意右理想I，当然有$\mathrm{Tor}^R_1(R/I,B)=0$。

反之，设对R的任意右理想I，恒有$\mathrm{Tor}^R_1(R/I,B)=0$。为证$B$是平坦模，命$I$是$R$的任意一个$f.g.$右理想。则$\mathrm{Tor}^R_1(R/I,B)=0$，因为由短正合列

$$0 \longrightarrow I \hookrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$ 有正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, B) \to I \otimes B \to R \otimes B,$$

而 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, B) = 0$，故有正合列

$$0 \to I \otimes B \to R \otimes B.$$

因此由定理8.5知B是平坦模.

定理25.17　对于任何环R，恒有

$$wD(R) = \sup\{fdR/I \mid I\text{是}R\text{的右理想}\}$$
$$= \sup\{fdR/I \mid I\text{是}R\text{的左理想}\}.$$

证　设 $\sup\{fdR/I \mid I\text{是}R\text{的右理想}\} = m$，则首先当然有

$$m \leqslant wD(R).$$

若 $m = \infty$，则$wD(R) = \infty$，从而 $wD(R) = m$.

设 $m < \infty$，则对R的任意右理想I，恒有$fdR/I \leqslant m$.

若 $m = 0$，命 B 是任意左 R-模，则因 R/I 是平坦模,从而 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, B) = 0$．故由引理 25.2 知$B$ 是平坦模．因此 $fd_R B = 0$．所以 $wD(R) = 0$．

若 $m \geqslant 1$，命B是任意左R-模,并命

$$F:\quad \cdots \to 0 \to 0 \to F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \to 0$$

是B的任意一个投射分解．再命$K_i = \ker d_i$，$i \geqslant 1$；$K_0 = \ker \varepsilon$；$K_{-1} = B$，　则　$\mathrm{Tor}_{m+1}^R(R/I, B) \cong \mathrm{Tor}_1^R(R/I, K_{m-1})$．因为 $fdR/I \leqslant m$，故$\mathrm{Tor}_{m+1}^R(R/I, B) = 0$．从而 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, K_{m-1}) = 0$.因此 K_{m-1}是平坦模．于是B有平坦分解：

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_{m-1} \hookrightarrow F_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots$$

$$\longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

故 $fd_RB \leqslant m$。因此$wD(R) \leqslant m$。所以$wD(R)=m$。

同理，$wD(R)=\sup\{fdR/I \mid I$是R的左理想$\}$。

25.8 既左且右 Noether 环的左、右大范围维数

作为本节的结束,我们来证明：既左且右 Noether 环的左、右大范围维数相等。为此，我们先证明下面两个引理。

引理25.3 设R是左 Noether 环，A是$f.g.$左R-模，则A有一个投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} p_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

其中每一个P_i都是$f.g.$模.

证 首先有一个左R-短正合列

$$0 \longrightarrow \ker\varepsilon \overset{i}{\hookrightarrow} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

其中F_0是$f.g.$自由模。

因为R是左 Noether环.故 $\ker\varepsilon$是$f.g.$模.于是有一个左R-满射ρ_1: $F_1 \to \ker\varepsilon$，其中F_1是$f.g.$自由模。命 $d_1=i\rho_1$,则易知有正合列

$$F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

如此继续下去，即得正合列

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中每一个F_i都是 $f.g.$ 自由左R-模。它当然是A的一个符合要求的投射分解。

对于右 Noether环上的$f.g.$右模自然也有同样结果。

引理25.4

(i) 若R是右Noether环，则 $wD(R)=rD(R)$;

(ii) 若R是左Noether环，则 $wD(R)=lD(R)$。

证 我们只证明(i).完全类似地可证(ii).

我们先证明

$$fd\,A_R = pd\,A_R,\quad \forall\ f.g.\ 右R\text{-}模A.$$

为此，设A是任意一个 $f.g.$ 右R-模．由于A的一个投射分解也是A的一个平坦分解，故先有

$$fd\,A_R \leqslant pd\,A_R.$$

若 $fd\,A_R = \infty$，则$pd\,A_R = \infty$，从而$fd\,A_R = pd\,A_R$.

现在设 $fd\,A_R = m < \infty$.

若 $m=0$，则A是平坦模．于是A是$f.g.$ 平坦模．因为R是右 Noether环，故由定理10.8知A是投射模．从而$pd\,A_R = 0$．因此$fd\,A_R = pd\,A_R$.

若 $m \geqslant 1$，先由引理25.3知A有一个投射分解

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中每一个P_i都是$f.g.$模．

命$K_i = \ker d_i, i \geqslant 1$; $K_0 = \ker \varepsilon$; $K_{-1} = A$，则$\mathrm{Tor}^R_{m+1}(A, B) \cong \mathrm{Tor}^R_1(K_{m-1}, B)$，$\forall B$．因为$fd\,A_R = m$，故 $\mathrm{Tor}^R_{m+1}(A,B) = 0$，$\forall B$，从而 $\mathrm{Tor}^R_1(K_{m-1}, B) = 0$，$\forall B$．因此 K_{m-1}是平坦模．但R是右 Noether环，故K_{m-1}是$f.g.$模，从而K_{m-1}是 $f.g.$ 平坦模．所以由定理10.8 知K_{m-1}是投射模．这样，A就有投射分解

$$\cdots \to 0 \to 0 \to K_{m-1} \hookrightarrow P_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

因此 $pd\,A_R \leqslant m$．故 $fd\,A_R = pd\,A_R$.

因为对于R的任意右理想I，R/I是$f.g.$右R-模，故有

$$fdR/I = pdR/I,\quad \forall\ R的右理想I.$$

于是由定理25.10及定理25.17，就有

$$wD(R) = rD(R).$$

由引理25.4立刻得到下面定理．

定理25.18　若环R既是左Noether环，又是右 Noether环，则 $lD(R) = rD(R)$.

§26 Hilbert 合冲定理

是否对于每一个非负整数 n 都存在一个交换环 R 使 $D(R) = n$？

因为域是半单环，故当R是域时就有$D(R) = 0$。

本节证明著名的 Hilbert 合冲定理。由它可以推知对于每一个正整数n，恒存在交换环R使$D(R) = n$。

26.1 R-短正合列中各项的投射维数之间的关系；直和的投射维数与直和项的投射维数之间的关系

关于 R-映射短正合列中各项的投射维数之间的关系，有下面定理。

定理26.1 设已给左R-短正合列

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$$

则当$pd_R A'$，$pd_R A$，$pd_R A''$ 中有两个为有限时，第三个也必有限，且这时有

(i) 若 $pd_R A' < pd_R A$，则 $pd_R A'' = pd_R A$；

(ii) 若 $pd_R A' > pd_R A$，则 $pd_R A'' = pd_R A' + 1$；

(iii) 若 $pd_R A' = pd_R A$，则 $pd_R A'' \leqslant pd_R A + 1$。

证 设 $pd_R A' = n'$，$pd_R A = n$，$pd_R A'' = n''$。

若n'及n都有限，我们命

$$m = \max(n', n).$$

由短正合列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 知有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A', B) \to \mathrm{Ext}_R^{m+2}(A'', B) \to \mathrm{Ext}_R^{m+2}(A, B), \quad \forall B.$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A', B) = 0$，$\mathrm{Ext}_R^{m+2}(A, B) = 0$，故 $\mathrm{Ext}_R^{m+2}(A'', B) = 0$，$\forall B$。因此$n'' \leqslant m + 1$。这就证明了$n''$有限，且

$$n''\leqslant \max(n', n)+1.$$

若 n' 及 n'' 都有限，我们命

$$m=\max(n', n''),$$

由短正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 知有正合列

$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A'',B)\to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,B)\to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(A',B)$, $\forall B$.

因为 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A'',B)=0$，$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A',B)=0$，故 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,B)=0$，$\forall B$. 因此 $n\leqslant m$. 这就证明了 n 有限，且

$$n\leqslant \max(n', n'').$$

最后，若 n 及 n'' 都有限，我们命

$$m=\max(n, n'').$$

由短正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 知有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,B)\to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(A',B)\to \mathrm{Ext}_R^{m+2}(A'',B),\ \forall B.$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,B)=0$，$\mathrm{Ext}_R^{m+2}(A'',B)=0$，故 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A',B)=0$，$\forall B$. 因此 $n'\leqslant m$. 这就证明了 n' 有限，且

$$n'\leqslant \max(n, n'').$$

现在设 n'，n 及 n'' 都有限.

(i) 设 $n'<n$.

由短正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 知有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^{n}(A',B)\to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A'',B)\to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B),\ \forall B.$$

因为 $n>n'$，故 $\mathrm{Ext}_R^{n}(A', B)=0$. 而 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0$，故 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A'',B)=0$，$\forall B$. 因此 $n''\leqslant n$.

不难看出 $n'<n''$，事实上，若 $n'\geqslant n''$，则由前面刚刚证明过的 $n\leqslant \max(n', n'')$，就有 $n\leqslant n'$，矛盾.

于是 $n\leqslant \max(n', n'')=n''$，所以 $n''=n$.

(ii) 设 $n'>n$.

首先由刚刚证明过的 $n''\leqslant \max(n, n')+1$ 知

$$n''\leqslant n'+1$$

由短正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 知有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^{n'}(A,B)\to \mathrm{Ext}_R^{n'}(A',B)\to \mathrm{Ext}_R^{n'+1}(A'',B)\to$$

$\mathrm{Ext}_R^{n'+1}(A,B)$, $\forall B$

因为 $n'>n$，故 $\mathrm{Ext}_R^{n'}(A,B)=0$，$\mathrm{Ext}_R^{n'+1}(A, B)=0$。因此

$$\mathrm{Ext}_R^{n'}(A',B)\cong\mathrm{Ext}_R^{n'+1}(A'', B).$$

若 $n''<n'+1$，则 $\mathrm{Ext}_R^{n'+1}(A'',B)=0$，从而 $\mathrm{Ext}_R^{n'}(A',B)=0$，$\forall B$。则 $n'\leqslant n'-1$。矛盾。所以 $n''=n'+1$。

(iii) 设 $n'=n$。

由刚才证明过的 $n''\leqslant\max(n, n')+1$ 知 $n''\leqslant n+1$。

对于右R-短正合列，自然有同样结果。

由这个定理立刻得到下面推论。

推论26.1 设B是左R-模A的一个子模且 pd_RA 及 pd_RB都有限，则有

(i) 若 $pd_RB<pd_RA$，则 $pd\quad A/B=pd_RA$；

(ii) 若 $pd_RB>pd_RA$，则 $pd\quad A/B=pd_RB+1$；

(iii) 若 $pd_RB=pd_RA$，则 $pd\quad A/B\leqslant pd_RA+1$。

证 取左R-短正合列

$$0\longrightarrow B\hookrightarrow A\longrightarrow A/B\longrightarrow 0$$

即得。

关于直和的投射维数与直和项的投射维数之间的关系，有下面定理。

定理26.2 设$\{A_k|k\in K\}$是一集右R-模，则

$$pd\left(\bigoplus_{k\in K}A_k\right)=\sup\{pd\,A_k|k\in K\}.$$

证 设n是非负整数。因为

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}\left(\bigoplus_{k\in K}A_k, B\right)\cong\prod_{k\in K}\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A_k,B),\ \forall B.$$

故 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}\left(\bigoplus_{k\in K}A_k,B\right)=0$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A_k,B)=0$，$\forall k\in K$。因此 $pd\left(\bigoplus_{k\in K}A_k\right)\leqslant n$ 当且仅当 $pd\,A_k\leqslant n$，

$\forall k\in K$。于是 $pd(\bigoplus_{k\in K}A_k)\leqslant n$ 当且仅当 $\sup\{pdA_k|k\in K\}\leqslant n$。所以

$$pd(\bigoplus_{k\in K}A_k)=\sup\{pdA_k|k\in K\}.$$

由这个定理可以得到下面两个推论。

推论26.1 设A,B是左R-模，则

$$pd_RA\leqslant pd(A\oplus B);\quad pd_RB\leqslant pd(A\oplus B).$$

证 因为 $pd(A\oplus B)=\max(pd_RA,pd_RB)$，故有

$$pd_RA\leqslant pd(A\oplus B);\quad pd_RB\leqslant pd(A\oplus B).$$

推论26.2 若 $lD(R)=\infty$，则必存在左R-模A 使

$$pd_RA=\infty.$$

证 由 $lD(R)=\infty$ 知对每一个正整数 n，存在一个左R-模A_n使$pd_RA_n>n$。于是命$A=\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n$时，由定理26.2知$pd_RA=\infty$。

26.2 换环定理

定理26.3（换环定理） 设R是一个环，并设 $x\in R$ 满足以下条件：

（i）$x\in$环R的中心；

（ii）$x\neq 0$；

（iii）x不是零因子；

（iv）x不是可逆元。

并命(x)是R的由x生成的理想。

若A是一个非零的左$R/(x)$-模，且 $pd_{R/(x)}A$ 有限，则

$$pd_RA=pd_{R/(x)}A+1.$$

这里当 $r\in R,a\in A$时，$ra=(r+(x))a$。

证 我们先证明

$$pd_RR/(x)=1.$$

事实上，因为x不是零因子，故$\{x\}$是左R-模(x)的一个基，从而(x)是自由左R-模。于是在左R-短正合列

$$0 \longrightarrow (x) \hookrightarrow R \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0$$

中，$pd_R(x) = pd_R R = 0$。故据定理26.1知

$$pd_R R/(x) \leqslant pd_R R + 1 = 1.$$

若$pd_R R/(x) = 0$，则$R/(x)$是投射左R-模，从而(x)是R的一个直和项 $R = (x) \oplus T$。于是$1 = rx + t$，其中$r \in R, t \in T$。因此 $x = xrx + xt$， 所以 $(1 - xr)x = xt \in (x) \cap T$。 这样，$(1 - xr)x = 0$。因为$x$不是零因子，故 $xr = 1$。这与"x不是可逆元"相矛盾。所以

$$pd_R R/(x) = 1.$$

于是当V是自由左$R/(x)$-模时，由于V是若干个左$R/(x)$-模$R/(x)$的直和，从而左R-模V是若干个左R-模$R/(x)$的直和，故由定理26.2知

$$pd_R V = 1.$$

现在我们证明$pd_{R/(x)} A = 0$时定理成立。

当$pd_{R/(x)} A = 0$时，A是投射左 $R/(x)$-模。于是 A是一个自由左 $R/(x)$-模F的一个直和项 $F = A \oplus W$。当然作为左 R-模也有 $F = A \oplus W$。故由推论26.1知$pd_R A \leqslant pd_R F = 1$。

若$pd_R A = 0$。则A是投射左R-模，故可认为左 R-模A是若干个左R-模R的直和的一个子模。又因为$A \neq 0$，故有一个

$$(\cdots, r, \cdots) \in A, \quad r \in R$$

而$r \neq 0$。因为$xA = (x + (x))A = 0$，故$x(\cdots, r, \cdots) = 0$。从而 $xr = 0$。这与"x 不是零因子"相矛盾，因此 $pd_R A = 1$。这就证明了，当$pd_{R/(x)} A = 0$时定理成立

$$pd_R A = pd_{R/(x)} A + 1.$$

我们再证明$pd_{R/(x)} A = 1$时定理成立。

首先总有一个左$R/(x)$-短正合列

$$0 \to K \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} A \to 0,$$

其中G是自由左$R/(x)$-模．按照定理中给出的由左$R/(x)$-模作成左R-模的方式，易知它也是一个左R-短正合列．

因为$pd_{R/(x)}A=1$，$pd_{R/(x)}G=0$，故$pd_{R/(x)}K$有限．又，若$pd_{R/(x)}K>pd_{R/(x)}G$，则由定理 26.1知$pd_{R/(x)}A=pd_{R/(x)}K+1\geqslant 2$，矛盾．故$pd_{R/(x)}K\leqslant pd_{R/(x)}G=0$．因此$pd_{R/(x)}K=0$，从而$pd_RK=1$．　于是$pd_RK=pd_RG=1$，　故由定理 26.1 知$pd_RA\leqslant 2$．下面要证明$pd_RA$不能小于2．

若$pd_RA<2$．我们先总可取一个左R-短正合列

$$0\longrightarrow T\overset{f}{\hookrightarrow} H\overset{g}{\longrightarrow} A\longrightarrow 0$$

其中H是自由左R-模．

因为$pd_RH=0$，$pd_RA<2$，故pd_RT有限．若$pd_RT>pd_RH$，则$pd_RA=pd_RT+1\geqslant 2$．矛盾．故$pd_RT\leqslant pd_RH=0$．因此$pd_RT=0$．所以T是投射左R-模．

因为$xA=0$，故当$h\in H$时$g(xh)=xg(h)=0$．从而$xH\subseteq\ker g=T$．于是易知有左R-短正合列：

$$0\longrightarrow T/xH\overset{f'}{\hookrightarrow} H/xH\overset{g'}{\longrightarrow} A\longrightarrow 0$$

这里$g'(h+xH)=g(h)$．

因为$(x)\subseteq a_{nn_R}H/(xH)$，$(x)\subseteq a_{nn_R}T/(xH)$，故有左$R/(x)$-模$T/xH$及$H/(xH)$，从而有左$R/(x)$-短正合列：

$$0\longrightarrow T/xH\overset{f'}{\hookrightarrow} H/xH\overset{g'}{\longrightarrow} A\longrightarrow 0\qquad（甲）$$

因为H是自由左R-模，故可设$\{h_i|i\in I\}$是H的一个基．容易验证$\{h_i+xH|i\in I\}$是左$R/(x)$-模$H/(xH)$的基．故$pd_{R/(x)}H/(xH)=0$．而$pd_{R/(x)}A=1$，故$pd_{R/(x)}T/(xH)$有限．若

$pd_{RZ(x)}T/(xH) > pd_{RZ(x)}H/(xH)$，则 $pd_{RZ(x)}A = pd_{RZ(x)}T/(xH) + 1 \geqslant 2$，矛盾. 故 $pd_{RZ(x)}T/(xH) \leqslant pd_{RZ(x)}H/(xH) = 0$.所以$T/(xH)$是投射左$R/(x)$-模.

由短正合列

及$(T/xT)/(xH/xT) \cong T/(xH)$，知有左$R/(x)$-短正合列

$$0 \to (XH)/(XT) \hookrightarrow T/(XT) \to T/(XH) \to 0$$

因为$T/(xH)$是投射左$R/(x)$-模，故此短正合列可裂. 因此$(xH)/(xT)$是左$R/(x)$-模$T/(xT)$的一个直和项.

不难证明$T/(xT)$是投射左$R/(x)$-模.事实上，因为T是投射左R-模，故存在 $\{t_j \mid j \in J\} \subseteq T$及一集左$R$-映射 $\{\varphi_j: T \to R \mid j \in J\}$满足

(i) 对每一个 $t \in T$，几乎所有$\varphi_j(t) = 0$；

(ii) 对每一个 $t \in T$，有 $t = \sum_{j \in J} \varphi_j(t) t_j$.

我们取$\{t_j + xT \mid j \in J\} \subseteq T/(xT)$，并对每一个$j \in J$，命$\psi_j$: $T/(xT) \to R/(x)$是$t + xT \longmapsto \varphi_j(t) + (x)$，则易知 ψ_j是左$R/(x)$-映射，且满足：

(i)′ 对每一个$t + xT \in T/(xT)$，几乎所有$\psi_j(t + xT) = 0$；

(ii)′ 对每一个$t + xT \in T/(xT)$，有$t + xT = \sum_{j \in J} \psi_j(t + xT)(t_j + xT)$.

因此$T/(xT)$是投射左$R/(x)$-模.

于是$(xH)/(xT)$作为投射左$R/(x)$-模 $T/(xT)$的一个直和项，是投射左$R(x)$-模.

容易知道，当命 ξ: $H \to (xH)/(xT)$是$h \mapsto xh + xT$时，ξ是左

$R/(x)$-满射，且 $\ker\xi=T$，故有

$$H/T\cong(xH)/(xT).$$

因此 H/T 是投射左 $R/(x)$-模。

但是由（甲）知

$$A\cong(H/xH)\big/(T/xH)\cong H/T$$

这导致 A 是投射左 $R/(x)$-模，从而 $pd_{R/(x)}A=0$，与原设"$pd_{R/(x)}A=1$"矛盾。因此 $pd_RA=2$，这就证明了当 $pd_{R/(x)}A=1$ 时定理成立：

$$pd_RA=pd_{R/(x)}A+1.$$

现在容易用数学归纳法完成定理的证明。

假设当 X 是非零左 $R/(x)$-模，且 $pd_{R/(x)}X=n-1$ 为有限时，有 $pd_RX=pd_{R/(x)}X+1$，其中 $n\geqslant2$。

设 $pd_{R/(x)}A=n$，首先总有一个左 $R/(x)$-短正合列：

$$0\longrightarrow K\hookrightarrow G\longrightarrow A\longrightarrow0$$

其中 G 是自由左 $R/(x)$-模。

因为 $pd_{R/(x)}A$ 及 $pd_{R/(x)}G$ 都有限，故 $pd_{R/(x)}K$ 有限。又因为 $pd_{R/(x)}G=0$，故 $pd_{R/(x)}K\geqslant pd_{R/(x)}G$。

若 $pd_{R/(x)}K=pd_{R/(x)}G$，则 $pd_{R/(x)}A\leqslant pd_{R/(x)}G+1=1$。矛盾。故 $pd_{R/(x)}K>pd_{R/(x)}G$。因此 $pd_{R/(x)}A=pd_{R/(x)}K+1$，从而 $pd_{R/(x)}K=n-1$。故据归纳假设知 $pd_RK=n>1$。

于是在左 R-短正合列 $0\longrightarrow K\hookrightarrow G\longrightarrow A\longrightarrow0$ 中，

pd_RK 及 pd_RG 都有限，且 $pd_RK>pd_RG$。故 $pd_RA=pd_RK+1=n+1=pd_{R/(x)}A+1$。

由这个定理容易得到下面两个推论。

推论26.3 设 R 及 x 如定理26.3中所说，并设 $lD(R/(x))$ 有

限，则

$$lD(R)\geqslant 1+lD\Big(R/(x)\Big).$$

证 设$lD\Big(R/(x)\Big)=n$.

若$n=0$，则因$R/(x)$是非零左$R/(x)$-模，且 $pd_{R/(x)}R/(x)=0$，故据定理26.3知$pd_R R/(x)=1$. 因此$lD(R)\geqslant 1$.

若$n>0$，则总有一个左 $R/(x)$-模A使 $pd_{R/(x)}A=n$，从而$A\neq 0$. 因此$pd_R A=n+1$. 故$lD(R)\geqslant n+1$.

推论26.4 设R是环，t是R上未定元，$tr=rt$，$\forall\ r\in R$，并设$lD(R)$有限. 则

$$lD(R[t])\geqslant 1+lD(R).$$

证 因为t属于环$R[t]$的中心，$t\neq 0$，t不是零因子，且t不是可逆元，故由推论26.3知

$$lD(R[t])\geqslant 1+lD\Big(R[t]/(t)\Big).$$

命φ: $R[t]\to R$是$f(t)\longmapsto f(0)$，则φ是环同态满射且$\ker\varphi=(t)$，故$R[t]/(t)\cong R$. 因此有

$$lD(R[t])\geqslant 1+lD(R).$$

26.3 模 $M[t]$；$pd_R M$与 $pd_{R[t]}M$之间的一种关系

前面我们已经证明了当 $lD(R)$ 有限时，$lD(R[t])\geqslant 1+lD(R)$. 本段将指出，“$lD(R)$ 有限”这个条件可以去掉，并还将证明：对于任何环R，恒有 $lD(R[t]\leqslant 1+lD(R)$. 这样，对于任何环R，就将有$lD(R[t])=1+lD(R)$. 为此，我们先引入模$M[t]$.

设R是环，t是R上未定元，$rt=tr$，$\forall\ r\in R$.

当已给左R-模M时，我们记

$$M[t]=R[t]\otimes_R M.$$

因为有$(R[t],R)$-双模$R[t]$，故 $M[t]$ 是左$R[t]$-模，又因

为R是$R[t]$的子环，故自然地$M[t]$是左R-模。

关于$M[t]$的结构，有下面两个引理。

引理26.1　$M[t]$的每一个元素有唯一表示式

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j \otimes m_j,$$

其中$m_j \in M$，且几乎所有$m_j = 0$。

证　首先$M[t]$的每一个元素可以写成$\sum_i f_i(t) \otimes m_i'$，其中$f_i(t) \in R[t]$，$m_i' \in M$。整理后易知可写成$\sum_{j=0}^{\infty} t^j \otimes m_j$，其中$m_j \in M$，且几乎所有$m_j = 0$，因为$\{1, t, t^2, \cdots\}$是右$R$-模$R[t]$的基，故$M[t]$的元素写成$\sum_{j=0}^{\infty} t^j \otimes m_j$（几乎所有$m_j = 0$）时，这种表示式唯一。

引理26.2　左R-模$M[t]$与左R-模$M^{(\aleph_0)}$同构。

证　命

$$\varphi: M[t] \longrightarrow M^{(\aleph_0)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j \otimes m_j \longmapsto (m_0, m_1, m_2, \cdots),$$

易知φ是左R-同构映射。

进一步，我们来考察左R-模M的投射性与左$R[t]$-模$M[t]$的投射性之间的关系。为此，先证明下面引理。

引理26.3　设R，S是两个环，且S是(S, R)-双模。若P是投射左R-模，则$S \otimes_R P$是投射左S-模。

证　首先P是一个自由左R-模F的一个直和项：$F = P \oplus T$。于是有$S \otimes_R F \cong S \otimes_R P \oplus S \otimes_R T$。由定理1.22知$S \otimes_R F$是自由左$S$-模。故$S \otimes_R P$是投射左$S$-模。

关于左R-模M的投射性与左$R[t]$-模$M[t]$的投射性的关系，有下面引理。

引理26.4 设已给左R-模M，则左R-模M是投射模，当且仅当左$R[t]$-模$M[t]$是投射模.

证 当左R-模M是投射模时，由于$R[t]$是$(R[t], R)$-双模，故由引理26.3知$R[t]\otimes_R M$是投射左$R[t]$-模，即左$R[t]$-模$M[t]$是投射模.

反之，设左$R[t]$-模$M[t]$是投射模，则有自由左$R[t]$-模F使

$$F = M[t]\oplus N.$$

当然作为左R-模时也有

$$F = M[t]\oplus N.$$

因为左$R[t]$-模F与若干个左$R[t]$-模$R[t]$的直和同构，故左R-模F与若干个左R-模$R[t]$的直和同构. 由于$R[t]$是自由左R-模，故F是自由左R-模，因此$M[t]$是投射左R-模. 但由引理26.2知左R-模$M[t]$与左R-模$M^{(\aleph_0)}$同构，因此$M^{(\aleph_0)}$是投射左R-模，从而M是投射左R-模.

由这个引理不难想到有下面引理.

引理26.5 设已给左R-模M，则

$$pd_R M = pd_{R[t]} M[t].$$

证 设$pd_R M \leqslant n < \infty$，则左$R$-模$M$有一个投射分解：

$$\cdots\to 0\to 0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,$$

因为$R[t]$是自由右R-模，从而是平坦右R-模，故有正合列

$$\cdots\to 0\to 0\to R[t]\otimes_R P_n\to\cdots\to R[t]\otimes_R P_0\to R[t]\otimes_R M\to 0.$$

由引理26.4知每一个$R[t]\otimes_R p_i$是投射左$R[t]$-模，因此它是左$R[t]$-模$M[t]$的一个投射分解，故

$$pd_{R[t]} M[t]\leqslant n.$$

反之，设$pd_{R[t]} M[t]\leqslant n<\infty$.

若$n=0$，则$M[t]$是投射左$R[t]$-模，故由引理26.4知M是投射左R-模. 因此$pd_R M = 0$.

若$n\geqslant 1$. 我们任取左R-模M的一个投射分解：

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0, \qquad (\text{I})$$

并命$K_i = \ker d_i$，$i \geq 1$；$K_0 = \ker \varepsilon$；$K_{-1} = M$，则有正合列

$$\to 0 \to 0 \to K_{n-1} \overset{a}{\hookrightarrow} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0 \qquad (\text{II})$$

由(Ⅰ)知左$R[t]$-模$M[t]$有投射分解：

$$\cdots \to R[t] \otimes_R P_2 \xrightarrow{1 \otimes d_2} R[t] \otimes_R P_1 \xrightarrow{1 \otimes d_1} R[t] \otimes_R P_0 \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} R[t] \otimes_R M \to 0$$

命 $H_i = \ker(1 \otimes d_i), i \geq 1$, $H_0 = \ker(1 \otimes \varepsilon), H_{-1} = R[t] \otimes_R M$，则有

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{R[t]}(M[t], B) \cong \mathrm{Ext}^1_{R[t]}(H_{n-1}, B), \quad \forall B.$$

因为$\mathrm{Ext}^{n+1}_{R[t]}(M[t], B) = 0$，故 $\mathrm{Ext}^1_{R[t]}(H_{n-1}, B) = 0$，$\forall B$。所以$H_{n-1}$是投射左$R[t]$-模。

由正合列

$$\cdots \to 0 \to 0 \to H_{n-1} \hookrightarrow R[t] \otimes_R P_{n-1} \to \cdots \to R[t] \otimes_R P_0 \to R[t] \otimes_R M \to 0$$

及正合列

$$\cdots \to 0 \to 0 \to R[t] \otimes_R K_{n-1} \to R[t] \otimes_R P_{n-1} \to \cdots \to R[t] \otimes_R P_0 \to R[t] \otimes_R M \to 0$$

立刻看出

$$R[t] \otimes_R K_{n-1} \cong H_{n-1}.$$

因此 $R[t] \otimes_R K_{n-1}$是投射左 $R[t]$-模。于是由引理 26.4 知K_{n-1}是投射左R-模。故(Ⅱ)是左R-模M的一个投射分解。所以$pd_R M \leq n$。

这就证明了$pd_R M = pd_{R[t]} M[t]$。

由这个引理可以得到下面两个推论。

推论26.5 若$lD(R)=\infty$，则$lD(R[t])=\infty$。

证 由推论26.2知存在左R-模M使$pd_RM=\infty$。于是由引理26.5知$pd_{R[t]}M[t]=\infty$。故$lD(R[t])=\infty$。

推论26.6 $lD(R[t])\geqslant 1+lD(R)$。

证 当$lD(R)<\infty$时，由推论26.4知$lD(R[t])\geqslant 1+lD(R)$。当 $lD(R)=\infty$时， 由推论 26.5 知 $lD(R[t])=\infty$， 故也有$lD(R[t])\geqslant 1+lD(R)$。

当已给左$R[t]$-模M 时，自然地有左 R-模M.现在我们给出pd_RM与$pd_{R[t]}M$之间的一种关系，即有下面定理。

定理26.4 设已给左$R[t]$-模M，则

$$pd_{R[t]}M\leqslant pd_RM+1.$$

证 若$pd_RM=\infty$，则上述不等式当然成立。

现在设$pd_RM=n<\infty$。命

$$\varphi:\ M[t]\longrightarrow M$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}t^j\otimes m_j\longmapsto\sum_{j=0}^{\infty}t^jm_j,$$

则易知φ是左$R[t]$-满射。故命$K=\ker\varphi$时，有

$$M[t]/K\cong M.$$

再命

$$\psi:\ M[t]\longrightarrow K$$

$$\sum_{j=0}^{l}t^j\otimes m_j\longmapsto 1\otimes tm_0+\sum_{j=1}^{l}t^j\otimes(tm_j-m_{j-1})-t^{l+1}\otimes m_l,$$

则容易验证ψ是左$R[t]$-同构映射。

于是在左$R[t]$-短正合列

$$0\longrightarrow K\hookrightarrow M[t]\longrightarrow M[t]/K\longrightarrow 0$$

中有 $pd_{R[t]}K=pd_{R[t]}M[t]=pd_RM=n<\infty$，故 $pd_{R[t]}\ M[t]/K$

$\leqslant pd_{R[t]}M[t]+1=pd_RM+1$. 因此有

$$pd_{R[t]}M\leqslant pd_RM+1.$$

由这个定理容易想到有下面推论。

推论26.7 $lD(R[t])=1+lD(R)$.

证 由推论26.6知$lD(R[t])\geqslant 1+lD(R)$. 因此只要再证明$lD(R[t])\leqslant 1+lD(R)$.

若$lD(R[t])=n<\infty$, 则总有一个左 $R[t]$-模M使$pd_{R[t]}M=n$. 于是由定理26.4知$pd_RM\geqslant pd_{R[t]}M-1=n-1$. 故$lD(R)\geqslant n-1$. 从而$lD(R[t])\leqslant 1+lD(R)$.

若$lD(R[t])=\infty$, 则对任给的正整数n, 总有一个左$R[t]$-模M使$pd_{R[t]}M>n+1$. 于是由定理26.4知 $pd_RM\geqslant n$. 故$lD(R)=\infty$. 从而也有$lD(R[t])\leqslant 1+lD(R)$.

26.4 Hilbert 合冲定理及其推论

定理26.5 (Hilbert 合冲定理) 设环$R\neq 0$, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是R上无关未定元, $rx_i=x_ir$, $\forall r\in R$; $x_ix_j=x_jx_i$. 则

$$lD(R[x_1,\cdots,x_n])=n+lD(R).$$

证 由推论26.7知

$$lD(R[x_1])=1+lD(R).$$

假设 $lD(R[x_1,\cdots,x_{n-1}])=n-1+lD(R)$, 则

$lD(R[x_1,\cdots,x_n])=1+lD(R[x_1,\cdots,x_{n-1}])=n+lD(R)$.

推论26.8 设K是域, $x_1,x_2,\cdots,x_n$是K上无关未定元, $kx_i=x_ik$, $\forall k\in K$; $x_ix_j=x_jx_i$, 则

$$D(K[x_1,\cdots,x_n])=n.$$

证 因为$D(k)=0$, 故由定理26.5知

$$D(K[x_1,\cdots,x_n])=n.$$

习 题 八

（1）确定$id_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$及$pd_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$.

（2）确定$pd_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$及$id_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$.

（3）确定$D(\mathbf{Z})$.

（4）设I是环R的一个左理想．证明：或者R/I是投射左R-模，或者$pd({}_{R}R/I)=pd_{R}I+1$.

（5）设$pd_{R}M=n<\infty$．证明：存在一个自由左R-模F使$\mathrm{Ext}_{R}^{n}(M,\ F)\neq 0$.

（6）证明：$wD(R)\leqslant 1$，当且仅当R的每一个右理想是平坦右R-模.

（7）证明：左遗传环上平坦模的子模是平坦模.

（8）设$0\to A'\to A\to A''\to 0$是左R-短正合列，且A是投射左R-模．证明：或者A', A, A''都是投射左R-模，或者$pd_{R}A''=pd_{R}A'+1$.

第九章　群的同调及上同调

在本章中我们要将函子Tor及 Ext 的理论应用于系数环是整群环$\mathbf{Z}G$的 情形，从而导出群G的同调群及上同调群的定义。群G的同调群及上同调群的概念来源于群和拓扑．本章仅作纯代数的讨论，并且只限于讨论低维的同调群及上同调群．本书并非群的同调及上同调的专著，本章的目的主要在于说明 函 子 Tor 及Ext是研究群的有用工具。

§27　准备知识

27.1　整群环 $\mathbf{Z}G$ 上的模

设G是乘法群，则群代数$\mathbf{Z}G$叫做整群环。

仅将$\mathbf{Z}G$当作环，就可以考虑左$\mathbf{Z}G$-模及右$\mathbf{Z}G$-模。

若A是左$\mathbf{Z}G$-模，则对$x\in G$及$a\in A$，自然有唯一确定的$xa\in A$满足：

$$\begin{aligned} x(a+b)&=xa+xb;\\ (xy)a&=x(ya);\\ 1a&=a. \end{aligned}\qquad(甲)$$

反之，当A是加法Abel群时，若对$x\in G$及$a\in A$，已定义了唯一的$xa\in A$，且满足（甲），则定义

$$\left(\sum_{x\in G}m_x x\right)a=\sum_{x\in G}m_x(xa)$$

时，易知A成为左$\mathbf{Z}G$-模。

由此立刻看出，若 A 是左$\mathbf{Z}G$-模，命 φ：$G\longrightarrow \mathrm{End}A$ 是 $x\longmapsto\varphi(x)$，其中$\varphi(x)(a)=xa$，$\forall\, a\in A$，则有

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y),$$
$$\varphi(1)=1_A. \qquad (乙)$$

反之，若A是加法Abel群，φ：$G\longrightarrow\mathrm{End}A$满足(乙)，则当定义$xa=\varphi(x)(a)$，并定义 $\left(\sum_{x\in G}m_x x\right)a=\sum_{x\in G}m_x(xa)$时，$A$成为左$\mathbf{Z}G$-模。

特别，若A是加法Abel群，φ是G到 $\mathrm{Aut}A$ 的一个群同态映射，则当定义$xa=\varphi(x)(a)$，并定义 $\left(\sum_{x\in G}m_x x\right)a=\sum_{x\in G}m_x(xa)$时，$A$成为左$\mathbf{Z}G$-模。

设A是左$\mathbf{Z}G$-模。若满足

$$xa=a,\quad \forall\, x\in G,\ a\in A,$$

则称A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模。

可知，当A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，有

$$\left(\sum_{x\in G}m_x x\right)a=\sum_{x\in G}m_x a$$

每一个加法 Abel 群A都可以成为平凡左$\mathbf{Z}G$-模，这是因为只要定义 $xa=a$，$\forall\, x\in G$，$a\in A$，然后再定义 $\left(\sum_{x\in G}m_x x\right)a=\sum_{x\in G}m_x(xa)$即可。

27.2 环$\mathbf{Z}G$的增长理想I_G

定义27.1 命

$$\varepsilon:\ \mathbf{Z}G\longrightarrow\mathbf{Z}$$

$$\sum_{x\in G}m_x x\longmapsto\sum_{x\in G}m_x$$

则易知ε是环同态满射．$\ker\varepsilon$ 叫做环$\mathbf{Z}G$的增长理想，记作 I_G。

环$\mathbf{Z}G$的增长理想I_G在以后的讨论中起着重要的作用．

关于I_G，我们给出下面三个定理。

定理27.1 I_G是自由Abel群（即自由$\mathbf{Z}$-模），有基

$$G-1=\{x-1 \mid x\in G,\ x\neq 1\},$$

其中 1 是群G的单位元。

证 当$x-1\in G-1$时，$\varepsilon(x-1)=0$。故先有$G-1\subseteq I_G$。

若 $\sum_{x\in G} m_x x\in I_G$，则 $\sum_{x\in G} m_x=0$。从而 $\sum_{x\in G} m_x x=\sum_{x\in G} m_x x-\left(\sum_{x\in G} m_x\right)1=\sum_{\substack{x\in G\\ x\neq 1}} m_x(x-1)$．故$G-1$是加法Abel群$I_G$的一个生成系。

最后，若 $\sum_{\substack{x\in G\\ x\neq 1}} m_x(x-1)=0$，则 $\sum_{\substack{x\in G\\ x\neq 1}} m_x x-\left(\sum_{\substack{x\in G\\ x\neq 1}} m_x\right)1=0$.

因为 G 是加法 Abel 群 $\mathbf{Z}G$的基，故 $m_x=0$，$\forall\, 1\neq x\in G$，因此 $G-1$ 是加法 Abel 群 I_G 的基。从而 I_G 是自由 Abel 群。

定理27.2 若$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则有左$\mathbf{Z}G$-短正合列：

$$0\longrightarrow I_G \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathbf{Z}G \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

这里 $\varepsilon\left(\sum_{x\in G} m_x x\right)=\sum_{x\in G} m_x$.

证 因为 I_G 是环$\mathbf{Z}G$的理想，故首先I_G是左$\mathbf{Z}G$-模．又易知 ε 是左$\mathbf{Z}G$-映射，因此定理成立。

对于平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$，当然有同样结果。

定理27.3 设$\mathbf{Z}$是平凡右$\mathbf{Z}G$-模，则对任何左$\mathbf{Z}G$-模A，有：

$$\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A\cong A/(I_G A).$$

证 由定理 27.2 知有右$\mathbf{Z}G$-短正合列：

$$0\longrightarrow I_G\overset{\alpha}{\hookrightarrow}\mathbf{Z}G\overset{\varepsilon}{\longrightarrow}\mathbf{Z}\longrightarrow 0$$

因为$\otimes_{\mathbf{Z}G}A$右正合，故有正合列

$$I_G\otimes_{\mathbf{Z}G}A\xrightarrow{\alpha\otimes 1}\mathbf{Z}G\otimes_{\mathbf{Z}G}A\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1}\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A\to 0$$

从而有

$$(\mathbf{Z}G\otimes_{\mathbf{Z}G}A)/\mathrm{im}(\alpha\otimes 1)\cong\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A$$

因为存在左$\mathbf{Z}G$-同构映射

$$\tau:\ \mathbf{Z}G\otimes_{\mathbf{Z}G}A\longrightarrow A$$

满足 $(\sum_{x\in G}m_x x)\otimes a\longmapsto(\sum_{x\in G}m_x x)a$，故有左$\mathbf{Z}G$-满射

$$\mathbf{Z}G\otimes_{\mathbf{Z}G}A\overset{\rho\tau}{\twoheadrightarrow}A/(I_GA)$$

其中ρ：$A\longrightarrow A/(I_GA)$ 是自然同态映射。

容易验证 $\mathrm{im}(\alpha\otimes 1)=\ker\rho\tau$。故 $(\mathbf{Z}G\otimes_{\mathbf{Z}G}A)/\mathrm{im}(\alpha\otimes 1)\cong A/(I_GA)$。因此$\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A\cong A/(I_GA)$。

27.3 左ZG-模A的不动点子模A^G

定义27.2 设已给左$\mathbf{Z}G$-模A。命

$$A^G=\{a\in A\mid xa=a,\quad\forall x\in G\}$$

则易知A^G是A的子模。A^G叫做左$\mathbf{Z}G$-模A的不动点子模。

易知A^G是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，且A^G是A的具有平凡模结构的最大子模，即若T是A的子模，且T是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则$T\subseteq A^G$。

当A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，当然有$A^G=A$。

关于A^G的结构，有下面定理。

定理27.4 设$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则对任何左$\mathbf{Z}G$-模A，有

$$A^G\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},\ A).$$

证　命

$$t: \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, A) \longrightarrow A^G$$
$$f \longmapsto f(1)$$

容易验证 t 是同构映射。

27.4　左ZG-模A的具有平凡模结构的极大商模 A_G

设已给左$\mathbf{Z}G$-模A。命S是由一切元素

$$xa - a \qquad (x \in G, \ a \in A)$$

生成的A的子模。然后命

$$A_G = A/S$$

易知A_G是平凡左 $\mathbf{Z}G$-模，且当A/T是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，必定$T \supseteq S$。

容易看出，当A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，$A_G \cong A$。

定义27.3　A_G 叫做左 $\mathbf{Z}G$-模A 的具有平凡模结构的极大商模。

关于A_G的结构，有下面定理。

定理27.5　设$\mathbf{Z}$是平凡右$\mathbf{Z}G$-模，则对任何左$\mathbf{Z}G$-模A，有

$$A_G = A/(I_G A) \cong \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} A.$$

证　不难证明$S = I_G A$。事实上，当$x \in G$，$a \in A$时，$xa - a = (x-1)a$，而 $x - 1 \in I_G$，故$xa - a \in I_G A$.从而 $S \subseteq I_G A$。反之，若　$z = \sum_{x \in G} m_x x \in I_G$，$a \in A$，　则因　$\sum_{x \in G} m_x = 0$，就有

$$za = \sum_{x \in G} m_x (xa - a) \in S, \text{　故} I_G A \subseteq S\text{。因此 } S = I_G A\text{。}$$

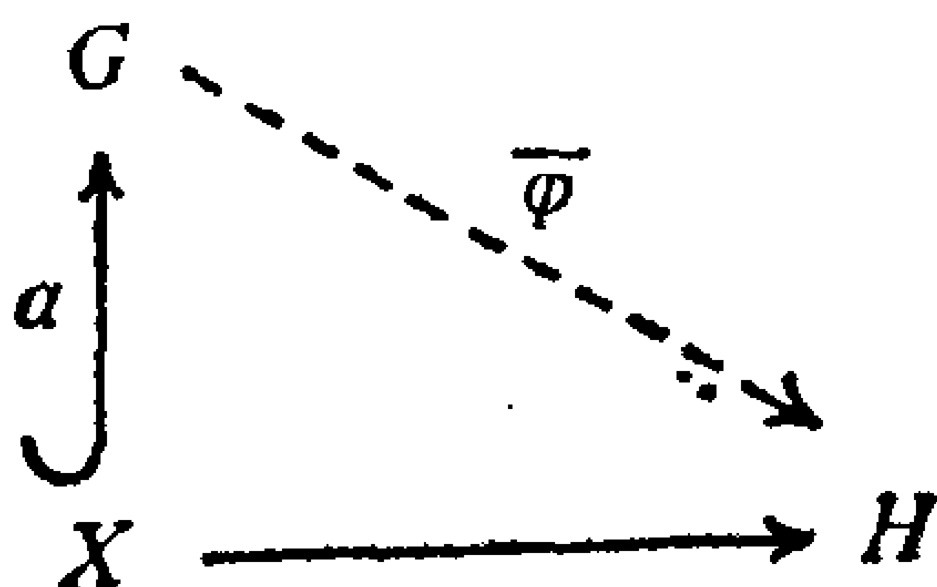
于是 $A_G = A/I_G A$。又因为$\mathbf{Z}$是平凡右 $\mathbf{Z}G$-模，故由定理27.3知$A_G \cong \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} A$。

〔附〕　由自群

这里只给出为进一步讨论所必需的有关自由群的知识，对于

所给出的结论也不予证明．可参阅群论专著．

设G是一个群（未必是Abel群），X是G的一个非空子集．若对任意群H及任何映射φ：$X\to H$，恒可唯一地补成交换图：



其中补出的$\bar{\varphi}$是群同态映射．则称X是群G的一个基．

有基的群叫自由群．

易知，a生成的无限循环群$G=(a)$是有基$X=\{a\}$的自由群．

以任意非空集X为基的自由群是存在的．

当G是有基$X=\{x_\alpha|\alpha\in K\}$的自由群时，$G$的每一个$\neq 1$的元$g$有唯一表示式

$$g=x_{\alpha_1}^{e_1}\cdots x_{\alpha_n}^{e_n},$$

其中　$e_i=\pm 1$，$x_{\alpha_{i+1}}^{e_{i+1}}\neq x_{\alpha_i}^{-e_i}$．

设G是有基X的自由群，则有：

(i) 若$|X|=1$，则G是无限循环群，从而G是Abel群；

(ii) 若$|X|>1$，则G不是Abel群．

Nielson-Schreier 定理：自由群的子群是自由群．

27.5 G是自由群时左ZG-模I_G的自由性

我们来证明，当G是自由群时，左ZG-模I_G是自由模．为此，先引入下面定义．

定义27.4 设G是群，并设已给左ZG-模A．若映射

$$f: G\longrightarrow A$$

满足

$$f(xy)=xf(y)+f(x), \quad \forall x, y\in G,$$

则称f是G到A的一个导子．G到A的所有导子作成的集记作$\mathrm{Der}(G,A)$．

对于 $f, g\in \mathrm{Der}(G,A)$，定义$f+g$是

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad \forall x\in G,$$

则易知$\mathrm{Der}(G,A)$成为加法 Abel 群，它的零元 0 是 $0(x)=0$，$\forall x\in G$；f的负元$-f$是$(-f)(x)=-f(x)$，$\forall x\in G$．

命$\mathrm{Hom}(G,A)$是G到A的所有群同态映射所作成的集．若A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则易知有

$$\mathrm{Der}(G,A)=\mathrm{Hom}(G,A).$$

对于任意的左$\mathbf{Z}G$-模 A，关于 $\mathrm{Der}(G,A)$，有下面定理．

定理27.6 设G是群，则对任意左$\mathbf{Z}G$-模A，有

$$\mathrm{Der}(G,A)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(I_G,A).$$

证 命

$$t:\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(I_G,A)\longrightarrow \mathrm{Der}(G,A)$$

$$f\longmapsto \bar f$$

其中 $\bar f$：$G\longleftarrow A$是$x\longmapsto f(x-1)$．

因为当$f\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(I_G,A)$时，对于$x,y\in G$，有

$\bar f(xy)=f(xy-1)=f(xy-x)+f(x-1)=xf(y-1)+f(x-1)=x\bar f(y)+\bar f(x)$，故$\bar f\in \mathrm{Der}(G,A)$．因此$t$是映射．又，容易验证$t$是群同态映射．

为证t是双射，命

$$s:\ \mathrm{Der}(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(I_G,A)$$

$$g\longmapsto g'$$

其中 g'：$I_G\longrightarrow A$ 是左$\mathbf{Z}G$-映射且满足 $g'(x-1)=g(x)$，$\forall x\in G$．

不难证明s是映射．事实上，由定理27.1知I_G是有基$G-1=$

$\{x-1 \mid x\in G,\ x\neq 1\}$ 的自由 Abel 群（即自由**Z**-模），故当 $g\in \mathrm{Der}(G,A)$ 时可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} I_G & \overset{g'}{\dashrightarrow} & \\ \uparrow \alpha & & \searrow \\ G-1 & \xrightarrow{\ \xi\ } & A \end{array}$$

其中 $\xi(x-1)=g(x)$，$\forall\, x\in G$，$x\neq 1$；其中补出的 g' 是 **Z**-映射。于是 g' 满足 $g'(x-1)=g(x)$，$\forall\, x\in G, x\neq 1$。但 $g'(1-1)=0$，$g(1)=g(1,\ 1)=g(1)+g(1)$，从而 $g(1)=0$，故 g' 满足 $g'(x-1)=g(x)$，$\forall\, x\in G$。又易知 g' 由 g 唯一确定，且 g' 是左 **Z**G-映射。因此 s 是映射。

容易验证 $st=1$，$ts=1$。故 t 是群同构映射。

定理27.7 设 G 是有基 $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in K\}$ 的自由群，则 I_G 是有基

$$X-1=\{x-1 \mid x\in X\}$$

的自由左**Z**G-模。

证 因为 X 是 G 的基，故首先知道 $1\notin X$。因此 $X-1\subseteq G-1$。而由定理27.1知 I_G 是有基 $G-1=\{x-1 \mid x\in G,\ x\neq 1\}$ 的自由**Z**-模，所以 $X-1\subseteq I_G$。

现在命 $[X-1]$ 及 $[G-1]$ 是左**Z**G-模 I_G 的分别由 $X-1$ 及 $G-1$ 生成的子模。我们来证明 $[G-1]\subseteq[X-1]$。

为此，设 $g\in G$，且 $g\neq 1$。则 g 有唯一表示式：

$$g=x_{\alpha_1}^{e_1}\cdots x_{\alpha_n}^{e_n},$$

其中 $e_i=\pm 1$，$x_{\alpha_{i+1}}^{e_{i+1}}\neq x_{\alpha_i}^{-e_i}$。

当 $n=1$ 时，$g=x_{\alpha_1}^{e_1}$。

若 $e_1=1$，则 $g-1=x_{\alpha_1}-1\in[X-1]$；若 $e_1=-1$，则 $g-1=-x_{\alpha_1}^{-1}(x_{\alpha_1}-1)\in[X-1]$。

假设当 $n=k$ 时 $g-1\in[X-1]$，则当 $n=k+1$ 时，$g-1=x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}x_{\alpha_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}}-1=(x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}-1)+x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}(x_{\alpha_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}}-1)\in[X-1]$。

因此 $[G-1]\subseteq[X-1]$。

但当 $z\in I_G$时，

$$z=\sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}m_g(g-1)=\sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}}(m_g1)(g-1)\in[G-1]$$

故$[G-1]=I_G$，从而$I_G=[X-1]$。因此$X-1$是 左$\mathbf{Z}G$-模I_G的一个生成系。

最后，我们证明 $X-1$ 是左$\mathbf{Z}G$-模 I_G 的一个基。

为此，我们考虑图：

$$\begin{array}{ccc} I_G & & \\ \beta\uparrow & & \\ X-1 & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

其中A是任意 左$\mathbf{Z}G$-模，φ 是任意映射。

命　$E=\{(a,g)\mid a\in A, g\in G\}$，并定义

$$(a,g)+(a',g')=(a+ga',\ gg')$$

则易知E对如此定义的加法成为群（但未必是 Abel 群），且E 的加法单位元是 $(0,1)$； (a,g) 的加法逆元 $-(a,g)=(-g^{-1}a,g^{-1})$。

因为$X=\{x_\alpha\mid \alpha\in K\}$ 是自 由 群 G的 基，故命λ：$X\longrightarrow E$ 是$x_\alpha\longmapsto(\varphi(x_\alpha-1),x_\alpha)$时，可以唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\bar{\lambda}}{\dashrightarrow} & \\ \delta\uparrow & & \searrow \\ X & \xrightarrow{\lambda} & E \end{array}$$

其中补出的 $\overline{\lambda}$ 是群同态映射.

不难证明，对于每一个$g\in G$，有唯一确定的$a\in A$满足

$$\overline{\lambda}(g)=(a,g).$$

事实上，命 π: $E\longrightarrow G$是$(a,g)\longmapsto g$，则易知 π 是群同态满射. 当$x_\alpha\in X$ 时，$\pi\overline{\lambda}(x_\alpha)=\pi\lambda(x_\alpha)=\pi(\varphi(x_\alpha-1),x_\alpha)=x_\alpha$，故 $\pi\overline{\lambda}(g)=g$，$\forall g\in G$. 现在设 $\overline{\lambda}(g)=(a,h)$. 因为$\pi\overline{\lambda}(g)=g$，且 $\pi\overline{\lambda}(g)=\pi(a,h)=h$，故 $h=g$. 从而$\overline{\lambda}(g)=(a,g)$.

因此命

$$D: G\longrightarrow A$$
$$g\longmapsto a$$

其中 $a\in A$ 满足$\overline{\lambda}(g)=(a,g)$ ，则 D是映射，且容易验证 $D\in \mathrm{Der}(G,A)$.

利用定理27.6的证明中建立的同构映射 t: $\mathrm{Hom}_{ZG}(I_G,A)\longrightarrow \mathrm{Der}(G,A)$知有 $\psi\in\mathrm{Hom}_{ZG}(I_G,A)$使 $t(\psi)=D$. 又因为对于 $g\in G$，有 $t(\psi)(g)=\psi(g-1)$，故

$$D(g)=\psi(g-1),\ \forall g\in G.$$

于是立刻看出下图交换:

$$\begin{array}{ccc} I_G & & \\ \beta\uparrow & \searrow\psi & \\ X-1 & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

因为已经证明了 $X-1$ 是左ZG-模 I_G 的生成系，故易知当 $\psi'\in\mathrm{Hom}_{ZG}(I_G,A)$ 使下图交换

$$\begin{array}{ccc} I_G & & \\ \beta\uparrow & \searrow\psi' & \\ X-1 & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

时，必定有$\psi'=\psi$。

到此，我们证明了左 $\mathbf{Z}G$-模I_G是有基$X-1$的自由模。

§28　同　调　群

28.1　群G的同调群的概念

定义28.1　设G是群，$\mathbf{Z}$是平凡右$\mathbf{Z}G$-模。若 A 是左$\mathbf{Z}G$-模，则 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},A)$ 叫做群G的系数在A中的第 n 同调群，记作$H_n(G,A)$。

根据函子Tor的性质立刻知道，对于任何群G，当$n<0$时，恒有

$$H_n(G,A)=0,\quad \forall\ \text{左}\mathbf{Z}G\text{-模}A.$$

因此只要计算$H_0(G,A)$，$H_1(G,A)$，$H_2(G,A)$，…。

关于$H_0(G,A)$，有下面定理。

定理28.1　设G是群，$\mathbf{Z}$是平凡右$\mathbf{Z}G$-模，则有

(i) 对于任何左$\mathbf{Z}G$-模A，有

$$H_0(G,A)\cong\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A\cong A/(I_GA)=A_G;$$

(ii) 若A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则

$$H_0(G,A)\cong A.$$

证　(i) 因为$H_0(G,A)=\mathrm{Tor}_0^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},A)$，而 $\mathrm{Tor}_0^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},A)\cong\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A$，故由定理27.5知

$$H_0(G,A)\cong\mathbf{Z}\otimes_{\mathbf{Z}G}A\cong A/(I_GA)=A_G.$$

(ii) 因为当A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时$A_G\cong A$，故有：

$$H_0(G,A)\cong A.$$

对于 H_1，这里只考虑 $H_1(G,\mathbf{Z})$，且其中$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模。有下面定理。

定理28.2　若$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则

$$H_1(G,\mathbf{Z})\cong I_G/I_G^2$$

证 首先由定理27.2知有左$\mathbf{Z}G$-短正合列

$$0 \longrightarrow I_G \overset{d_1}{\hookrightarrow} \mathbf{Z}G \overset{\varepsilon}{\longrightarrow} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

于是有正合列:

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Tor}_0^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, I_G) \to$$
$$\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \to \mathrm{Tor}_0^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \to 0$$

因为 $\mathbf{Z}G$是自由左$\mathbf{Z}G$-模，故 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) = 0$. 而 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, A) = H_n(G, A)$，故上面的正合列就是正合列:

$$0 \to H_1(G, \mathbf{Z}) \to H_0(G, I_G) \overset{\xi}{\longrightarrow} H_0(G, \mathbf{Z}G) \overset{\eta}{\longrightarrow}$$
$$H_0(G, \mathbf{Z}) \to 0.$$

我们知道 $H_0(G, \mathbf{Z}G) \cong \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}$，而 $\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，故由定理28.1知$H_0(G, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. 这样，上面的正合列中的$\eta$是加法Abel群$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的同态映射．因为加法Abel群$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的同态映射必定或是0或是单射，故$\eta$或是单射或是0．但$\eta$是满射，故$\eta \neq 0$．从而$\eta$是单射．于是由$\mathrm{im}\xi = \ker\eta$知$\xi = 0$．因此$H_1(G, \mathbf{Z}) \cong H_0(G, I_G)$. 从而由定理28.1知

$$H_1(G, \mathbf{Z}) \cong I_G/I_G^2$$

进一步，还可以直接用G来表达$H_1(G, \mathbf{Z})$. 为此，先证明下面引理。

引理28.1 设G'是群G的换位子群，则

$$I_G/I_G^2 \cong G/G'$$

这里I_G及I_G/I_G^2都是作为加法Abel群的。

证 命

$$\theta: \ G \longrightarrow I_G/I_G^2$$
$$x \longmapsto x - 1 + I_G^2$$

则θ是映射。

因为$\theta(xy) = xy - 1 + I_G^2$, $\theta(x) + \theta(y) = x - 1 + y - 1 + I_G^2$, 而 $xy - 1 - (x - 1 + y - 1) = (x-1)(y-1) \in I_G^2$, 故 $\theta(xy) = \theta(x) + \theta(y)$. 因此$\theta$是群同态映射。

当 $x^{-1}y^{-1}xy \in G'$ 时，$\theta(x^{-1}y^{-1}xy) = \theta(x^{-1}) + \theta(y^{-1}) + \theta(x) + \theta(y) = \theta(x^{-1}) + \theta(x) + \theta(y^{-1}) + \theta(y) = \theta(x^{-1}xy^{-1}y) = \theta(1) = 0$。故 $G' \subseteq \ker\theta$。因此有群同态映射

$$\bar{\theta}: \quad G/G' \longrightarrow I_G/I_G^2$$
$$xG' \longmapsto x-1+I_G^2$$

因为加法Abel群 I_G 是有基 $\{x-1 \mid x\in G,\ x\neq 1\}$ 的自由Abel群（即自由**Z**-模），而 G/G' 是Abel群（即**Z**-模），故存在群同态映射

$$\varphi: \quad I_G \longrightarrow G/G'$$

满足 $\varphi(x-1) = xG'$，$\forall x\in G, x\neq 1$。

不难证明 $I_G^2 \subseteq \ker\varphi$。事实上，对于 $x, y\in G$，$\varphi((x-1)(y-1)) = \varphi(xy-1-(x-1)-(y-1)) = \varphi(xy-)\varphi(x-1)^{-}\varphi(y-1)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}G' = G'$，故 $(x-1)(y-1)\in\ker\varphi$，从而 $I_G^2 \subseteq \ker\varphi$。

因此有群同态映射

$$\psi: \quad I_G/I_G^2 \longrightarrow G/G'$$

满足 $\psi(x-1+I_G^2) = xG'$，$\forall x\in G$。

明显看出，$\psi\bar{\theta} = 1$，$\bar{\theta}\psi = 1$。故 $\bar{\theta}$ 是群同构映射，因此有 $I_G/I_G^2 \cong G/G'$。

于是立刻得到下面定理。

定理28.3　设**Z**是平凡左**Z**G-模，则

$$H_1(G, \mathbf{Z}) \cong G/G'.$$

当 G 是自由群时，关于 $H_n(G, A)$ 有下面定理。

定理28.4　设 G 是自由群，则当 $n>1$ 时，有：

$$H_n(G, A) = 0, \quad \forall \text{左}\mathbf{Z}G\text{-模}A.$$

证　对于平凡右**Z**G-模**Z**，由定理 27.2（对于右**Z**G-模的情形）知有右**Z**G-短正合列

$$0 \longrightarrow I_G \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

因为G是自由群，故由定理 27.7（对于右 $\mathbf{Z}G$- 模的情形）知I_G是自由右$\mathbf{Z}G$-模，因此这个短正合列成为平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个投射分解。故对任何左$\mathbf{Z}G$-模A，当 $n>1$ 时，有

$$H_n(G, A) = \mathrm{Tor}_n^{*G}(\mathbf{Z}, A) = \mathrm{Tor}_n^{*G}(-, A)(\mathbf{Z}) = 0.$$

本章对于群G的同调群仅再讨论$H_2(G, \mathbf{Z})$，其中右边的$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模。我们将对之导出著名的Hopf 公式。

下面我们计算$H_2(G, A)$ 时是用$H_2(G, A) = \mathrm{Tor}_2^{*G}(-, A)(\mathbf{Z})$. 因此关键是要选取平凡右 $\mathbf{Z}G$- 模$\mathbf{Z}$的一个适当的投射分解。我们要选取的是平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的 Gruenberg 分解。

28.2 平凡右 ZG-模 Z 的 Gruenberg 分解

因为对于任何非空集X，恒存在以X为基的自由群，由此可知任何群都是一个自由群的一个同态象。

定义28.2 设已给群同态满射

$$\pi: F \twoheadrightarrow G,$$

其中F是自由群。

命

$$\bar{\pi}: \mathbf{Z}F \longrightarrow \mathbf{Z}G$$

$$\sum_{x \in F} m_x x \longmapsto \sum_{x \in F} m_x \pi(x)$$

则易知$\bar{\pi}$是环同态满射。

$\ker \bar{\pi}$ 叫做环$\mathbf{Z}F$的相对增长理想，记作$\bar{I}_F$。

容易知道有

$$\bar{\pi}(x) = \pi(x), \quad \forall x \in F.$$

记 $R = \ker \pi$，则由 Nielson-Schreier 定理知R是自由群。又，明显知道

$$\bar{\pi}(r) = 1, \quad \forall r \in R.$$

当 $G=\{1\}$ 时，可视 $\mathbf{Z}G=\mathbf{Z}$，从而可视 $\bar{\pi}=\varepsilon$，这里 ε：$\mathbf{Z}F\longrightarrow\mathbf{Z}$ 是 $\sum_{x\in F}m_x x\longmapsto\sum_{x\in F}m_x$。这时 $\bar{I}_F$ 就是环 $\mathbf{Z}F$ 的增长理想 I_F。

在本节此后的论述中，若无特殊声明，F,G,R,π 及 $\bar{\pi}$ 的意义如上，且 X,Y 分别表示 F 及 R 的基。

为了得到平凡右 $\mathbf{Z}G$-模 $\mathbf{Z}$ 的 Gruenberg 分解，我们将整群环 $\mathbf{Z}F,\mathbf{Z}G,\mathbf{Z}R$ 分别当作有基 F,G,R 的自由右 $\mathbf{Z}$-模，并先证明下面引理。

引理28.2　(i) 若 $\{t_j\in F\mid j\in J\}$ 使 $\{Rt_j\mid j\in J\}$ 是 R 在 F 中的全部互异右陪集，则 $\{\pi(t_j)\mid j\in J\}$ 是 G 的互异元。从而若

$$\sum_{j\in J}\pi(t_j)m_j=0,$$

其中 $m_j\in\mathbf{Z}$，$\forall j\in J$，且几乎所有 $m_j=0$，则

$$m_j=0,\quad\forall j\in J;$$

(ii) 若 $rt_i=st_j$，其中 r，$s\in R$，则必 $i=j$，$r=s$；

(iii) 若 $\sum_{i=1}^{m}\gamma_i t_{j_i}=0$，其中 $t_{j_1},\cdots,t_{j_m}$ 互异，$\gamma_1,\cdots,\gamma_m\in\mathbf{Z}R$，则 $\gamma_i=0$，$i=1,\cdots,m$。

证　(i) 若 $\pi(t_i)=\pi(t_j)$，则 $\pi(t_it_j^{-1})=1$，从而 $t_it_j^{-1}\in\ker\pi=R$。因此 $Rt_i=Rt_j$，故 $i=j$。所以 $\{\pi(t_j)\mid j\in J\}$ 是 G 的互异元。

(ii) 若 $rt_i=st_j$，其中 $r,s\in R$。则 $t_it_j^{-1}=r^{-1}s\in R$。故 $Rt_i=Rt_j$。因此 $i=j$。从而又有 $r=s$。

(iii) 设 $\gamma_i=\sum_{l=1}^{s}r_lk_{il}$，其中 $r_1,\cdots,r_s\in R$ 且互异，$k_{il}\in\mathbf{Z}$。则由 $\sum_{i=1}^{m}\gamma_it_{j_i}=0$，有 $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{s}r_lk_{il}\right)t_{j_i}=0$。从而

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{s}(r_l t_{j_i})k_{il}=0.$$

由（ii）知 $\{r_l t_{j_i} \mid l=1,\cdots,s; i=1,\cdots,m\}$ 是F的互异元，故 $k_{il}=0$，$i=1,\cdots,m$；$l=1,\cdots,s$. 因此有

$$\gamma_i=0, \quad i=1,\cdots,m.$$

因为$\bar{I}_F$是环$\mathbf{Z}F$的理想，故$\bar{I}_F$是右$\mathbf{Z}F$-模。现在我们指出右$\mathbf{Z}F$-模$\bar{I}_F$的两个性质及其对环$\mathbf{Z}F$的增长理想I_F的应用，即有下面三个定理。

定理 28.5 右$\mathbf{Z}F$-模$\bar{I}_F$是有基

$$Y-1=\{y-1 \mid y\in Y\}$$

的自由模。

证 当$y\in Y$时，由于$y\in R$，故$\bar{\pi}(y)=1$. 从而$\bar{\pi}(y-1)=\bar{\pi}(y)-\bar{\pi}(1)=0$. 因此首先有$Y-1\subseteq \bar{I}_F$.

现在证明$Y-1$是右$\mathbf{Z}F$-模$\bar{I}_F$的一个生成系。

为此，任取$\alpha\in\bar{I}_F$. 因为$\alpha\in\mathbf{Z}F$，故先可设$\alpha=x_1k_1+\cdots+x_nk_n$，其中$x_i\in F$, $k_i\in\mathbf{Z}$, $i=1,\cdots,n$. 当然每一个x_i总属于R在F中的某一个右陪集。虽然不同的x_i有可能属于同一个右陪集，但无论如何总可设

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}r_{ik}t_{j_i}m_{ik},$$

其中$t_{j_1},\cdots,t_{j_m}$互异；$r_{ik}\in R$, $m_{ik}\in\mathbf{Z}$, $i=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,l$.

因为$\bar{\pi}(\alpha)=0$，且$\bar{\pi}(r_{ik})=1$，$\bar{\pi}(t_{j_i})=\pi(t_{j_i})$，故有

$$\sum_{i=1}^{m}\pi(t_{j_i})\left(\sum_{k=1}^{l}m_{ik}\right)=0.$$

因此由引理28.2知$\sum\limits_{k=1}^{l}m_{ik}=0, i=1,\cdots,m$. 于是有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}(r_{ik}-1)(t_{j_i}m_{ik})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}r_{ik}t_{j_i}m_{ik}-$$

$$\sum_{i=1}^{m}t_{j_i}\left(\sum_{k=1}^{l}m_{ik}\right)=\alpha.$$

这说明α是$\{r_{ik}-1\mid i=1,\cdots,m;k=1,\cdots,l\}$的右$\mathbf{Z}F$-线性组合。但$r_{ik}-1\in I_R$，故由定理27.7知$r_{ik}-1$是$Y-1$的右$\mathbf{Z}R$-线性组合，从而$r_{ik}-1$是$Y-1$的右$\mathbf{Z}F$-线性组合. 因此$\alpha$是$Y-1$的右$\mathbf{Z}F$-线性组合，所以$Y-1$是右$\mathbf{Z}F$-模$\bar{I}_F$的一个生成系。

最后，我们证明$Y-1$是右$\mathbf{Z}F$-模$\bar{I}_F$的一个基。

为此，设

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)\alpha_i=0,$$

其中$y_i\in Y,\alpha_i\in\mathbf{Z}F,i=1,\cdots,n$。

和刚才的理由一样，可设

$$\alpha_i=\sum_{k=1}^{m}B_{ki}t_{j_k},\quad i=1,\cdots,n,$$

其中$t_{j_1},\cdots,t_{j_m}$互异；$\beta_{ki}\in\mathbf{Z}R,k=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,n$。

于是有 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_{ki}t_{j_k}\right)=0$。从而有

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)\beta_{ki}\right)t_{j_k}=0.$$

因为 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)\beta_{ki}\in\mathbf{Z}R,k=1,\cdots,m$。故由引理28.2知 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)\beta_{ki}=0,k=1,\cdots,m$，从而由定理27.7知$\beta_{ki}=0$，$k=1,\cdots,m$；$i=1,\cdots,n$。因此$\alpha_i=0,i=1,\cdots,n$。这就证明了右$\mathbf{Z}F$-模$\bar{I}_F$是有基$Y-1=\{y-1\mid y\in Y\}$的自由模。

若M是右$\mathbf{Z}F$-模，则对于$g\in G$，$m+M\overline{I}_F\in M/(M\overline{I}_F)$，其中$m\in M$，定义

$$(m+M\overline{I}_F)g=mf+M\overline{I}_F,$$

其中$f\in F$满足$\pi(f)=g$，然后再定义

$$(m+M\overline{I}_F)\left(\sum_{g\in G}gm_g\right)=\sum_{g\in G}(m+M\overline{I}_F)gm_g$$

时，易知$M/(M\overline{I}_F)$成为右$\mathbf{Z}G$-模。

注　因为I_F是环$\mathbf{Z}F$的理想，故I_F是右$\mathbf{Z}F$-模。因此按照以上方式，$I_F/(I_F\overline{I}_F)$是右$\mathbf{Z}G$-模。

不难证明　$\overline{I}_F\subseteq I_F$。事实上，若$\alpha\in\overline{I}_F$，则如定理28.5中的证明，可设$\alpha=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}r_{ik}t_{j_i}m_{ik}$，且由$\overline{\pi}(\alpha)=0$，知有

$\sum_{k=1}^{l}m_{ik}=0, i=1,\cdots,m$。从而$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}m_{ik}=0$，故$\alpha\in I_F$。因此

$\overline{I}_F\subseteq I_F$。

于是有

$$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)\subseteq I_F/(\overline{I}_FI_F)$$

可以证明：$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)$是右$\mathbf{Z}G$-模$I_F/(I_F\overline{I}_F)$的子模。事实上，当$g\in G, m+I_F\overline{I}_F\in\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)$，$m\in\overline{I}_F$时，设$f\in F$满足$\pi(f)=g$，则有

$$(m+I_F\overline{I}_F)g=mf+I_F\overline{I}_F.$$

因为$\overline{I}_F$是$\mathbf{Z}F$的理想，故$mf\in\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)$，因此$(m+I_F\overline{I}_F)g\in\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)$，故$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)$是右$\mathbf{Z}G$-模$I_F/(I_F\overline{I}_F)$的子模。

定理28.6　设右$\mathbf{Z}F$-模M是有基W的自由模，则按刚才的方式作成的右$\mathbf{Z}G$-模$M/M\overline{I}_F$是有基

$$\overline{W}=\{\overline{w}=w+M\overline{I}_F\mid w\in W\}$$

的自由模。

证　因为M是有基W的自由右$\mathbf{Z}F$-模，故

$$M=\bigoplus_{w\in W} w\mathbf{Z}F$$

从而易知有

$$M\bar{I}_F=\bigoplus_{w\in W} w\bar{I}_F.$$

命

$$\varphi:\quad M\longrightarrow\bigoplus_{w\in W}(w\mathbf{Z}F)/(w\bar{I}_F)$$

$$w_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+w_{i_n}\alpha_{i}\longmapsto(\cdots,\ w_{i_1}\alpha_{i_1}+w_{i_1}\bar{I}_F,\cdots,$$

$$w_{i_n}\alpha_{i_n}+w_{i_n}\bar{I}_F,\cdots)$$

则易知φ是右$\mathbf{Z}F$-满射，且$\ker\varphi=M\bar{I}_F$。故有

$$M/(M\bar{I}_F)\cong\bigoplus_{w\in W}((w\mathbf{Z}F)/(w\bar{I}_F))$$

又，不难证明：

$$(w\mathbf{Z}F)/(w\bar{I}_F)\cong\bar{w}\mathbf{Z}G.$$

事实上，命

$$\psi:\ w\mathbf{Z}F\longrightarrow\bar{w}\mathbf{Z}G$$

$$w\left(\sum_{x\in F}xm_x\right)\longmapsto\bar{w}\left(\sum_{x\in F}\pi(x)m_x\right)$$

则易知ψ是群同态满射，且$\ker\psi=w\bar{I}_F$。故有

$$(w\mathbf{Z}F)/(w\bar{I}_F)\cong\bar{w}\mathbf{Z}G.$$

于是有右$\mathbf{Z}G$-同构

$$M/(M\bar{I}_F)\cong\bigoplus_{w\in W}\bar{w}\mathbf{Z}G.$$

这就证明了右$\mathbf{Z}G$-模$M/(M\bar{I}_F)$是有基$\overline{W}$的自由模。

定理28.7　设右$\mathbf{Z}F$-模M是有基W的自由模，则$M/(MI_F)$是自由Abel群（即自由$\mathbf{Z}$-模），有基

$$\overline{W}=\{\bar{w}=w+MI_F\mid w\in W\}.$$

证 取$G=\{1\}$，则可视$\mathbf{Z}G=\mathbf{Z}$，从而$\overline{I}_F=I_F$。故由定理28.6即知$M/(MI_F)$是有基$\overline{W}$的自由Abel群。

注. 因为$\overline{I}_F$是环$\mathbf{Z}F$的理想，因此$\overline{I}_F$可以作成左$\mathbf{Z}F$-模。由定理28.5（对于左模的情形）知左$\mathbf{Z}F$-模$\overline{I}_F$是有基$Y-1$的自由模。因此$\overline{I}_F=\bigoplus_{y\in Y}\mathbf{Z}F(y-1)$。从而易知$I_F\overline{I}_F=\bigoplus_{y\in Y}I_F(y-1)$，于是$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)=(\bigoplus_{y\in Y}\mathbf{Z}F(y-1))/(\bigoplus_{y\in Y}I_F(y-1))$。类似于定理28.6的证明，可知$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)\cong\bigoplus_{y\in Y}(\mathbf{Z}F(y-1)/I_F(y-1))$，$(\mathbf{Z}F(y-1))/(I_F(y-1))\cong\mathbf{Z}(y-1+I_F\overline{I}_F)$。从而

$$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)\cong\bigoplus_{y\in Y}\mathbf{Z}(y-1+I_F\overline{I}_F).$$

因此$\overline{I}_F/(I_F\overline{I}_F)$是有基$\{y-1+I_F\overline{I}_F\mid y\in Y\}$的自由Abel群。

为了给出平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的Gruenberg分解，除了上面三个定理以外，我们再指出下面两点。

设H,K是环$\mathbf{Z}F$的两个理想，记$HK=\{\sum_i x_iy_i\mid x_i\in H, y_i\in K\}$，则$HK$是$\mathbf{Z}F$的理想。若$H$及$K$又是分别有基$A$及$B$的自由右$\mathbf{Z}F$-模，则易知$HK$是有基

$$AB=\{ab\mid a\in A,\ b\in B\}$$

的自由右$\mathbf{Z}F$-模。

设已给模$M_1\subseteq M_2\subseteq M\subseteq M'$。命

$$\varphi:\ M/M_1\longrightarrow M/M_2$$
$$m+M_1\longmapsto m+M_2,$$

则φ是模同态满射，且$\ker\varphi=M_2/M_1$。于是有

$$M/M_1\xrightarrow{\ \varphi\ }\!\!\!\!\to M/M_2\xhookrightarrow{\ \alpha\ }M'/M_2$$

$\alpha\varphi:\ M/M_1\longrightarrow M'/M_2$叫做陪集的扩大。

现在可以导出平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的Gruenberg分解，即有下

面定理。

定理28.8 命

$$P_{2n}=\bar{I}_F^n/\bar{I}_F^{n+1},\ n\geqslant 0;$$
$$P_{2n-1}=(I_F\bar{I}_F^{n-1})/(I_F\bar{I}_F^n),\ n\geqslant 1.$$

其中$\bar{I}_F^0=\mathbf{Z}F$(于是$P_0=(\mathbf{Z}F)/\bar{I}_F,\ P_1=I_F/(I_F\bar{I}_F)$).则有

(i) P_{2n}是自由右$\mathbf{Z}G$-模. 当$n\geqslant 1$时，P_{2n}有基

$$\{(y_1-1)\cdots(y_n-1)+\bar{I}_F^{n+1}\mid y_i\in Y\};$$

P_{2n-1}是自由右$\mathbf{Z}G$-模，有基

$$\{(x-1)(y_1-1)\cdots(y_{n-1}-1)+I_F\bar{I}_F^n\mid x\in X,\ y_i\in Y\}.$$

(ii) 若$\mathbf{Z}$是平凡右$\mathbf{Z}G$-模，命$d_k: P_k\longrightarrow P_{k-1}$是陪集的扩大，$k\geqslant 1$；并命$\varepsilon'$：$P_0\longrightarrow\mathbf{Z}$是$\sum\limits_{x\in F}xm_x+\bar{I}_F\longmapsto\sum\limits_{x\in F}m_x$，则有右$\mathbf{Z}G$-正合列：

$$\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon'}\mathbf{Z}\longrightarrow 0.$$

证 (i) 因为$P_0=(\mathbf{Z}F)/\bar{I}_F=(\mathbf{Z}F)/(\mathbf{Z}F\bar{I}_F)$，故由定理28.6知$P_0$是有基$\{1+\bar{I}_F\}$的自由右$\mathbf{Z}G$-模。当$n\geqslant 1$时，因为$\bar{I}_F$是$\mathbf{Z}F$的理想，且由定理28.5知$\bar{I}_F$是有基$Y-1$的自由右$\mathbf{Z}F$-模，故$\bar{I}_F^2$是有基$\{(y_1-1)(y_2-1)\mid y_1, y_2\in Y\}$的自由右$\mathbf{Z}F$-模。由数学归纳法即知$\bar{I}_F^n$是有基$\{(y_1-1)\cdots(y_n-1)\mid y_i\in Y\}$的自由右$\mathbf{Z}F$-模。于是由定理28.6知$P_{2n}=\bar{I}_F^n/(\bar{I}_F^n\bar{I}_F)$是有基$\{(y_1-1)\cdots(y_n-1)+\bar{I}_F^{n+1}\mid y_i\in Y\}$的自由右$\mathbf{Z}G$-模。同理可知$P_{2n-1}$是有基$\{(x-1)(y_1-1)\cdots(y_{n-1}-1)+I_F\bar{I}_F^n\mid x\in X, y_i\in Y\}$的自由右$\mathbf{Z}G$-模。

(ii) 因为$\bar{I}_F\subseteq I_F$，故有$\bar{I}_F^{n+1}\subseteq I_F\bar{I}_F^n\subseteq\bar{I}_F^n\subseteq I_F\bar{I}_F^{n-1}$，从而有

$$\bar{I}_F^n/\bar{I}_F^{n+1}\xrightarrow{\varphi_n}\bar{I}_F^n/I_F\bar{I}_F^n\xhookrightarrow{\alpha_n}I_F\bar{I}_F^{n-1}/I_F\bar{I}_F^n$$

由于 $\bar{I}_F^n$是$\mathbf{Z}F$的理想，故可知$\bar{I}_F^n/(I_F\bar{I}_F^n)$ 是右 $\mathbf{Z}G$-模$(I_F\bar{I}^{n-1})/(I_F\bar{I}_F^n)$的子模，且易知$\varphi_n$是右$\mathbf{Z}G$-映射．故有

$$d_{2n}=\alpha_n\varphi_n:\ P_{2n}\longrightarrow P_{2n-1},\quad n\geqslant 1.$$

且由此立即得到：

$$\mathrm{im}d_{2n}=\bar{I}_F^n/(I_F\bar{I}_F^n),\ \mathrm{ker}d_{2n}=(I_F\bar{I}_F^n)/(\bar{I}_F^{n+1}),\quad n\geqslant 1$$

同样，有 $I_F\bar{I}_F^{n+1}\subseteq\bar{I}_F^{n+1}\subseteq I_F\bar{I}_F^n\subseteq\bar{I}_F^n$，故有

$$(I_F\bar{I}_F^n)/(I_F\bar{I}_F^{n+1})\xrightarrow{\varphi_n'}\!\!\!\rightarrow(I_F\bar{I}_F^n)/\bar{I}_F^{n+1}\xhookrightarrow{\alpha_n'}\bar{I}_F^n/\bar{I}_F^{n+1}$$

因此有

$$d_{2n+1}=\alpha_n'\varphi_n':\ P_{2n+1}\longrightarrow P_{2n},\quad n\geqslant 0$$

且由此立即得到

$$\mathrm{im}d_{n+1}'=(I_F\bar{I}_F^n)/\bar{I}_F^{n+1},\quad \mathrm{ker}d_{2n+1}=\bar{I}_F^{n+1}/(I_F\bar{I}_F^{n+1}),$$

$n\geqslant 0$，这样就有

$$\mathrm{im}d_{2n}=\mathrm{ker}d_{2n-1},\quad \mathrm{im}d_{2n+1}=\mathrm{ker}d_{2n}.$$

又易知 $\mathrm{im}d_1=\mathrm{ker}\varepsilon'$，且$\varepsilon'$ 是右 $\mathbf{Z}G$-满射，故有右 $\mathbf{Z}G$-正合列

$$\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon'}\mathbf{Z}\longrightarrow 0.$$

定理28.8中得到的右$\mathbf{Z}G$-正合列是平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个自由分解（从而是投射分解），它叫做平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的Gruenberg分解．

28.3 Hopf 公式

为了导出 Hopf 公式，我们先证明下面五个引理．

引理 28.3 命 $[F,R]$ 是F的子群，它由一切 $[f,r]=frf^{-1}r^{-1}$ 生成，$[R,F]$是F的子群，它由一切 $[x,f]=rfr^{-1}f^{-1}$ 生成，其中$f\in F$，$r\in R$．则有

(i) $[F,R]=[R,F]$；

(ii) $[F,R]$是R的正规子群。

证 (i) 因为 $[f,r]=[r^{-1},rf]\in[R,F]$，$[r,f]=[rf,r^{-1}]\in[F,R]$，故$[F,R]=[R,F]$.

(ii) 首先明显知 $[f,r]\in R$. 故$[F,R]\subseteq R$. 又，当$r'\in R$时，$r'[r,f]r'^{-1}=[r'r,f][f,r']\in[R,F]$，故$[F,R]$是$R$的正规子群.

引理28.4 设已给平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个投射分解

$$Q:\quad \cdots\longrightarrow Q_2\xrightarrow{e_2}Q_1\xrightarrow{e_1}Q_0\xrightarrow{\eta}\mathbf{Z}\longrightarrow 0$$

记 $J_n=\mathrm{im}\,e_n$，λ_n: $J_n\hookrightarrow Q_{n-1}$，则对任何左$\mathbf{Z}G$-模 A，有

$$H_n(G,A)\cong\ker(\lambda_n\otimes 1_A).$$

证 由复形

$$Q_{\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}G}A:\quad \cdots\longrightarrow Q_2\otimes A\xrightarrow{e_2\otimes 1}Q_1\otimes A\xrightarrow{e_1\otimes 1}Q_0\otimes A\longrightarrow 0,$$

知

$$H_n(G,A)=\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},A)=\ker(e_n\otimes 1)/\mathrm{im}(e_{n+1}\otimes 1).$$

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{n+1} & \xrightarrow{e_{n+1}} & Q_n & \xrightarrow{\xi_n} & J_n & \longrightarrow & 0 \\ & & & {\scriptstyle e_n}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\lambda_n} & & \\ & & & & Q_{n-1} & & \end{array}$$

其中 $\xi_n(z)=e_n(z)$，$\forall z\in Q_n$；上面横行是正合列。

因为$\otimes_{\mathbf{Z}G}A$是右正合的共变函子，故有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{n+1}\otimes A & \xrightarrow{e_{n+1}\otimes 1} & Q_n\otimes A & \xrightarrow{\xi_n\otimes 1} & J_n\otimes A & \longrightarrow & 0 \\ & & & {\scriptstyle e_n\otimes 1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\lambda_n\otimes 1} & & \\ & & & & Q_{n-1}\otimes A & & \end{array}$$

且上面横行是正合列。于是有

$$\mathrm{im}(e_{n+1}\otimes 1)=\ker(\xi_n\otimes 1).$$

我们证明：

$$(\xi_n\otimes 1)(\ker(e_n\otimes 1))=\ker(\lambda_n\otimes 1).$$

为此，设 $z\in\ker(e_n\otimes 1)$，则 $(e_n\otimes 1)(z)=0$。由于 $e_n\otimes 1=(\lambda_n\otimes 1)(\xi_n\otimes 1)$，故 $(\lambda_n\otimes 1)(\xi_n\otimes 1)(z)=0$。因此 $(\xi_n\otimes 1)(z)\in\ker(\lambda_n\otimes 1)$。所以 $(\xi_n\otimes 1)(\ker(e_n\otimes 1))\subseteq\ker(\lambda_n\otimes 1)$。反之，若 $w\in\ker(\lambda_n\otimes 1)$，则 $(\lambda_n\otimes 1)(w)=0$。因为 $w\in J_n\otimes A$，而 $\xi_n\otimes 1$ 是满射，故有 $u\in Q_n\otimes A$ 使 $w=(\xi_n\otimes 1)(u)$。于是 $(\lambda_n\otimes 1)\cdot(\xi_n\otimes 1)(u)=0$。从而 $(e_n\otimes 1)(u)=0$。故 $u\in\ker(e_n\otimes 1)$。因此 $w\in(\xi_n\otimes 1)(\ker(e_n\otimes 1))$。这就证明了

$$(\xi_n\otimes 1)(\ker(e_n\otimes 1))=\ker(\lambda_n\otimes 1).$$

这样，就得到**Z**-满射

$$\varphi:\quad \ker(e_n\otimes 1)\longrightarrow\ker(\lambda_n\otimes 1)$$
$$x\longmapsto(\xi_n\otimes 1)(x).$$

因为 $\ker\varphi=\ker(\xi_n\otimes 1)\cap\ker(e_n\otimes 1)$，而 $\ker(\xi_n\otimes 1)\subseteq\ker(e_n\otimes 1)$，故 $\ker\varphi=\ker(\xi_n\otimes 1)=\mathrm{im}(e_{n+1}\otimes 1)$。因此 $\ker(e_n\otimes 1)/\mathrm{im}(e_{n+1}\otimes 1)\cong\ker(\lambda_n\otimes 1)$，即

$$H_n(G,A)\cong\ker(\lambda_n\otimes 1).$$

设 R' 是 R 的换位子群，则 R/R' 是 Abel 群。我们可以将 R/R' 作成右 **Z**G-模。

为此，对于 $R'r\in R/R'$，其中 $r\in R$，及 $g\in G$，定义

$$(R'r)g=R'f^{-1}rf,$$

其中 $f\in F$ 满足 $\pi(f)=g$。

当 $\pi(f_1)=\pi(f)=g$ 时，$\pi(f^{-1}f_1)=1$。故 $f^{-1}f_1\in\ker\pi=R$。因此 $(f^{-1}rf)(f_1^{-1}rf_1)^{-1}=(f^{-1}f_1)(f_1^{-1}rf_1)(f^{-1}f_1)^{-1}(f_1^{-1}rf_1)^{-1}\in R'$。所以 $R'f^{-1}rf=R'f_1^{-1}rf_1$。

当 $R'r=R's$，其中 $r,s\in R$ 时，有 $rs^{-1}\in R'$。因为对于任何 $r_1,r_2\in R$，总有 $f^{-1}(r_1r_2r_1^{-1}r_2^{-1})f=(f^{-1}r_1f)(f^{-1}r_2f)(f^{-1}r_1f)^{-1}(f^{-1}r_2f)^{-1}\in R'$，故 $f^{-1}rs^{-1}f\in R'$。因此 $(f^{-1}rf)(f^{-1}sf)^{-1}=$

$f^{-1}rs^{-1}f\in R'$. 所以 $R'f^{-1}rf=R'f^{-1}sf$.

因此 $(R'r)g$ 确已被定义、容易验证 R/R' 成为右 $\mathbf{Z}G$-模。

引理28.5　存在右 $\mathbf{Z}G$-同构映射

$$\theta:\ \bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\longrightarrow R/R'$$

满足 $\theta(r-1+I_F\bar{I}_F)=R'r,\quad\forall r\in R$.

证　根据定理28.7后面的注，$\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)$ 是有基 $\{y-1+I_F\bar{I}_F\mid y\in Y\}$ 的自由 Abel 群（即自由 $\mathbf{Z}$-模），而 R/R' 是Abel群，故可唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F) & \overset{\theta}{\dashrightarrow} & \\
\uparrow i & & \\
\{y-1+I_F\bar{I}_F\mid y\in Y\} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & R/R'
\end{array}$$

其中 $\varphi(y-1+I_F\bar{I}_F)=R'y,\quad\forall y\in Y$；补出的 θ 是群同态映射。故 θ 满足：

$$\theta(y-1+I_F\bar{I}_F)=R'y,\quad\forall y\in Y.$$

我们来证明 θ 是双射。为此，命

$$\begin{aligned}\varphi:\ R&\longrightarrow\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\\ r&\longmapsto r-1+I_F\bar{I}_F.\end{aligned}$$

因为当 $r\in R$ 时，$r-1\in\bar{I}_F$。故 φ 是映射。又，当 $r_1,r_2\in R$ 时，$(r_1-1)(r_2-1)\in\bar{I}_F\bar{I}_F\subseteq I_F\bar{I}_F$，且 $r_1r_2-1=r_1-1+r_2-1+(r_1-1)(r_2-1)$，故 $\varphi(r_1r_2)=\varphi(r_1)+\varphi(r_2)$。因此 φ 是群同态映射。

当然可以唯一地补成交换图：

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \bar{I}_F/I_F\bar{I}_F\\
 & \searrow & \uparrow \bar{\varphi}\\
 & & R/\ker\varphi
\end{array}$$

故得到群同态单射

$$\bar{\varphi}:\quad R/\ker\varphi \longrightarrow \bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)$$
$$(\ker\varphi)r \longmapsto r-1+I_F\bar{I}_F$$

因为 $\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)$ 是 Abel 群，故 $R/\ker\varphi$ 是 Abel 群。因此$\ker\varphi \supseteq R'$，这样就得到群同态映射

$$\eta:\quad R/R' \longrightarrow \bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)$$
$$R'r \longmapsto r-1+I_F\bar{I}_F$$

因为 $\theta(y-1+I_F\bar{I}_F)=R'y,\quad \forall\, y\in Y$，我们可以证明

$$\theta(r-1+I_F\bar{I}_F)=R'r,\quad \forall\, r\in R.$$

事实上，当 $r\in R$ 时可设

$$r=y_1^{e_1}\cdots y_n^{e_n}$$

其中 $e_i=\pm 1$，$y_i\in Y$，$i=1,\cdots,n$。

当$n=1$时，若$e_1=1$，则$r=y_1$，这时当然有$\theta(r-1+I_F\bar{I}_F)=R'r$，若 $e_1=-1$，则　$r-1=y_1^{-1}-1=-(y_1-1)-(y_1^{-1}-1)(y_1-1)$，而 $(y_1^{-1}-1)(y_1-1)\in I_F\bar{I}_F$，故 $r-1+I_F\bar{I}_F=-((y_1-1)+I_F\bar{I}_F)$，从而有 $\theta(r-1+I_F\bar{I}_F)=(\theta(y_1-1))^{-1}=R'y_1^{-1}=R'r$。

假设$\theta(y_1^{e_1}\cdots y_{n-1}^{e_{n-1}}-1+I_F\bar{I}_F)=Ry_1^{e_1}\cdots y_{n-1}^{e_{n-1}}$，则当$r=y_1^{e_1}\cdots y_n^{e_n}$ 时，由于，$r-1=y_1^{e_1}\cdots y_n^{e_n}-1=y_1^{e_1}\cdots y_{n-1}^{e_{n-1}}-1+y_n^{e_n}-1+(y_1^{e_1}\cdots y_{n-1}^{e_{n-1}}-1)(y_n^{e_n}-1)$，而 $(y_1^{e_1}\cdots y_{n-1}^{e_{n-1}}-1)(y_n^{e_n}-1)\in I_F\bar{I}_F$，故有$\theta(r-1+I_F\bar{I}_F)=\theta(y_1^{e_1}\cdots y_{n-1}^{e_{n-1}}-1+\bar{I}_FI_F)\,\theta(y_n^{e_n}-1+I_F\bar{I}_F)=R'y_1^{e_1}\cdots y_n^{e_n}=R'r$。

到此立即看出：$\theta\eta=1$，$\eta\theta=1$。故 θ 是群同构映射。

最后，我们证明θ是右$\mathbf{Z}G$-同构映射。

当 $r\in R, g\in G$ 时，设$f\in F$满足$\pi(f)=g$，则

$$\eta((R'r)g)=\eta(R'f^{-1}rf)=f^{-1}rf-1+I_F\bar{I}_F,$$
$$(\eta(R'r))g=(r-1+I_F\bar{I}_F)g=(r-1)f+I_F\bar{I}_F.$$

因为 $(r-1)f=f^{-1}rf-1-(f^{-1}-1)(r-1)f$，而$(f^{-1}-1)(r-1)f\in I_F\bar{I}_F$，故 $(r-1)f+I_F\bar{I}_F=f^{-1}rf-1+I_F\bar{I}_F$。所以$\eta$

是右zG-同构映射。从而 $\theta=\eta^{-1}$是右$\mathbf{Z}G$-同构映射。

引理28.6　(i) 若 $x,y\in R$使 $xy^{-1}\in R'$，则

$$x^m(y^m)^{-1}\in R',\quad \forall\, m\in\mathbf{Z};$$

(ii) 若 $x,y\in R$，则

$$(xy)^m(x^my^m)^{-1}\in R',\quad \forall\, m\in\mathbf{Z}.$$

证　只要对正整数m证明之即可。

(i) 假设当$m=$正整数k时成立，则

$$x^{k+1}(y^{k+1})^{-1}=x(x^k(y^k)^{-1})x^{-1}\cdot xy^{-1}\in R'.$$

(ii) 假设当$m=$正整数k时成立，则

$$(xy)^{k+1}(x^{k+1}y^{k+1})^{-1}$$
$$=(x(yx)^k(y^kx^k)^{-1}x^{-1})(xy^kx^k(y^k)^{-1}(x^k)^{-1}x^{-1})\in R'.$$

引理28.7　设$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则有

(i) 存在群同构映射

$$\sigma:\ \bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{\mathbf{Z}G}\mathbf{Z}\longrightarrow R/[F,R]$$

满足$\sigma((r-1+I_F\bar{I}_F)\otimes m)=[F,R]r^m,\quad \forall\, r\in R;$

(ii) 存在群同构映射

$$\tau:\ I_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{\mathbf{Z}G}\mathbf{Z}\longrightarrow F/F'$$

满足 $\tau((x-1+I_F\bar{I}_F)\otimes m)=F'x^m,\quad \forall\, x\in X;$

(iii) 命

$$\delta:\ R/[F,R]\longrightarrow F/F'$$
$$[F,R]r\longmapsto F'r$$

则δ是群同态映射，且

$$\ker\delta=(R\cap F')/[F,R],$$

并且有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{\mathbf{Z}G}\mathbf{Z} & \xrightarrow{\lambda_2\otimes 1} & I_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{\mathbf{Z}G}\mathbf{Z}\\
\sigma\downarrow & & \downarrow\tau\\
R/[F,R] & \xrightarrow{\quad\delta\quad} & F/F'
\end{array}$$

其中　$\lambda_2:\ \bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\hookrightarrow I_F/(I_F\bar{I}_F)$.

证(i) 命

$$\varphi: R/R' \times \mathbf{Z} \longrightarrow R/[F,R]$$
$$(R'r, m) \longmapsto [F,R]r^m$$

当 $R'r = R's, r, s \in R$ 时，有 $rs^{-1} \in R'$. 故由引理 28.6 知 $r^m(s^m)^{-1} \in R' \subseteq [F,R]$，因此 $[F,R]r^m = [F,R]s^m$. 所以φ是映射.

我们证明 φ 是$\mathbf{Z}G$-双加性函数.

当$r_1, r_2 \in R$时，有

$$\varphi((R'r_1)(R'r_2), m) = \varphi(R'r_1r_2, m) = [F,R](r_1r_2)^m,$$
$$\varphi(R'r_1, m)\varphi(R'r_2, m) = [F,R]r_1^m r_2^m.$$

由引理28.6知

$$\varphi((R'r_1)(R'r_2), m) = \varphi(R'r_1, m)\varphi(R'r_2, m).$$

又，明显有

$$\varphi(R'r, m_1 + m_2) = \varphi(R'r, m_1)\varphi(R'r, m_2).$$

最后，当 $g \in G$时，命$f \in F$满足$\pi(f) = g$，则

$$\varphi((R'r)g, m) = \varphi(R'f^{-1}rf, m) = [F,R]f^{-1}r^m f,$$
$$\varphi(R'r, gm) = \varphi(R'r, m) = [F,R]r^m,$$

而 $f^{-1}r^m f(r^m)^{-1} \in [F,R]$，故有

$$\varphi((R'r)g, m) = \varphi(R'r, gm).$$

这就证明了φ是$\mathbf{Z}G$-双加性函数.

于是可唯一地补成交换图:

$$\begin{array}{ccc} R/R' \times Z & \xrightarrow{h} & R/R' \otimes_{ZG} Z \\ & \searrow^{\varphi} \quad \swarrow^{\bar{\sigma}} & \\ & R/[F,R] & \end{array}$$

其中$h(R'r, m) = R'r \otimes m$，补出的$\bar{\sigma}$是群同态映射. 可知
$\bar{\sigma}(R'r \otimes m) = [F,R]r^m, \quad \forall r \in R, \ m \in \mathbf{Z}.$

容易看出$\bar{\sigma}$是群同构映射。因为只要命

$$\psi:\quad R/[F,R]\longrightarrow R/R'\otimes_{\mathbf{Z}G}\mathbf{Z}$$
$$[F,R]r\longmapsto R'r\otimes 1$$

即可知ψ是θ的逆映射。

事实上，若 $[F,R]r=[F,R]s$，其中 $r,s\in R$，则 $rs^{-1}\in[F,R]$。由引理 28.3(i) 的证明知可设

$$rs^{-1}=(f_1^{-1}r_1f_1r_1^{-1})\cdots(f_m^{-1}r_mf_mr_m^{-1}),$$

其中 $f_i\in F$，$r_i\in R$，$i=1,\cdots,m$。

设　$\pi(f_i)=g_i, i=1,\cdots,m$。因为$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，故有

$$R'r_i\otimes 1=R'r_i\otimes g_i1=(R'r_i)g_i\otimes 1=R'f_i^{-1}r_if_i\otimes 1$$

从而有

$$R'f_i^{-1}r_if_i^{-1}\otimes 1=R'r_i\otimes 1+R'r_i^{-1}\otimes 1=0$$

因此有

$$\begin{aligned}R'r\otimes 1&=R'f_1^{-1}r_1f_1r_1^{-1}\otimes 1+\cdots\\&\quad+R'f_m^{-1}r_mf_mr_m^{-1}\otimes 1+R's\otimes 1\\&=R's\otimes 1.\end{aligned}$$

于是ψ是映射.容易验证ψ是群同态映射且有　$\bar{\sigma}\psi=1$，$\psi\bar{\sigma}=1$，故$\bar{\sigma}$是群同构映射。

根据引理 28.5 有右$\mathbf{Z}G$-同构映射θ：$\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\longrightarrow R/R'$ 满足 $\theta(r-1+I_F\bar{I}_F)=R'r$，$\forall r\in R$。于是命 $\sigma=\bar{\sigma}(\theta\otimes 1_z)$时，就得到群同构映射，

$$\sigma:\quad \bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{\mathbf{Z}G}\mathbf{Z}\longrightarrow R/[F,R],$$

且立刻知道σ满足 $\sigma((r-1+I_F\bar{I}_F)\otimes m)=[F,R]r^m$，$\forall r\in R$。

(ii) 由定理27.7知I_F是有基 $\{x-1|x\in X\}$ 的自由右$\mathbf{Z}G$-模，故由定理28.6知 $I_F/(I_F\bar{I}_F)$是有基 $\{x-1+I_F\bar{I}_F|x\in X\}$的自由右$\mathbf{Z}G$-模。因此有右$\mathbf{Z}G$-同构映射

$$\xi:\quad I_F/(I_F\bar{I}_F)\longrightarrow\mathbf{Z}G^{(|X|)}$$

$$\sum_{x\in X}(x-1+I_F\bar{I}_F)\alpha_x\longmapsto(\cdots,\alpha_x,\cdots,\alpha_y,\cdots)$$

其中 $\alpha_x \in \mathbf{Z}G$, $\forall x \in X$.

于是有群同构映射:

$$\xi \otimes 1: I_F/(I_F \bar{I}_F) \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}G^{(|X|)} \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z}.$$

又有群同构映射

$$\eta: \mathbf{Z}G^{(|X|)} \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z} \longrightarrow (\mathbf{Z}G \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z})^{(|X|)}$$

满足 $\eta((\cdots, \alpha_x, \cdots, \alpha_y, \cdots) \otimes m) = (\cdots, \alpha_x \otimes m, \cdots, \alpha_y \otimes m, \cdots)$

且有群同构映射

$$\zeta: (\mathbf{Z}G \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z})^{(|X|)} \longrightarrow \mathbf{Z}^{(|X|)}$$

满足 $\zeta(\cdots, \alpha_x \otimes m_x, \cdots, \alpha_y \otimes m_y, \cdots) = (\cdots, \alpha_x m_x, \cdots, \alpha_y m_y, \cdots)$.

因为 I_F是有基 $\{x-1 | x \in X\}$ 的自由右$\mathbf{Z}G$-模，故由定理28.7知I_F/I_F^2是有基$\{x-1+I_F^2 | x \in X\}$的自由 Abel 群，故有群同构映射

$$\beta: I_F/I_F^2 \longrightarrow \mathbf{Z}^{(|X|)}$$

$$\sum_{x \in X} (x-1+I_F^2) m_x \longmapsto (\cdots, m_x, \cdots, m_y, \cdots)$$

又由引理28.1知有群同构映射

$$\rho: I_F/I_F^2 \longrightarrow F/F'$$

满足 $\rho(x-1+I_F^2) = F'x$.

于是命 $\tau = \rho\beta^{-1}\zeta\eta(\xi \otimes 1)$ 时，就得到群同构映射

$$\tau: I_F/(I_F \bar{I}_F) \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z} \longrightarrow F/F',$$

且立刻知道 τ 满足 $\tau((x-1+I_F\bar{I}_F) \otimes m) = F'x$, $\forall x \in X$,

(iii) 若 $[F, R]r = [F, R]s$, 其中 $r, s \in R$, 则

$$rs^{-1} \in [F, R] \subseteq F'.$$

故 $F'r = F's$. 因此δ是映射. 又，容易验证δ是群同态映射，且 $\ker \delta = (R \cap F')/[F, R]$.

因为

$$\delta\sigma((r-1+I_F\bar{I}_F) \otimes m) = \delta([F, R]r^m) = F'r^m, \quad \forall r \in R,$$

$$\tau(\lambda_2 \otimes 1)((r-1+I_F\bar{I}_F) \otimes m) = \tau((r-1+I_F\bar{I}_F) \otimes m)$$
$$= F'r^m, \quad \forall r \in R,$$

故 $\delta\sigma=\tau(\lambda_2\otimes 1)$。因此（iii）中的图是交换图。

现在我们给出 Hopf 公式，即有下面定理。

定理28.9（Hopf公式） 设已给群G,若 G是自由群F的一个同态象：$F\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}G$，命 $R=\ker\pi$，则对于平凡左 $\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$，有

$$H_2(G,\mathbf{Z})\cong(R\cap F')/[F,R].$$

证 根据定理 28.8，可以取平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个投射分解是它的Gruenberg分解：

$$\cdots\to P_3\xrightarrow{d_3}P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon'}\mathbf{Z}\longrightarrow 0$$

即

$$\cdots\to I_F\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F^2)\xrightarrow{d_3}\bar{I}_F/\bar{I}_F^2\xrightarrow{d_2}I_F/(I_F\bar{I}_F)\xrightarrow{d_1}\mathbf{Z}F/\bar{I}_F\xrightarrow{\varepsilon'}\mathbf{Z}\longrightarrow 0$$

记 $J_2=\mathrm{im}d_2,\lambda_2$：$J_2\hookrightarrow I_F/(I_F\bar{I}_F)$，则由引理28.4知

$$H_2(G,\mathbf{Z})\cong\ker(\lambda_2\otimes 1_Z).$$

由定理28.8的证明过程中得到的公式知

$$\mathrm{im}d_2=\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F).$$

故据引理28.7知有交换图：

$$\begin{array}{ccc}\bar{I}_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{ZG}\mathbf{Z} & \xrightarrow{\lambda_2\otimes 1} & I_F/(I_F\bar{I}_F)\otimes_{ZG}\mathbf{Z}\\ \sigma\downarrow & & \downarrow\tau\\ R/[F,R] & \xrightarrow{\delta} & F/F'\end{array}$$

因为σ及τ皆是同构映射，故$\ker(\lambda_2\otimes 1_Z)\cong\ker\delta$。

而由引理28.7知$\ker\delta=R\cap F'/[F,R]$，因此有

$$H_2(G,\mathbf{Z})\cong(R\cap F')/[F,R]$$

因为$H_2(G,\mathbf{Z})$只与G有关，而与平凡右$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的投射分解的选取无关，故有下面推论。

推论 28.1 设已给群 G，若 G 是一个自由群F的一个同态

象：$F \xrightarrow{\pi} G$，并命$R=\ker\pi$，则

$$(R\cap F')/[F,R]$$

与F及R的选取无关。

§29 群的扩张

概略地说，群扩张的理论是讨论怎样通过一个群的正规子群及其关于此正规子群的商群来研究这个群。群扩张理论与群的上同调理论有密切联系，它是群的上同调理论的重要来源。

在群扩张理论中，一种非常重要的情形是所给的正规子群本身是 Abel 群。本节的讨论将限于这种情形。

29.1 群的扩张的概念

定义29.1 设已给群A及群 G，其中A是Abel群。若群E使得A 是E的正规子群，且有一个短正合列

$$0\longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

即β是群同态满射且$\operatorname{im}\alpha=\ker\beta$，则称此短正合列是群$A$借助群$G$的一个扩张。

以后群A的运算用加法，群 G 的运算用乘法．群E的运算也用加法，但要注意E未必是 Abel 群。

当已给群A借助群G的一个扩张

$$0\longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

时，对于$x\in G$，命

$$\theta_x:\ A\longrightarrow A$$

$$a\longmapsto e+a-e,$$

其中$e\in E$满足$\beta(e)=x$．则易知 $\theta_x\in Aut\,A$，且易知

$$\theta:\ G\longrightarrow Aut\,A$$
$$x\longmapsto\theta_x$$

是群同态映射。

因此对于$x\in G$及$a\in A$，定义

$$xa=\theta_x(a)$$

并定义$\left(\sum_{x\in G}m_x x\right)a=\sum_{x\in G}m_x(xa)$，则$A$成为左$\mathbf{Z}G$-模。

按照这种方式得到的A的左 $\mathbf{Z}G$- 模结构叫做是由所给扩张确定的。

设已给一个Abel群A及一个群G，并设已按某种方式给定了A的一个左$\mathbf{Z}G$-模结构。所谓解扩张问题，就是要决定A借助G的所有扩张，其中每一个扩张确定的A的左$\mathbf{Z}G$-模结构与原来给定的一致，也即由其中每一个扩张决定的G到 $Aut\,A$ 的群同态映射 θ 都满足：

$$\theta_x(a)=xa,\quad\forall x\in G,\ a\in A.$$

下面我们将逐步地来解扩张问题。为此，先引入下面定义。

定义29.2　设已给群A借助群G的一个扩张：

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha}E\xrightarrow{\beta}G\longrightarrow 1$$

若映射　$\lambda:\ G\longrightarrow E$满足：

(i) $\beta\lambda=1_G$；

(ii) $\lambda(1)=0$，

则称λ是此扩张的一个提升函数。

易知群A借助群G的每一个扩张都有提升函数。

当λ是群A借助群G的一个扩张的任意一个提升函数时，易知恒有

(i) $\theta_x(a)=\lambda(x)+a-\lambda(x)$，$\forall x\in G, a\in A$；

(ii) 对于每一个$e\in E$，必有唯一的$a\in A, x\in G$使：

$$e=a+\lambda(x);$$

(iii) $\lambda(x)+\lambda(y)-\lambda(xy)\in A, \quad \forall x, y\in G$。

29.2 因子组；$Z^2(G,A)$, $B^2(G,A)$ 及$e(G,A)$

定义29.3 设已给Abel群A及群G，并设A已按某种方式成为左ZG-模。再设 $0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1$

是A借助G的一个扩张，且此扩张确定的A的左ZG-模结构与原给的一致。若λ是此扩张的一个提升函数，则映射

$$[\ \ ]:\ G\times G\longrightarrow A$$

$$(x,y)\longmapsto\lambda(x)+\lambda(y)-\lambda(xy)$$

叫做由此扩张及提升函数λ确定的因子组。

记 $[x,y]=[\ \ ](x,y)$，则有

$$[x,y]=\lambda(x)+\lambda(y)-\lambda(xy).$$

因子组的概念是解扩张问题过程中的一个中心概念。

我们给出$G\times G$到A的一个映射是因子组的一种充分必要条件，即有下面定理。

定理29.1 设已给Abel群A及群G，并设A已按某种方式成为左ZG-模。再设已给一个映射$[\ \ ]: G\times G\longrightarrow A$，并记$[x,y]=[\ \ ](x,y)$。则$[\ \ ]$是因子组，当且仅当以下条件成立：

(i) $[x,1]=0=[1,x], \quad \forall x\in G$；

(ii) $x[y,z]-[xy,z]+[x,yz]-[x,y]=0,$

$$\forall x,y,z\in G.$$

证 设$[\ \ ]$是因子组，则有A借助G的一个扩张，且A由此扩张确定的左ZG-模结构与原给的一致，并且此扩张有一个提升函数λ，使

$$[x,y]=\lambda(x)+\lambda(y)-\lambda(xy),$$

$$xa=\lambda(x)+a-\lambda(x)$$

于是有 $[x,1]=\lambda(x)+\lambda(1)-\lambda(x1)=0$, $[1,x]=\lambda(1)+\lambda(x)-\lambda(1x)=0$。又由 $x[y,z]=\lambda(x)+\lambda(y)+\lambda(z)-\lambda(yz)-\lambda(x)$, $-[xy,z]=\lambda(xyz)-\lambda(z)-\lambda(xy)$, $[x,yz]=\lambda(x)+\lambda(yz)-\lambda(xyz)$, $-[x,y]=\lambda(xy)-\lambda(y)-\lambda(x)$, 知 $x[y,z]-[xy,z]+[x,yz]-[x,y]=0$。

反之，设[ ]满足条件 (i) 及 (ii) . 命

$$E=\{(a,x)\,|\,a\in A, x\in G\},$$

并定义

$$(a,x)+(b,y)=(a+xb+[x,y],xy),$$

则易知 E 成为群，其加法单位元是 $(0,1)$；(a,x) 的加法逆元 $-(a,x)=(-x^{-1}a-x^{-1}[x,x^{-1}],x^{-1})$。

命 β: $E\longrightarrow G$ 是 $(a,x)\longmapsto x$，则易知 β 是群同态满射，且 $\ker\beta=\{(a,1)\,|\,a\in A\}$，又，明显知 $A\longrightarrow\ker\beta$，$a\longmapsto(a,1)$ 是群同构映射，故视 $a=(a,1)$ 时，A 成为 E 的正规子群。于是得到 A 借助 G 的一个扩张：

$$0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1$$

命 λ：$G\longrightarrow E$ 是 $x\longmapsto(0,x)$，则易知 λ 是此扩张的一个提升函数。

因为 $xa+\lambda(x)=(xa,1)+(0,x)=(xa,x)$，$\lambda(x)+a=(0,x)+(a,1)=(xa,x)$，故 $xa+\lambda(x)=\lambda(x)+a$。从而 $\theta_x(a)=xa$。即 A 由此扩张确定的左 $\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致。

于是由 $\lambda(x)+\lambda(y)-\lambda(xy)=(0,x)+(0,y)-(0,xy)=[x,y]$ 知[ ]是此扩张及提升函数 λ 确定的因子组。

命 $[x,y]=0$，$\forall\, x,y\in G$，由此定理即知因子组存在，A 借助 G 的扩张存在。

进一步我们来研究由同一个扩张、两个提升函数确定的因子组之间的关系。有下面定理。

定理29.2 设已给Abel群A及群G，并设A已按某种方式成为左$\mathbf{Z}G$-模. 再设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$

是A借助G的一个扩张，且A由此扩张确定的左$\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致。若λ及λ'是此扩张的两个提升函数，$[\ \ ]$及$[\ \ ]'$分别是由此扩张及λ和由此扩张及λ'确定的因子组，则必存在映射

$$\langle\ \ \rangle: \quad G \longrightarrow A$$

满足：

(i) $\langle 1 \rangle = 0$;

(ii) $[x, y]' - [x, y] = x\langle y \rangle - \langle xy \rangle + \langle x \rangle$,

其中$\langle x \rangle = \langle\ \ \rangle(x)$。

证 因为当$x \in G$时，$\beta(\lambda'(x) - \lambda(x)) = xx^{-1} = 1$，故$\lambda'(x) - \lambda(x) \in \ker\beta = A$，因此命

$$\langle\ \ \rangle: \quad G \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto \lambda'(x) - \lambda(x)$$

时，知$\langle\ \ \rangle$是映射，且容易验证(i),(ii)成立。

设已给Abel群A及群G，并设A已按某种方式成为左$\mathbf{Z}G$-模。我们用$Z^2(G, A)$表示由A借助G的所有扩张（其中每一个扩张确定的A的左$\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致）及所有提升函数确定的所有因子组作成的集合，即

$$Z^2(G, A) = \{\text{映射 } [\ \ ]: G \times G \longrightarrow A \mid [x, 1] = [1, x] = 0, \\ x[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y] = 0\}.$$

对于$[\ \ ], [\ \ ]' \in Z^2(G, A)$，定义$[\ \ ] + [\ \ ]'$是

$$([\ \ ] + [\ \ ]')(x, y) = [x, y] + [x, y]',$$

则易知$Z^2(G, A)$成为Abel群，其零元$[\ \ ]_0$是$[x, y]_0 = 0$, $\forall x, y \in G$。$[\ \ ]$的负元$-[\ \ ]$是$(-[\ \ ])(x, y) = -[x, y]$, $\forall x, y \in G$。

命

$$B^2(G, A) = \{\text{映射} f: G \times G \longrightarrow A \mid \text{存在映射} \langle\ \ \rangle: G \to A$$

满足　(i) $\langle 1\rangle = 0$;　　(ii) $f(x, y) = x\langle y\rangle - \langle xy\rangle + \langle x\rangle\}$,
则易知

$$B^2(G, A) \subseteq Z^2(G, A).$$

当 $f, g \in B^2(G, A)$ 时，命《 》: $G \longrightarrow A$ 是 $x \longmapsto \langle x\rangle - \langle x\rangle'$，这里〈 〉及〈 〉′分别是对 f 及 g 而言的，则《1》= 0，且 $(f-g)(x, y) = x\langle\langle y\rangle\rangle - \langle\langle xy\rangle\rangle + \langle\langle x\rangle\rangle$，故 $B^2(G, A)$ 是 $Z^2(G, A)$ 的子群。

再记

$$e(G, A) = (Z^2(G, A))/(B^2(G, A)).$$

设已给 Abel 群 A 及群 G，并设 A 已按某种方式成为左 $\mathbf{Z}G$-模。再设 $0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$ 是 A 借助 G 的一个扩张，且 A 由此扩张确定的左 $\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致。若〔 〕是此扩张及其一个提升函数 λ 确定的因子组，〔 〕′是此扩张及其一个提升函数 λ' 确定的因子组，则由定理29.2及 $B^2(G, A)$ 的定义知

$$[\quad] + B^2(G, A) = [\quad]' + B^2(G, A).$$

29.3　扩张的等价；解扩张问题

定义29.4　设已给Abel群 A 及群 G，并设 A 已按某种方式成为左 $\mathbf{Z}G$-模。再设

$$0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1 \qquad (甲)$$

$$0 \longrightarrow A \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} E' \overset{\beta'}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1 \qquad (乙)$$

是 A 借助 G 的两个扩张，且 A 由(甲)确定的左 $\mathbf{Z}G$-模结构及 A 由(乙)确定的左 $\mathbf{Z}G$-模结构都与原给的一致。

若存在群同态映射　φ: $E \longrightarrow E'$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha}{\hookrightarrow} & E & \overset{\beta}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} & E' & \overset{\beta'}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

则称(甲)和(乙)等价.

容易知道，当φ存在时必是同构映射. 又易知扩张的等价是一种等价关系.

现在我们给出扩张(甲)和(乙)等价的一种充分必要条件，即有下面定理.

定理29.3 (甲)和(乙)等价，当且仅当(甲)有一个提升函数λ，(乙)有一个提升函数λ'使:

$$[\quad] + B^2(G, A) = [\quad]' + B^2(G, A),$$

这里$[\quad]$及$[\quad]'$分别是由(甲)及λ确定的因子组和由(乙)及λ'确定的因子组.

证 设(甲)和(乙)等价，则有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha}{\hookrightarrow} & E & \overset{\beta}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} & E' & \overset{\beta'}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中φ是群同态映射.

命λ是(甲)的任意一个提升函数，则

$$[x, y] = \lambda(x) + \lambda(y) - \lambda(xy),$$

再命$\lambda' = \varphi\lambda$，则易知$\lambda'$是(乙)的一个提升函数，故

$$[x, y]' = \lambda'(x) + \lambda'(y) - \lambda'(x, y).$$

因为 $\varphi\alpha = \alpha'$，故 $\varphi\alpha([x, y]) = [x, y]$，从而$\varphi([x, y]) = [x, y]$. 但是 $\varphi([x, y]) = \varphi(\lambda(x) + \lambda(y) - \lambda(xy)) = \lambda'(x) + \lambda'(y) - \lambda'(xy) = [x, y]'$. 因此$[x, y]' = [x, y]$. 所以$[\quad] + B^2(G, A) = [\quad]' + B^2(G, A)$.

反之，设(甲)有一个提升函数 λ，(乙)有一个提升函数 λ' 使 $[\ \ ]+B^2(G,A)=[\ \ ]'+B^2(G,A)$。

由 $[\ \ ]-[\ \ ]'\in B^2(G,A)$ 知有映射 $\langle\ \rangle: G\longrightarrow A$ 满足：

(i) $\langle 1\rangle=0$；

(ii) $[x,y]-[x,y]'=x\langle y\rangle-\langle xy\rangle+\langle x\rangle$。

命

$$\varphi:\ E\longrightarrow E'$$
$$a+\lambda(x)\longmapsto a+\langle x\rangle+\lambda'(x),$$

则易知 φ 是群同态映射，且下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&A&\overset{\alpha}{\hookrightarrow}&E&\overset{\beta}{\longrightarrow}&G&\longrightarrow&1\\ &&\downarrow{\scriptstyle 1}&&\downarrow{\scriptstyle\varphi}&&\downarrow{\scriptstyle 1}&&\\ 0&\longrightarrow&A&\overset{\alpha'}{\hookrightarrow}&E'&\overset{\beta'}{\longrightarrow}&G&\longrightarrow&1\end{array}$$

因此(甲)和(乙)等价。

进一步又可得到(甲)与(乙)等价的以下条件。

推论29.1　(甲)和(乙)等价，当且仅当对于由(甲)及其任何提升函数 λ 确定的因子组 $[\ \ ]$，以及由(乙)及其任何提升函数 λ' 确定的因子组 $[\ \ ]'$，恒有

$$[\ \ ]+B^2(G,A)=[\ \ ]'+B^2(G,A).$$

证　充分性由定理 29.3 即得. 下面证明必要性. 设(甲)和(乙)等价，并设 λ 及 λ' 分别是(甲)及(乙)的任意提升函数，$[\ \ ]$ 及 $[\ \ ]'$ 分别是由(甲)及 λ 和由(乙)及 λ' 确定的因子组. 由定理29.3知(甲)有一个提升函数 σ，(乙)有一个提升函数 σ'，当命 $\overline{[\ \ ]}$ 及 $\overline{[\ \ ]}'$ 分别是由(甲)及 σ 和由(乙)及 σ' 确定的因子组时，就有 $\overline{[\ \ ]}'-\overline{[\ \ ]}\in B^2(G,A)$. 从而由 $\overline{[\ \ ]}-[\ \ ]\in B^2(G,A)$ 及 $\overline{[\ \ ]}'-[\ \ ]'\in B^2(G,A)$ 即知 $[\ \ ]'-[\ \ ]\in B^2(G,A)$。

现在我们来解扩张问题。

设已给 Abel 群 A 及群 G，并设 A 已按某种方式成为左 $\mathbf{Z}G$-

模．命T是A借助G的所有扩张（其中每一个扩张确定的A的左$\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致）作成的集．扩张的等价是T的一个等价关系．我们用$\varepsilon(G, A)$表示全体等价类作成的集合．有下面定理．

定理29.4 $\varepsilon(G, A)$到$e(G, A)$有一个双射．

证 当$K\in\varepsilon(G, A)$时，任取等价类K中一个扩张，并任取此扩张的一个提升函数，从而决定了一个因子组〔 〕．这样又可得到$e(G, A)$的一个元素〔 〕$+B^2(G, A)$．命

$$\rho:\ \varepsilon(G, A)\longrightarrow e(G, A)$$
$$K\longmapsto [\ \ ]+B^2(G, A)\ .$$

首先由推论29.1知ρ是映射．又由$e(G, A)$及因子组的定义知ρ是满射．最后，若$K\longmapsto[\ \ ]+B^2(G, A), K'\longmapsto[\ \ ]'+B^2(G, A)$，而有〔 〕$+B^2(G, A)=$〔 〕$'+B^2(G, A)$，命〔 〕是由扩张$\xi$及其一提升函数$\lambda$确定的因子组，〔 〕$'$是由扩张$\xi'$及其一提升函数$\lambda'$确定的因子组，则由推论29.1知$\xi$与$\xi'$等价．但$\xi\in K, \xi'\in K'$，故$K=K'$，故$\rho$是双射．

29.4 可裂扩张

现在我们来讨论一种重要的扩张——可裂扩张．

定义29.5 设已给Abel群A借助群G的一个扩张

$$0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1$$

若存在群同态映射λ: $G\longrightarrow E$使

$$\beta\lambda=1_G,$$

则称此扩张是可裂的．

容易知道，当λ存在时必是单射．

我们给出一个扩张是可裂扩张的几种充分必要条件，即有下面三个定理．

定理29.5 扩张 $0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1$ 可裂，当且仅当有一个提升函数λ: $G\longrightarrow E$是群同态映射。

证 这是明显的。

定理29.6 扩张 $0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1$ 可裂，当且仅当E有一个子群C满足：

(i) $C\cong G$;

(ii) $E=A+C$;

(iii) $A\cap C=0$。

证 设扩张 $0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1$ 可裂，则有提升函数 λ: $G\longrightarrow E$是群同态映射。命 $C=\operatorname{im}\lambda$，则$C$是$E$的子群，且因$\lambda$是单射，故$C\cong G$。

当$e\in E$时，有唯一的$a\in A$及$x\in G$使$e=a+\lambda(x)\in A+C$，故$E=A+C$。又，当$a\in A\cap C$时，由$a\in A$知$\beta(a)=1$；由 $a\in C$知有 $x\in G$使 $a=\lambda(x)$，故$\beta\lambda(x)=\beta(a)=1$。但 $\beta\lambda=1$，故 $x=1$。从而$a=\lambda(1)=0$。因此$A\cap C=0$。

反之，设E有一个子群C满足(ii)—(iii)。若 $y\in\ker\beta 1_C$，则$y\in A\cap C$，从而$y=0$。所以$\beta 1_C$ 是单射。而当 $x\in G$ 时，有$e\in E$使$\beta(e)=x$。又因为$E=A+C$，故有$a\in A$, $c\in C$使$e=a+c$。因此 $x=\beta(e)=\beta(a)\beta(c)=\beta(c)$。所以 $\beta 1_C$: $C\longrightarrow G$ 是满射。

命 $\lambda=(\beta 1_C)^{-1}$: $G\longrightarrow E$，则易知 $\beta\lambda=1$，故扩张

$$0\longrightarrow A\overset{\alpha}{\hookrightarrow}E\overset{\beta}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1 \text{ 可裂。}$$

注。当 E的子群C满足(ii)及(iii)时，称E是 A与C 的半直积。

定理29.7 设 $0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$ 是 Abel 群A借助群G的一个扩张，于是此扩张确定了A的一个 左$\mathbf{Z}G$-模结构。命

$$E' = \{(a, x) \mid a \in A, x \in G\}$$

并定义$(a, x) + (b, y) = (a + xb, xy)$。

则 $0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$ 可裂，当且仅当以下条件成立：

(i) E'是群；

(ii) 存在一个提升函数 λ: $G \longrightarrow E$ 使

$$\varphi: E \longrightarrow E'$$
$$a + \lambda(x) \longmapsto (a, x)$$

是群同构映射。

证 设 $0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1$ 可裂，则存在提升函数 λ: $G \longrightarrow E$是群同态映射。这时易知 (ii) 中的φ是双射且φ保持和。故E'是群，φ是群同构映射。

反之，设 (i)，(ii) 成立。命 λ_1: $G \longrightarrow E'$是$x \longmapsto (0, x)$，则易知 λ_1 是群同态映射。又因为当 $x \in G$ 时，$\varphi\lambda(x) = (0, x) = \lambda_1(x)$，故$\varphi\lambda = \lambda_1$，于是$\lambda = \varphi^{-1}\lambda_1$: $G \longrightarrow E$ 是群同态映射，所以

$$0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1 \quad \text{可裂。}$$

设已给 Abel 群A及群 G，并设A已按某种方式成为 左$\mathbf{Z}G$-模。再设

$$0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1 \qquad (\text{甲})$$

$$0 \longrightarrow A \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} E' \overset{\beta'}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1 \qquad (\text{乙})$$

是A借助G的两个扩张，且A由(甲)确定的左$\mathbf{Z}G$-模结构及由(乙)确定的左$\mathbf{Z}G$-模结构和原给的一致。我们证明下面定理。

定理29.8　(i) 若(甲)及(乙)都是可裂扩张，则(甲)与(乙)等价；

(ii) 若(甲)与(乙)等价，则当其中一个是可裂扩张时，另一个也是可裂扩张；

(iii) 若(甲)及其一个提升函数λ确定的因子组[　]是$Z^2(G,A)$的零元，则(甲)是可裂扩张。

证　(i) 这时有群同态映射$\lambda: G\longrightarrow E$使$\beta\lambda=1_G$，并有群同态映射$\lambda'$：$G\longrightarrow E'$使$\beta'\lambda'=1_G$。于是命$\varphi$：$E\longrightarrow E'$是$a+\lambda(x)\longmapsto a+\lambda'(x)$时，即知$\varphi$是群同态映射，且使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha}{\hookrightarrow} & E & \overset{\beta}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1\\ & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} & E' & \overset{\beta'}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1\end{array}$$

故(甲)与(乙)等价。

(ii) 这时有群同态映射φ：$E\longrightarrow E'$使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha}{\hookrightarrow} & E & \overset{\beta}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1\\ & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \overset{\alpha'}{\hookrightarrow} & E' & \overset{\beta'}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1\end{array}$$

无妨设(甲)是可裂扩张，则有群同态映射λ：$G\longrightarrow E$使$\beta\lambda=1_G$。于是命$\lambda'=\varphi\lambda$：$G\longrightarrow E'$时，则λ'是群同态映射，且$\beta'\lambda'=1_G$。故(乙)是可裂扩张。

(iii) 这时$[x,y]=0$，$\forall x,y\in G$，于是由$[x,y]=\lambda(x)+\lambda(y)-\lambda(xy)$知$\lambda(xy)=\lambda(x)+\lambda(y)$，从而知$\lambda$是群同态映射。故(甲)是可裂扩张。

由这个定理中的(iii)知A借助G的可裂扩张是存在的。再由定理中的(i)及(ii)知A借助G的所有可裂扩张恰组成一个等价类。于是在定理29.4的双射作用下，由A借助G的所有可裂扩张作成的等价类与群$e(G, A)$的零元相对应。由此立刻得到下面推论。

推论29.2 设已给Abel群A及群G，并设A已按某种方式成为左$\mathbf{Z}G$-模，则A借助G的每一个扩张（其中每一个扩张确定的A的左$\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致）都可裂，当且仅当$e(G, A) = 0$。

最后，我们引入内导子的概念。

定义29.6 设已给Abel群A及群G，并设A已按某种方式成为左$\mathbf{Z}G$-模。再设已给映射

$$f: G \longrightarrow A.$$

若存在$a_0 \in A$使

$$f(x) = xa_0 - a_0, \quad \forall x \in G,$$

则称f是一个内导子。

易知内导子必是导子。

G到A的所有内导子作成的集用$I_{nn}(G, A)$来记。易知$I_{nn}(G, A)$是$\mathrm{Der}(G, A)$的一个子群。

再记

$$stab(G, A) = Der(G, A)/I_{nn}(G, A)$$

作为本节的结束，我们给出$stab(G, A) = 0$时的两个有意思的结果，即有下面两个定理。

定理29.9 设已给Abel群A及群G；并设A已按某种方式成为左$\mathbf{Z}G$-模。再设$stab(G, A) = 0$。

若 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$ 是A借助G的一个可裂扩张，且A由此扩张所确定的左$\mathbf{Z}G$-模结构与原给的一致，而C及C'是E的两个子群，满足

$$E = A + C, \quad A \cap C = 0;$$
$$E = A + C', \quad A \cap C' = 0,$$

则C与C'共轭，即存在$a_0 \in A$使

$$C = a_0 + C' - a_0.$$

证 首先由定理29.6的证明知 $\beta 1_C$: $C \longrightarrow G$是群同构映射，$\lambda = (\beta 1_C)^{-1}$: $G \longrightarrow E$ 满足 $\beta\lambda = 1_G$。于是λ是群同态映射，又是此扩张的一个提升函数，且 $\mathrm{im}\lambda = C$。

同理，$\lambda' = (\beta 1_{C'})^{-1}$ 是群同态映射，又是此扩张的一个提升函数，且 $\mathrm{im}\lambda' = C'$。

命〔 〕是所给扩张及λ确定的因子组，〔 〕$'$ 是所给扩张及λ'确定的因子组，则由定理29.2知，命

$$h: G \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto \lambda'(x) - \lambda(x)$$

时，就有 $h(1) = 0$，且

$$[x, y]' - [x, y] = xh(y) - h(xy) + h(x), \ \forall x, y \in G.$$

但 $[x, y] = \lambda(x) + \lambda(y) - \lambda(xy) = 0$，$[x, y]' = \lambda'(x) + \lambda'(y) - \lambda'(xy) = 0$，故$xh(y) - h(xy) + h(x) = 0$。从而 $h(xy) = xh(y) + h(x)$，$\forall x, y \in G$。因此 $h \in Der(G, A)$。

因为 $stab(G, A) = 0$，故 $Der(G, A) = I_{nn}(G, A)$。所以 $h \in I_{nn}(G, A)$。故有 $a_0 \in A$ 使

$$h(x) = xa_0 - a_0, \quad \forall x \in G.$$

由于$h(x) = \lambda'(x) - \lambda(x)$，故 $\lambda'(x) - \lambda(x) = xa_0 - a_0$，从而 $\lambda(x) = a_0 - xa_0 + \lambda'(x) = a_0 - (\lambda'(x) + a_0 - \lambda'(x)) + \lambda'(x) = a_0 + \lambda'(x) - a_0$，故 $\mathrm{im}\lambda = a_0 + \mathrm{im}\lambda' - a_0$。因此$C = a_0 + C' - a_0$。

为了证明即将给出的最后一个定理，我们先作一些简单论述。

设K是域，G是群，若W及A是左KG-模，则W及A当然自动地成为左K-模，且易知有

(i) 对于 $x \in G$，$f \in \mathrm{Hom}_K(W, A)$，定义 xf 是

$$(xf)(w) = x \cdot f(x^{-1}w), \ \forall w \in W,$$

则 $\mathrm{Hom}_K(W,A)$ 成为左 $\mathbf{Z}G$-模。

(ii) 设 $f\in\mathrm{Hom}_K(W,A)$，则 $f\in\mathrm{Hom}_{KG}(W,A)$ 当且仅当 $xf=f$，$\forall x\in G$。

现在我们来证明最后一个定理。

定理29.10 设K是域，G是群。若

$$stab(G,A)=0,\quad \forall \text{左}\mathbf{Z}G\text{-模}A,$$

则KG是半单环。

证 只要证明每一个左 KG- 短正合列都是可裂的。为此，设

$$0\longrightarrow U\xrightarrow{i}V\xrightarrow{\pi}W\longrightarrow 0 \qquad (甲)$$

是一个左KG-短正合列.

于是当然有左K-短正合列

$$0\longrightarrow U\xrightarrow{i}V\xrightarrow{\pi}W\longrightarrow 0, \qquad (乙)$$

因为域是半单环，故（乙）可裂。从而有 $f\in\mathrm{Hom}_K(W,V)$ 使

$$\pi f=1_W.$$

用$\mathrm{Hom}_K(W,-)$ 作用（乙），得到正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_K(W,U)\xrightarrow{i_*}\mathrm{Hom}_K(W,V)\xrightarrow{\pi_*}\mathrm{Hom}_K(W,W).$$

易知当 $w\in W$ 时，$(\pi_*(xf-f))(w)=0$.故 $\pi_*(xf-f)=0$。因此 $xf-f\in\ker\pi_*=\mathrm{im}\,i_*$。

于是对于每一个 $x\in G$，有唯一的 $g_x\in\mathrm{Hom}_K(W,V)$ 使 $i_*(g_x)=xf-f$。这样就得到映射

$$\varphi:\ G\longrightarrow\mathrm{Hom}_K(W,U)$$
$$x\longmapsto g_x.$$

因为一方面有 $i_*(g_{xy})=xyf-f$，另一方面又有 $i_*(xg_y+g_x)=i_*(xg_y)+i_*(g_x)=xi_*(g_y)+i_*(g_x)=xyf-f$，故 $xg_y+g_x=g_{xy}$，即 $\varphi(xy)=x\varphi(y)+\varphi(x)$.因此有

$$\varphi\in\mathrm{Der}(G,\mathrm{Hom}_K(W,U)).$$

因为$stab(G,A)=0$，$\forall$ 左$\mathbf{Z}G$-模A，故$stab(G,\mathrm{Hom}_K(W,U))=0$，因此$\varphi\in I_{**}(G,\mathrm{Hom}_K(W,U))$，从而有$h\in\mathrm{Hom}_K(W,U)$使

$$\varphi(x)=xh-x,\quad \forall x\in G,$$

即$g_x=xh-x$，$\forall x\in G$.

命　$\sigma=f-i_*(h)\in\mathrm{Hom}_K(W,V)$，则可知$\sigma\in\mathrm{Hom}_{KG}(W,V)$. 事实上，当$x\in G$时，$i_*(xh-h)=i_*(g_x)=xf-f$，从而$xi_*(h)-i_*(h)=xf-f$. 因此 $x\cdot(f-i_*(h))=f-i_*(h)$，即$x\sigma=\sigma$，$\forall x\in G$. 故$\sigma\in\mathrm{Hom}_{KG}(W,V)$.

最后，$\pi\sigma=\pi(f-i_*(h))=\pi(f-ih)=\pi f=1_W$. 故（甲）可裂. 因此$KG$是半单环.

§30　上同调群

30.1　群G的上同调群的概念

定义30.1　设G是群，$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模. 若A是左$\mathbf{Z}G$-模，则$\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},A)$叫做群$G$的系数在$A$中的第$n$上同调群，记作$H^n(G,A)$.

根据函子Ext的性质立刻知道，对于任何群G，当$n<0$时，恒有

$$H^n(G,A)=0,\quad \forall \text{左}\mathbf{Z}G\text{-模}A.$$

因此只要计算$H^0(G,A),H^1(G,A),H^2(G,A),\cdots$.

关于$H^0(G,A)$，有下面定理.

定理30.1　设G是群，则

(i) 对于任何左$\mathbf{Z}G$-模A，恒有

$$H^0(G,A)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},A)\cong A^G;$$

(ii) 若A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则

$$H^0(G,A)\cong A.$$

证 (i) 因为$H^0(G,A)=\mathrm{Ext}^0_{ZG}(\mathbf{Z},A)$，而$\mathrm{Ext}^0_{ZG}(\mathbf{Z},A)\cong\mathrm{Hom}_{ZG}(\mathbf{Z},A)$，故由定理27.4知

$$H^0(G,A)\cong\mathrm{Hom}_{ZG}(\mathbf{Z},A)\cong A^G.$$

(ii) 因为当A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时$A^G=A$，故此时$H^0(G,A)\cong A$。

下面我们计算$H^n(G,A)$时是用$H^n(G,A)=\mathrm{Ext}^n_{ZG}(-,A)(\mathbf{Z})$。因此关键是要选取平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个适当的投射分解。我们将要选用的不是Gruenberg分解，而是另外的投射分解。

30.2 平凡左ZG-模的三种自由分解：齐次分解，未正规化的标准分解及正规化的标准分解

设已给群G。对于$n\geqslant1$，命

$$G^{(n)}=G\times G\times\cdots\times G,\quad(n\text{个}G)$$

对于$n\geqslant0$，命P_n是以集$G^{(n+1)}$为基的自由Abel群(即自由$\mathbf{Z}$-模)。然后对于$g\in G$，定义

$$g(x_0,x_1,\cdots,x_n)=(gx_0,gx_1,\cdots,gx_n),$$

则易知P_n成为左$\mathbf{Z}G$-模，并可知按这种方式得到的左$\mathbf{Z}G$-模P_0就是左$\mathbf{Z}G$模$\mathbf{Z}G$，因此P_0是自由左$\mathbf{Z}G$-模。

我们证明，当$n\geqslant1$时，P_n是自由左$\mathbf{Z}G$-模。

为此，命

$$\Delta_n=\{(1,x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in G,i=1,\cdots,n\}.$$

因为当$(z_0,z_1,\cdots,z_n)\in G^{(n+1)}$时恒有

$$(z_0,z_1,\cdots,z_n)=z_0(1,z_0^{-1}z_1,\cdots,z_0^{-1}z_n),$$

故Δ_n是左$\mathbf{Z}G$-模P_n的一个生成系。由于P_n是有基$G^{(n+1)}$的自由$\mathbf{Z}$-模，故直接验证即知Δ_n中任意有限个元都是左$\mathbf{Z}G$-线性无关的。因此Δ_n是左$\mathbf{Z}G$-模P_n的基。从而P_n是自由左$\mathbf{Z}G$-模。

因为P_n是以$G^{(n+1)}$为基的自由$\mathbf{Z}$-模，故当$n\geqslant1$时，有群同态映射

$$\partial_n:\quad P_n \longrightarrow P_{n-1}$$

满足 $\partial_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_0, x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n)$，其中记号 $\hat{x}_i$ 表示缺 x_i. 明显知 ∂_n 是左 $\mathbf{Z}G$-映射。

再命

$$\varepsilon:\ P_0 \longrightarrow \mathbf{Z}$$

$$\sum_{x\in G} m_x x \longmapsto \sum_{x\in G} m_x,$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是平凡左 $\mathbf{Z}G$-模，则 ε 是左 $\mathbf{Z}G$-映射。

我们证明，若 $\mathbf{Z}$ 是平凡左 $\mathbf{Z}G$-模，则

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \qquad （甲）$$

是左 $\mathbf{Z}G$-正合列。

事实上，因为 $\varepsilon\partial_1(x_0, x_1) = \varepsilon(x_1 - x_0) = 0$，　　故有

$$\varepsilon\partial_1 = 0.$$

又，当 $n\geqslant 1$ 时，$\partial_n\partial_{n+1}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$

$$= \partial_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{n+1})\right) = 0,$$

故有

$$\partial_n\partial_{n+1} = 0$$

因此首先知道（甲）是一个复形。

其次，因为 $\mathbf{Z}$ 是有基 $\{1\}$ 的自由 $\mathbf{Z}$-模，故有群同态映射

$$s_{-1}:\ \mathbf{Z} \longrightarrow P_0 = \mathbf{Z}G$$

满足 $s_{-1}(1) = 1$.

又，当 $n\geqslant 0$ 时，由于 P_n 是以 $G^{(n+1)}$ 为基的自由 $\mathbf{Z}$-模，故有群同态映射

$$s_n:\ P_n \longrightarrow P_{n+1}$$

满足 $s_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (1, x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

我们证明：

$$\varepsilon s_{-1} = 1_Z; \quad \partial_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon = 1_{P_0};$$

$$\partial_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = 1_{P_n}, \ (n \geqslant 1).$$

事实上，因为 $\varepsilon s_{-1}(1) = \varepsilon(1) = 1$，故有

$$\varepsilon s_{-1} = 1_Z.$$

又，因为当$g \in G$时，$(\partial_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon)(g) = \partial_1 s_0(g) + s_{-1}\varepsilon(g)$ $= \partial_1(1, g) + s_{-1}(1) = g - 1 + 1 = g$，故有

$$\partial_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon = 1_{P_0}.$$

最后，因为当 $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in G^{(n+1)}$时，$(\partial_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n)$ $(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$，故有

$$\partial_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = 1_{P_n}, \quad (n \geqslant 1).$$

现在我们证明：

$$\operatorname{im}\partial_1 = \ker\varepsilon; \quad \operatorname{im}\partial_{n+1} = \ker\partial_n, \ (n \geqslant 1).$$

为此，设 $\xi \in \ker\varepsilon$，则 $\xi = 1_{P_0}(\xi) = \partial_1 s_0(\xi) + s_{-1}\varepsilon(\xi) = \partial_1 s_0(\xi) \in \operatorname{im}\partial_1$。故 $\ker\varepsilon = \operatorname{im}\partial_1$。

同样，当 $\xi \in \ker\partial_n, (n \geqslant 1)$，则 $\xi = 1_{P_n}(\xi) = \partial_{n+1} s_n(\xi) + s_{n-1}\partial_n(\xi) = \partial_{n+1} s_n(\xi) \in \operatorname{im}\partial_{n+1}$。故 $\ker\partial_n = \operatorname{im}\partial_{n+1}$。

这样，再由于ε明显是满射，故（甲）是正合列。

于是（甲）是平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个自由分解。

定义30.2 （甲）叫做平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的齐次分解。

现在研究平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的第二种自由分解。

设已给群G，对于 $n>0$，命 Q_n 是以

$$\{[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid x_i \in G, \ i = 1, \cdots, n\}$$

为基的自由左$\mathbf{Z}G$-模。

再引进一个符号 [ ]，并命Q_0是以 [ ] 这一个元素为基的自由左$\mathbf{Z}G$-模。于是可视$Q_0 = \mathbf{Z}G = P_0$。

对于 $n>0$，因为P_n是有基 $\{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in G\}$的自由$\mathbf{Z}$-模，故有群同态映射

$$\tau_n: \ P_n \longrightarrow Q_n$$

满足

$$\tau_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = x_0[x_0^{-1}x_1, x_1^{-1}x_2, \cdots, x_{n-1}^{-1}x_n]$$

且易知τ_n是左$\mathbf{Z}G$-映射。

因为Q_n是有基$\{[x_1, \cdots, x_n] | x_i \in G\}$的自由左$\mathbf{Z}G$-模，故有左$\mathbf{Z}G$-映射

$$\sigma_n: \ Q_n \longrightarrow P_n$$

满足$\sigma_n[x_1, \cdots, x_n] = (1, x_1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n)$，且易知$\tau_n\sigma_n = 1$，$\sigma_n\tau_n = 1$。故 τ_n: $P_n \longrightarrow Q_n$是左$\mathbf{Z}G$-同构映射。

同样可知存在左$\mathbf{Z}G$-同构映射

$$\tau_0: \ P_0 \longrightarrow Q_0$$

满足

$$\tau_0(x) = x[\ ], \ \forall x \in G.$$

现在对于 $n>0$，命

$$d_n = \tau_{n-1}\partial_n\tau_n^{-1}.$$

则得到左$\mathbf{Z}G$-映射 d_n: $Q_n \longrightarrow Q_{n-1}$。

我们证明：

(i) $d_1[x] = x[\ ] - [\ ]$;

(ii) $$d_n[x_1, \cdots, x_n] = x_1[x_2, \cdots, x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1, \cdots, x_{i-1}, x_ix_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n] + (-1)^n[x_1, \cdots, x_{n-1}], \quad (n \geqslant 2).$$

事实上，

$$d_1[x] = \tau_0\partial_1\tau_1^{-1}[x] = \tau_0\partial_1\sigma_1[x] = \tau_0\partial_1(1, x) = \tau_0(x-1) = x[\ ] - [\ ];$$

$$\begin{aligned} d_n[x_1, \cdots, x_n] &= \tau_{n-1}\partial_n\sigma_n[x_1, \cdots, x_n] \\ &= \tau_{n-1}\partial_n(1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n) \\ &= \tau_{n-1}((x_1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n) \\ &\quad - (1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n) + \cdots) \\ &= \tau_{n-1}(x_1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n) \\ &\quad - \tau_{n-1}(1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n) + \cdots \end{aligned}$$

$$= x_1[x_2, \cdots, x_n] + \cdots$$

$$= x_1[x_2, \cdots, x_n]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2},$$

$$\cdots, x_n] + (-1)^n [x_1, \cdots, x_{n-1}].$$

于是特别有

$$d_1[x] = x[\ ] - [\ ], \quad \forall x \in G;$$

$$d_2[x, y] = x[y] - [xy] + [x], \quad \forall x, y \in G;$$

$$d_3[x, y, z] = x[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y],$$

$$\forall x, y, z \in G.$$

现在再命 ε: $Q_0 = \mathbf{Z}G \longrightarrow \mathbf{Z}$ 如前，即 $\sum_{x \in G} m_x x \longmapsto \sum_{x \in G} m_x$.

我们证明，若 $\mathbf{Z}$ 是平凡左 $\mathbf{Z}G$-模，则

$$\cdots \to Q_2 \xrightarrow{d_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \qquad (乙)$$

是左 $\mathbf{Z}G$-正合列。

事实上，$\varepsilon d_1[x] = \varepsilon(x[\ ] - [\ ]) = 0$，$\forall x \in G$，故

$$\varepsilon d_1 = 0.$$

又，当 $n \geqslant 1$ 时，由 $d_n d_{n+1} = \tau_{n-1} \partial_n \partial_{n+1} \tau_{n+1}^{-1}$ 知

$$d_n d_{n+1} = 0.$$

故首先知道（乙）是复形。

因为有交换图：

$$\begin{array}{llccccccccc}
P: & \cdots \to & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \tau_2 \downarrow & & \tau_1 \downarrow & & \tau_0 \downarrow & & 1 \downarrow & & \\
Q: & \cdots \to & Q_2 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q^0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

而每一个 τ_i 都是同构映射，故有

$$H_n(P) \cong H_n(Q), \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

因为 P 是正合列，故 $H_n(P) = 0$，$\forall n \in \mathbf{Z}$，从而 $H_n(Q) = 0$，$\forall n \in \mathbf{Z}$，因此（乙）是正合列。

定义30.3　(乙)叫做平凡左 $\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的未正规化的标准分解。

最后，我们来研究平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的第三种自由分解。

设已给群G。对于 $n>0$，命 B_n 是以

$$\{[x_1,\cdots,x_n]\mid 1\neq x_i\in G, i=1,\cdots,n\}$$

为基的自由左$\mathbf{Z}G$-模。

再命 $B_0=Q_0$。

若 $x_1,\cdots,x_n$ 中至少有一个是G的单位元1，则规定$[x_1,\cdots,x_n]=0$。当然B_n的基中并不包含这种$[x_1,\cdots,x_n]$。

可知有左$\mathbf{Z}G$-映射

$$d_n:\ B_n\longrightarrow B_{n-1},\quad (n\geqslant 1)$$

满足

$$d_n[x_1,\cdots,x_n]=x_1[x_2,\cdots,x_n]$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1,\cdots,x_{i-1},x_ix_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n]$$
$$+(-1)^n[x_1,\cdots,x_{n-1}].$$

我们证明，当$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，

$$\cdots\longrightarrow B_2\xrightarrow{d_2}B_1\xrightarrow{d_1}B_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{Z}\longrightarrow 0 \qquad (丙)$$

是左$\mathbf{Z}G$-正合列。

事实上，和以前一样，首先容易证明(丙)是复形。又，类似地可知有左$\mathbf{Z}G$-映射

$$s_{-1}:\ \mathbf{Z}\longrightarrow B_0$$

满足 $s_{-1}(1)=[\ ]$；当$n\geqslant 0$时，有左$\mathbf{Z}G$-映射

$$s_n:\ B_n\longrightarrow B_{n+1}$$

满足 $s_n(x[x_1,\cdots,x_n])=[x,x_1,\cdots,x_n]$，且有

$$\varepsilon s_{-1}=1_{\mathbf{Z}};$$

$$d_{n+1}s_n+s_{n-1}d_n=1_{B_n},\quad (n\geqslant 0,\ d_0=\varepsilon).$$

用这两组等式，和以前类似地可以证明 $\mathrm{im}\,d_1=\ker\varepsilon$；$\mathrm{im}\,d_i=$

$\ker d_{i-1}$，$i\geqslant 2$. 故(丙)是正合列。

定义30.4 (丙)叫做平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的正规化的标准分解，也叫 *bar* 分解。

30.3 $H^1(G, A)$及$H^2(G, A)$

关于$H^1(G, A)$，有下面定理。

定理30.2 设G是群。则

(i) 对于任何左$\mathbf{Z}G$-模A，恒有

$$H^1(G, A)\cong stab(G, A);$$

(ii) 若A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则有

$$H^1(G, A)\cong \mathrm{Hom}(G, A).$$

证 (i) 取平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的未正规化的标准分解

$$Q: \quad \cdots \to Q_2 \xrightarrow{d_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{e} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

于是有复形

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(-, A)Q_{\mathbf{Z}}$: $0\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_0, A)\xrightarrow{d_1^*}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_1, A)\xrightarrow{d_2^*}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_2, A)\to\cdots$

从而有

$$H^1(G, A) = \ker d_2^* / \mathrm{im} d_1^* .$$

为了得到$H^1(G, A)\cong stab(G, A)$，下面我们证明$\ker d_2^*$到$stab(G, A)$有一个群同态满射，且其核恰是$\mathrm{im} d_1^*$.

首先据前面所述知

$$d_1[x] = x[\ ] - [\ ], \quad \forall x\in G;$$

$$d_2[x, y] = x[y] - [xy] + [x], \qquad \forall x, y\in G.$$

当$f\in\ker d_2^*$时，对于$x\in G$，当然有唯一确定的$f[x]\in A$. 因此得到由f唯一确定的映射

$$\bar{f}: G\longrightarrow A$$

$$x\longmapsto f[x].$$

因为$f\in\ker d_2^*$，故$fd_2=0$. 因此$fd_2[x, y]=0$. 从而$xf[y]-f[xy]+f[x]=0$. 所以$\bar{f}(xy)=x\bar{f}(y)+\bar{f}(x)$. 于是

$\bar{f}\in \mathrm{Der}(G,A)$. 这样，我们得到映射

$$\varphi:\ \ker d_2^* \longrightarrow \mathrm{Der}(G,A)$$
$$f\longmapsto \bar{f}$$

且易知φ是群同态单射.

进一步，我们证明φ是满射. 为此，设$\sigma\in Der(G,A)$，则因Q_1是有基$\{[x]\mid x\in G\}$的自由左$\mathbf{Z}G$-模，故有$f\in \mathrm{Hom}_{ZG}(Q_1,A)$满足$f[x]=\sigma(x)$，$\forall x\in G$. 因为$(d_2^*(f))[x,y]=fd_2[x,y]=xf[y]-f[xy]+f[x]=x\sigma(y)-\sigma(xy)+\sigma(x)=0$，故$d_2^*(f)=0$. 从而$f\in\ker d_2^*$. 而$(\varphi(f))(x)=f[x]=\sigma(x)$，故$\varphi(f)=\sigma$. 因此$\varphi$是满射. 于是$\varphi$是同构映射.

现在命ρ: $\mathrm{Der}(G,A)\longrightarrow \mathrm{Der}(G,A)/I_{nn}(G,A)=stab(G,A)$是自然同态映射，则有群同态满射

$$\rho\varphi:\ \ker d_2^* \longrightarrow stab(G,A)$$

下面证明　$\mathrm{im} d_1^*=\ker\rho\varphi$.

当　$f\in\mathrm{Hom}_{ZG}(Q_0,A)$时，命$a_0=f([\ ])\in A$，　则对任何$x\in G$，有

$$((\varphi d_1^*)(f))(x)=(\varphi(fd_1))(x)=fd_1[x]$$
$$=f(x[\ ]-[\ ])=xf([\ ])-f([\ ])$$
$$=xa_0-a_0.$$

因此$(\varphi d_1^*)(f)\in I_{nn}(G,A)$. 所以$\rho((\varphi d_1^*)(f))=0$. 从而$\rho\varphi d_1^*=0$. 故$\mathrm{im} d_1^*\subseteq\ker\rho\varphi$.

反之，设$g\in\ker(\rho\varphi)$，则$\rho\varphi(g)=0$. 因此$\varphi(g)\in\ker\rho=I_{nn}(G,A)$，故有　$a_0\in A$　使　$\varphi(g)(x)=xa_0-a_0$，　$\forall x\in G$，从而有

$$g[x]=xa_0-a_0,\quad \forall x\in G.$$

因为Q_0是有基$[\ ]$的自由左$\mathbf{Z}G$-模，故有$f\in\mathrm{Hom}_{ZG}(Q_0,A)$使$f([\ ])=a_0$，因此有

$(d_1^*(f))[x]=fd_1[x]=xf([\ ])-f([\ ])=xa_0-a_0$，$\forall x\in G$. 故$d_1^*(f)=g$. 从而$g\in\mathrm{im} d_1^*$. 因此$\mathrm{im} d_1^*=\ker(\rho\varphi)$.

到此就证明了

$$H^1(G,A)\cong stab(G,A).$$

(ii) 当A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，明显知 $I_{nn}(G,A)=0$. 而这时$\mathrm{Der}(G,A)=\mathrm{Hom}(G,A)$，故有

$$H^1(G,A)\cong \mathrm{Hom}(G,A).$$

关于$H^2(G,A)$,有下面定理.

定理30.3 设G是群，则对任何左$\mathbf{Z}G$-模A，恒有

$$H^2(G,A)\cong e(G,A).$$

证 取平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的正规化标准分解

$$B:\quad \cdots\rightarrow B_2\xrightarrow{d_2}B_1\xrightarrow{d_1}B_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{Z}\longrightarrow 0$$

于是有复形

$$\mathrm{Hom}_{ZG}(-,A)B_z:0\rightarrow\mathrm{Hom}_{ZG}(B_0,A)\xrightarrow{d_1^*}\mathrm{Hom}_{ZG}(B_1,A)$$
$$\xrightarrow{d_2^*}\mathrm{Hom}_{ZG}(B_2,A)\xrightarrow{d_3^*}\cdots$$

从而有

$$H^2(G,A)=\ker d_3^*/\mathrm{im}\,d_2^*$$

为了得到$H^2(G,A)\cong e(G,A)$,下面我们证明$\ker d_3^*$到$e(G,A)$有一个群同态满射，且其核恰是$\mathrm{im}\,d_2^*$.

首先据前面所述知

$$d_2[x,y]=x[y]-[xy]+[x],\quad \forall x,y\in G;$$
$$d_3[x,y,z]=x[y,z]-[xy,z]+[x,yz]-[x,y],$$
$$\forall x,y,z\in G.$$

当$f\in\ker d_3^*$时，对于$(x,y)\in G\times G$，当然有唯一确定的$f[x,y]\in A$. 因此得到由f唯一确定的映射

$$\bar f:\ G\times G\longrightarrow A$$
$$(x,y)\longrightarrow f[x,y].$$

因为$f\in\ker d_3^*$，故 $fd_3=0$。因此 $fd_3[x,y,z]=0$。从而$xf[y,z]-f[xy,z]+f[x,yz]-f[x,y]=0$。故有

$$x\bar f(y,z)-\bar f(xy,z)+\bar f(x,yz)-\bar f(x,y)=0.$$

又因为 $[x,1]=[1,x]=0$，所以又有

$$\bar{f}(x,1)=0,\qquad \bar{f}(1,x)=0.$$

因此由定理29.1知 $\bar{f}\in Z^2(G,A)$. 于是得到映射

$$\varphi:\ \ker d_3^* \longrightarrow Z^2(G,A)$$
$$f\longmapsto \bar{f},$$

容易验证 φ 是群同态单射.

进一步，我们证明 φ 是满射. 为此，设 $\sigma\in Z^2(G,A)$，则 σ: $G\times G\longrightarrow A$ 满足：

$$\sigma(x,1)=\sigma(1,x)=0;$$
$$x\sigma(y,z)-\sigma(xy,z)+\sigma(x,yz)-\sigma(x,y)=0.$$

因为 B_2 是有基 $\{[x,y]\mid 1\neq x,\ 1\neq y\in G\}$ 的自由左 $\mathbf{Z}G$-模，故有 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(B_2,A)$ 使 $f[x,y]=\sigma(x,y)$，$\forall 1\neq x,\ 1\neq y\in G$. 又因为 $[1,x]=[x,1]=0$，故 $f[x,y]=\sigma(x,y)$，$\forall x,y\in G$.

易知 $(d_3^*(f))[x,y,z]=0$. 故 $d_3^*(f)=0$. 从而 $f\in\ker d_3^*$. 但 $(\varphi(f))(x,y)=f[x,y]=\sigma(x,y)$. 故 $\varphi(f)=\sigma$. 因此 φ 是满射. 于是 φ: $\ker d_3^*\longrightarrow Z^2(G,A)$ 是群同构映射.

现在命 ρ: $Z^2(G,A)\longrightarrow Z^2(G,A)/B^2(G,A)=e(G,A)$ 是自然同态映射，则有群同态满射

$$\rho\varphi:\ \ker d_3^*\longrightarrow e(G,A).$$

完全和 $H^1(G,A)$ 的情形类似，可以证明 $\mathrm{im}\,d_2^*=\ker\rho\varphi$，这就证明了

$$H^2(G,A)\cong e(G,A).$$

定理30.3具体地说明了群的扩张理论与群的上同调理论之间的密切联系.

30.4　有限群的上同调群

本段指出有限群的上同调群的一个基本性质，并给出有限循环群的上同调群的计算公式.

定理30.4 设G是有限群，其阶为m，则当$n>0$时，恒有

$$mH^n(G,A)=0,\quad \forall 左\mathbf{Z}G\text{-模}A.$$

证 取平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的未正规化的标准分解

$$Q:\quad \cdots\to Q_2\xrightarrow{d_2}Q_1\xrightarrow{d_1}Q_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{Z}\longrightarrow 0$$

于是有复形

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_0,A)\xrightarrow{d_1^*}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_1,A)\xrightarrow{d_2^*}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_2,A)\to\cdots$$

从而有

$$H^n(G,A)=\ker d_{n+1}^*/\mathrm{im}\,d_n^*.$$

设$f+\mathrm{im}\,d_n^*\in H^n(G,A)$，其中$f\in\ker d_{n+1}^*$。下面证明$mf\in\mathrm{im}\,d_n^*$，从而就有$m(f+\mathrm{im}\,d_n^*)=0$。

设

$$G=\{y_1=1,y_2,\cdots,y_m\},$$

当$n=1$时，因为Q_0是有基$[\ ]$的自由左$\mathbf{Z}G$-模，故存在$g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_0,A)$满足：

$$g([\ ])=\sum_{i=1}^m f[y_i].$$

因为$f\in\ker d_2^*$，故$fd_2=0$。因此$fd_2[x,y_i]=0$，$\forall x\in G$，$i=1,\cdots,m$。从而$\sum_{i=1}^m fd_2[x,y_i]=0$，$\forall x\in G$，但$fd_2[x,y_i]=xf[y_i]-f[xy_i]+f[x]$，故有$x\sum_{i=1}^m f[y_i]-\sum_{i=1}^m f[xy_i]+mf[x]=0$。所以$xg([\ ])-g([\ ])+mf[x]=0$，$\forall x\in G$。

由于$(d_1^*(g))[x]=gd_1[x]=xg([\ ])-g([\ ])$，$\forall x\in G$，故$(d_1^*(g))[x]+mf[x]=0$，$\forall x\in G$。因此$mf=d_1^*(-g)\in\mathrm{im}\,d_1^*$。

当$n>1$时，因为Q_{n-1}是有基$\{[x_1,\cdots,x_{n-1}]\,|\,x_i\in G\}$的自由左$\mathbf{Z}G$-模，故存在$g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_{n-1},A)$满足：

$$g[x_1,\cdots,x_{n-1}]=\sum_{i=1}^{m}f[x_1,\cdots,x_{n-1},y_i],\ \forall x_1,\cdots,x_{n-1}\in G.$$

因为 $f\in\ker d_{n+1}^*$，故 $fd_{n+1}=0$。因此 $fd_{n+1}[x_1,\cdots,x_n,y_i]=0$，$\forall x_1,\cdots,x_n\in G$，$i=1,\cdots,m$。从而 $\sum_{i=1}^{m}fd_{n+1}[x_1,\cdots,x_n,y_i]=0$，$\forall x_1,\cdots,x_n\in G$。但是

$$fd_{n+1}[x_1,\cdots,x_n,y_i]=x_1f[x_2,\cdots,x_n,y_i]$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^jf[x_1,\cdots,x_jx_{j+1},\cdots,x_n,y_i]$$
$$+(-1)^nf[x_1,\cdots,x_{n-1},x_ny_i]+(-1)^{n+1}f[x_1,\cdots,x_n],$$

故有

$$x_1g[x_2,\cdots,x_n]+\sum_{j=1}^{n-1}(-)^jg[x_1,\cdots,x_jx_{j+1},\cdots,x_n]$$
$$+(-1)^ng[x_1,\cdots,x_{n-1}]+(-1)^{n+1}mf[x_1,\cdots,x_n]=0.$$

由于 $(d_n^*(g))[x_1\cdots,x_n]=gd_n[x_1,\cdots,x_n]$，由此可知

$$(d_n^*(g))[x_1,\cdots,x_n]+(-1)^{n+1}mf[x_1,\cdots,x_n]=0,$$

因此 $mf=d_n^*((-1)^ng)\in\operatorname{im}d_n^*$，

到此就证明了 $m(f+\operatorname{im}d_n^*)=0$。故

$$mH^n(G,A)=0.$$

现在设

$$G=(x)=\{x^0=1,x,x^2,\cdots,x^{k-1}\}$$

是 x 生成的有限循环群，其阶为 k.

我们先来作平凡左**Z**G-模**Z**的一个特殊的自由分解，为此，命

$$D=x-1\in \mathbf{Z}G,$$
$$N=1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\in\mathbf{Z}G.$$

再命

$$\overline{D}:\ \mathbf{Z}G\longrightarrow\mathbf{Z}G$$

$$a \longmapsto Da;$$
$$\overline{N}: \mathbf{Z}G \longrightarrow \mathbf{Z}G$$
$$a \longmapsto Na.$$

因为G是Abel群，故$\mathbf{Z}G$是交换环，从而易知$\overline{D}$及$\overline{N}$都是左$\mathbf{Z}G$-映射。

我们证明，当$\mathbf{Z}$是平凡左$\mathbf{Z}G$-模时，

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}G \xrightarrow{\overline{D}} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\overline{N}} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\overline{D}} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \quad (\text{丁})$$

是左$\mathbf{Z}G$-正合列，其中 $\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i$.

事实上，因为 $\varepsilon\overline{D}(x^i) = \varepsilon(x^{i+1} - x^i) = 0$，故 $\varepsilon\overline{D} = 0$。又因为$DN = (x-1)(1+x+\cdots+x^{k-1}) = x^k - 1 = 0$，故$\overline{D}\,\overline{N} = 0$。同理，$\overline{N}\,\overline{D} = 0$。因此首先知(丁)是复形。

因为 $\ker\varepsilon = I_G$是环$\mathbf{Z}G$的增长理想，它是有基$G-1=\{x-1, x^2-1,\cdots,x^{k-1}-1\}$的自由$\mathbf{Z}$-模。因此当 $a \in \ker\varepsilon$ 时，可设 $a = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x^i - 1)$，从而有

$$a = (-m_1 - \cdots - m_{k-1})x^0 + m_1 x + \cdots + m_{k-1}x^{k-1}.$$

命 $\beta = -m_1 x + (-m_1 - m_2)x^2 + \cdots + (-m_1 - \cdots - m_{k-1})x^{k-1} \in \mathbf{Z}G$，则易知 $\overline{D}(\beta) = a$. 因此 $a = \overline{D}(\beta) \in \operatorname{im}\overline{D}$. 所以 $\operatorname{im}\overline{D} = \ker\varepsilon$.

又，若 $u = \sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i \in \ker\overline{D}$，则$\overline{D}(u) = 0$，因此$m_0(x-1) + m_1 x(x-1) + \cdots + m_{k-1}x^{k-1}(x-1) = 0$。于是 $m_0 = m_1 = \cdots = m_{k-1}$。从而 $u = m_0 N = \overline{N}(m_0 1) \in \operatorname{im}\overline{N}$。故 $\operatorname{im}\overline{N} = \ker\overline{D}$。类似地可以证明 $\operatorname{im}\overline{D} = \ker\overline{N}$.

这就证明了(丁)是平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的一个自由分解。

定理30.5 设 $G = (x)$是x生成的有限循环群，其阶为k；

D, N的意义如上。若A是左$\mathbf{Z}G$-模，我们定义

$$_N A = \{a \in A \mid Na = 0\}.$$

则有

(i) $H^0(G, A) \cong A^G$;

(ii) $H^{2n-1}(G, A) \cong {}_N A/(DA)$, $n \geq 1$;

(iii) $H^{2n}(G, A) \cong A^G/(NA)$, $n \geq 1$.

证　(i) 由定理30.1即得。

(ii) 取平凡左$\mathbf{Z}G$-模$\mathbf{Z}$的自由分解

$$\cdots \to \mathbf{Z}G \xrightarrow{\overline{D}} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\overline{N}} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\overline{D}} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

于是有复形

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G, A) \xrightarrow{\overline{D}^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G, A) \xrightarrow{\overline{N}^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G, A) \xrightarrow{\overline{D}^*} \cdots$$

从而有

$$H^{2n-1}(G, A) = \ker \overline{N}^* / \mathrm{im}\, \overline{D}^*, \quad n \geq 1.$$

首先，因为G是Abel群，故$\mathbf{Z}G$是交换环，从而易知$_N A$是左$\mathbf{Z}G$-模A的子模。

为了得到　$H^{2n-1}(G, A) \cong {}_N A/(DA)$，下面证明　$_N A$到$\ker \overline{N}^* / \mathrm{im}\, \overline{D}^*$有一个群同态满射，且其核恰是$DA$。

当$a \in {}_N A$时，命

$$f_a:\ \mathbf{Z}G \longrightarrow A$$
$$\alpha \longmapsto \alpha a,$$

则易知f_a是左$\mathbf{Z}G$-映射，又因为对于任何$\alpha \in \mathbf{Z}G$，$(\overline{N}^*(f_a))(\alpha) = (f_a \overline{N})(\alpha) = f_a(N\alpha) = (N\alpha)a = \alpha(Na) = 0$，故$\overline{N}^*(f_a) = 0$，从而$f_a \in \ker \overline{N}^*$。这样就得到一个映射

$$\varphi:\ {}_N A \longrightarrow \ker \overline{N}^*$$
$$a \longrightarrow f_a$$

容易验证φ是群同态单射。

进一步可以证明φ是满射。为此，设$g\in\ker\overline{N}^*$。命$a=g(1)\in A$，则$Na=Ng(1)=g(N)=(\overline{N}^*(g))(1)=0$.因此$a\in {}_NA$。而$f_a(\alpha)=\alpha a=\alpha g(1)=g(\alpha)$，$\forall\alpha\in \mathbf{Z}G$，故$f_a=g$，所以$g$是满射。于是$\varphi$：${}_NA\longrightarrow\ker\overline{N}^*$是群同构映射。

命ρ：$\ker\overline{N}^*\longrightarrow\ker\overline{N}^*/\mathrm{im}\overline{D}^*$是自然同态映射，则有群同态满射

$$\rho\varphi:\ {}_NA\longrightarrow\ker\overline{N}^*/\mathrm{im}\overline{D}^*.$$

若$a\in\ker\rho\varphi$，则$a\in{}_NA$，且$\rho\varphi(a)=0$。由$a\in{}_NA$有$Na=0$.由$\rho\varphi(a)=0$，有$f_a\in\mathrm{im}\overline{D}^*$。故有$g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G,A)$使$f_a=\overline{D}^*(g)=g\overline{D}$。因为$g(1)\in A$，而$f_a(1)=g\overline{D}(1)$，故$a=f_a(1)=g\overline{D}(1)=g(D)=Dg(1)\in DA$。因此$\ker\rho\varphi\subseteq DA$。

反之，设$Da\in DA$，其中$a\in A$，则$\rho\varphi(Da)=\rho(f_{Da})=f_{Da}+\mathrm{im}\overline{D}^*$，命$g=f_a\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G,A)$，则对任何$\alpha\in\mathbf{Z}G$，有$(\overline{D}^*(g))(\alpha)=(g\overline{D})(\alpha)=g(D\alpha)=f_a(D\alpha)=(D\alpha)a=\alpha(Da)=f_{Da}(\alpha)$.故$f_{Da}=\overline{D}^*(g)\in\mathrm{im}\,\overline{D}^*$。因此$\rho\varphi(Da)=0$。于是$DA\subseteq\ker\rho\varphi$，故$\ker\rho\varphi=DA$。

这就证明了

$$H^{2n-1}(G,A)\cong{}_NA/DA,\quad n\geqslant1.$$

(iii)仿(ii)证之即得。

推论30.1 设$G=(x)$是x生成的有限循环群，其阶为k。若A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模，则有

(i) $H^0(G,A)\cong A$;

(ii) $H^{2n-1}(G,A)\cong{}_kA=\{a\in A\,|\,ka=0\}$，$n\geqslant1$;

(iii) $H^{2n}(G,A)\cong A/(kA)$，$n\geqslant1$.

证 (i) 由定理30.1即得.

(ii) 因为A是平凡左$\mathbf{Z}G$-模．故当$a\in A$时，$Da=(x-1)a=xa-a=0$。因此$DA=0$，所以有

$$H^{2n-1}(G,A)\cong{}_NA.$$

又因为对于任何$a\in A$有$Na=(1+x+\cdots+x^{k-1})a=ka$,

故$_N A = {}_k A$. 因此 $H^{2n-1}(G, A) \cong {}_k A$, $n \geqslant 1$.

(iii) 因为A是平凡左 $\mathbf{Z}G$-模，故$A^G = A$，而刚才已证明 $Na = ka$, $\forall\, a \in A$,所以 $NA = kA$,因此 $H^{2n}(G, A) \cong A/(kA)$, $n \geqslant 1$.

第十章 谱 序 列

同调代数的基本研究对象除了函子 Hom, ⊗, Ext 及 Tor 以外，还有谱序列。在前面九章中我们已经研究了函子 Hom, ⊗, Ext 及 Tor，本章将对谱序列进行研究。

谱序列是由拓扑学中对于纤维丛的研究引起的，其主要应用在于代数拓扑。谱序列概念的代数化首先是 Koszul 作出的。本章仅对谱序列作纯代数的讨论。

§31 正 合 偶

谱序列的概念可以自然地由正合偶引出。我们将逐步地由正合偶引出谱序列的概念。

31.1 分次模及双分次模

定义31.1 一列左R-模 $M=\{M_p|p\in\mathbf{Z}\}$ 叫做一个左 R-分次模.又，若 $M=\{M_p|p\in\mathbf{Z}\}$ 及 $N=\{N_p|p\in\mathbf{Z}\}$ 是两个左 R-分次模，a 是一个固定的整数，则一列左 R-映射 $f=\{f_p:M_p\longrightarrow N_{p+a}|p\in\mathbf{Z}\}$叫做一个$a$次映射，记作 $f:M\longrightarrow N$。

例31.1 设已给一个左R-复形 (C,d)。若不考虑微分d，则 $C=\{C_p|p\in\mathbf{Z}\}$ 就是一个左 R-分次模. 左 R-链映射 f: $(C,d)\longrightarrow(C',d')$ 是C到C'的 0 次映射.同伦映射 s: $(C,d)\longrightarrow(C',d')$ 是C到C'的 1 次映射。微分d是C到 C的 -1次映射。

例31.2 设已给一个左R-复形(C,d)，则可得到一列同调模

$$H_*(C)=\{H_p(C)\mid p\in\mathbf{Z}\}.$$

于是 $H_*(C)$ 是一个左R-分次模。

注．若已给一个左 R-分次模 $C=\{C_p\mid p\in\mathbf{Z}\}$，则至少可以得到一个左$R$-复形

$$\cdots\longrightarrow C_{p+1}\xrightarrow{d_{p+1}}C_p\xrightarrow{d_p}C_{p-1}\longrightarrow\cdots$$

其中 $d_p=0$，$\forall p\in\mathbf{Z}$，它叫做有零微分的左 R-复形。

设 M,N,K 是三个左 R-分次模，$f: M\longrightarrow N$是 a 次映射，$g: N\longrightarrow K$是b次映射。命

$$gf=\{(gf)_p=g_{p+a}f_p: M_p\longrightarrow K_{p+a+b}\mid p\in\mathbf{Z}\},$$

则立刻看出 $gf: M\longrightarrow K$ 是 $a+b$ 次映射。

设M及N是两个左R-分次模，若对每一个 $p\in\mathbf{Z}$，N_p都是M_p的子模，则称N是M的一个分次子模。

若N是M的分次子模，则分次模

$$M/N=\{(M/N)_p=M_p/N_p\mid p\in\mathbf{Z}\}$$

叫做M对N的分次商模。可知 $\rho=\{\rho_p: M_p\to M_p/N_p\mid p\in\mathbf{Z}\}$ 是M到 M/N 的 0 次映射，其中ρ_p是自然同态映射。

设 M,N是两个左 R-分次模，并设 $f: M\longrightarrow N$ 是 a 次映射，则

$$\mathrm{im}f=\{(\mathrm{im}f)_p=\mathrm{im}f_{p-a}\mid p\in\mathbf{Z}\}$$

叫做 f 的象。

易知 $\mathrm{im}f$ 是N的分次子模。

同样，

$$\ker f=\{(\ker f)_p=\ker f_p\mid p\in\mathbf{Z}\}$$

是M的分次子模，它叫做 f 的核。

这样，当已给序列

$$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}K,\tag{I}$$

其中 f 是 a 次映射，g是 b 次映射，若满足

$$\mathrm{im}f=\ker g,$$

则称上述序列在N处正合。

容易知道，（I）在N处正合，当且仅当对于每一个$p\in\mathbf{Z}$，

$$M_p\xrightarrow{f_p}N_{p+a}\xrightarrow{g_{p+a}}K_{p+a+b}$$

都是正合列。

定义31.2 设M，N，K是三个左R-分次模，并设$f: M\longrightarrow N$，$g: N\longrightarrow K$，$h: K\longrightarrow M$分别是a,b,c次映射。若$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}K$在$N$处正合，$N\xrightarrow{g}K\xrightarrow{h}M$在$K$处正合，$K\xrightarrow{h}M\xrightarrow{f}N$在$M$处正合，则称图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & {\scriptstyle h}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & K & \end{array}$$

在每一个顶点处正合，并称此三角形是正合的。

例31.3 设已给一个左R-链映射短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$$

则有正合列

$$\cdots\longrightarrow H_n(A)\xrightarrow{H_n(f)}H_n(B)\xrightarrow{H_n(g)}H_n(c)\xrightarrow{\partial_n}$$
$$H_{n-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

记$H_*(f)=\{(H_*(f))_n=H_n(f)\mid n\in\mathbf{Z}\}$，$\partial=\{\partial_n\mid n\in\mathbf{Z}\}$，则易知有正合三角形

$$\begin{array}{ccc} H_*(A) & \xrightarrow{H_*(f)} & H_*(B) \\ & {\scriptstyle \partial}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle H_*(g)} & \\ & H_*(C) & \end{array}$$

其中$H_*(f)$及$H_*(g)$都是0次的，∂是-1次的。

定义31.3 一集左R-模$M=\{M_{p,q}|(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$叫做一个左$R$-双分次模。又，若$M$及$N$是两个左$R$-双分次模，$(a,b)$是确定的整数对，则一集左$R$-映射$f=\{f_{p,q}: M_{p,q}\longrightarrow N_{p+a,q+b}|(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$叫做一个$(a,b)$双次映射，记作$f: M\longrightarrow N$。

设M,N,K是三个左R-双分次模，$f: M\longrightarrow N$是(a,b)双次映射，$g: N\longrightarrow K$是(a',b')双次映射，命

$$gf=\{(gf)_{p,q}=g_{p+a,q+b}f_{p,q}: M_{p,q}\longrightarrow K_{p+a+a',q+b+b'}|$$
$$(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\},$$

则立刻看出$gf: M\longrightarrow K$是$(a+a',b+b')$双次映射。

设M及N是两个左R-双分次模。若对于每一对$(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，$N_{p,q}$都是$M_{p,q}$的子模，则称$N$是$M$的一个双分次子模。

若N是M的双分次子模，则双分次模

$$M/N=\{(M/N)_{p,q}=M_{p,q}/N_{p,q}|(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$$

叫做M对N的双分次商模。命$\rho_{p,q}: M_{p,q}\longrightarrow M_{p,q}/N_{p,q}$是自然同态映射，则$\rho=\{\rho_{p,q}|(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$是M到$M/N$的$(0,0)$-双次映射。

设M,N是两个左R-双分次模，并设$f: M\longrightarrow N$是(a,b)双次映射，则

$$\mathrm{im}f=\{(\mathrm{im}f)_{p,q}=\mathrm{im}f_{p-a,q-b}|(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$$

叫做f的象，可知$\mathrm{im}f$是N的双分次子模。

同样，

$$\ker f=\{(\ker f)_{p,q}=\ker f_{p,q}|(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$$

是M的双分次子模，它叫做f的核。

这样，当已给序列

$$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}K, \tag{II}$$

其中f是(a,b)双次映射，g是(a',b')双次映射，若满足

$$\operatorname{im} f = \ker g,$$

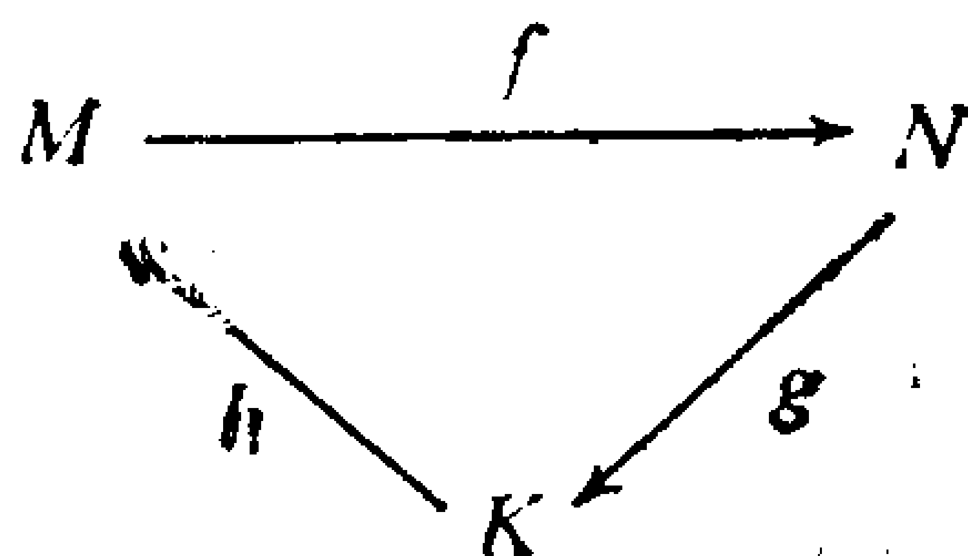
则称上述序列在N处正合.

容易知道，(Ⅱ) 在N处正合，当且仅当对于每一对 $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$,

$$M_{p,q} \xrightarrow{f_{p,q}} N_{p+a,q+b} \xrightarrow{g_{p+a,q+b}} K_{p+a+a',q+b+b'}$$

都是正合列.

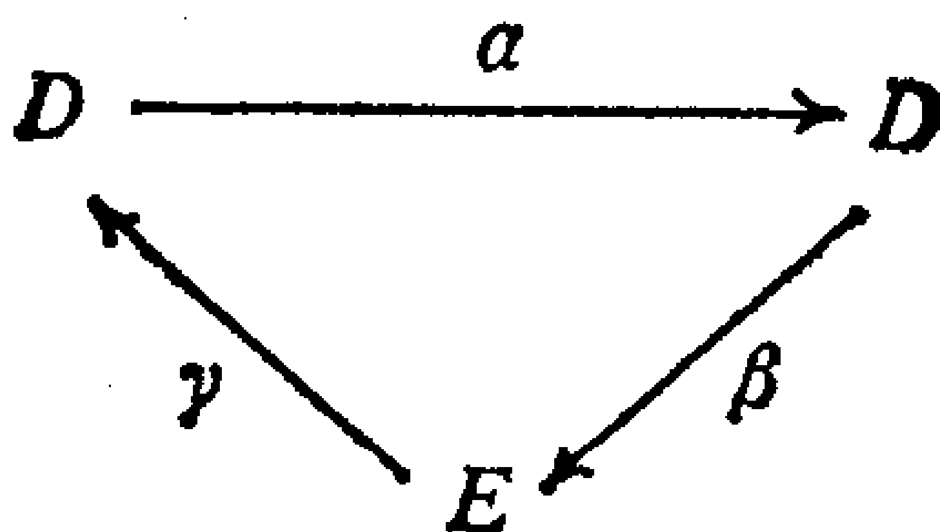
定义31.4 设 M, N, K 是三个左 R-双分次模，并设 f: $M \longrightarrow N$, g: $N \longrightarrow K$, h: $K \longrightarrow M$ 分别是 (a, a'), (b, b') 及 (c, c') 双次映射. 若 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ 在N处正合, $N \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} M$ 在K处正合，$K \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N$ 在M处正合，则称图



在每一个顶点处正合，并称此三角形是正合的.

31.2 正合偶

定义31.3 设已给一对左 R-双分次模 D 及 E, 并设 α: $D \longrightarrow D$, β: $D \longrightarrow E$ 及 γ: $E \longrightarrow D$ 分别是 (a, a'), (b, b') 及 (c, c') 双次映射. 若图



是一个正合三角形，则称 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 是一个正合偶.

容易知道，$(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 是一个正合偶，当且仅当对于每一对 $(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，

$$\cdots\longrightarrow E_{p-c,q-c'}\xrightarrow{\gamma_{p-c,q-c'}}D_{p,q}\xrightarrow{\alpha_{p,q}}D_{p+a,q+a'}\xrightarrow{\beta_{p+a,q+a'}}E_{p+a+b,q+a'+b'}\longrightarrow\cdots$$

都是正合列。

我们可以利用函子来作正合偶，即有下面定理。

定理31.1 设已给两个加法共变函子

$$G:\ R\text{-mod}\longrightarrow S\text{-mod},$$
$$F:\ S\text{-mod}\longrightarrow R\text{-mod},$$

且满足：

(i) F是左正合的；

(ii) 当$p\geqslant 1$时，$(R^pF)(G(E))=0$，$\forall$ 内射左 R-模 E。

若A是左R-模，我们取定A的一个内射分解

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\longrightarrow\cdots,$$

并记 $Z^q=\ker G(d^q)$。

命

$$E_{p,q}=\begin{cases}(R^pF)((R^qG)(A)), & p\geqslant 0\text{且}q\geqslant 0;\\ 0, & \text{其余}(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},\end{cases}$$

$$D_{p,q}=\begin{cases}(R^{p+1}F)(Z^{q-1}), & p\geqslant 0\ \text{且}\ q\geqslant 1;\\ (R^{p+q}(FG))(A), & p=-1\text{且}q\geqslant 1;\\ 0, & \text{其余}\ (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.\end{cases}$$

则存在双次数分别是 $(-1,1)$，$(1,-1)$ 及$(1,0)$的双次映射 $\alpha:D\longrightarrow D$，$\beta:D\longrightarrow E$，$\gamma:E\longrightarrow D$ 使 $(D,E;\alpha,\beta,\gamma)$ 是一个正合偶，也即有正合三角形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ & \nwarrow^{\nu} \quad \swarrow_{\beta} & \\ & E & \end{array}$$

证 先引进简化记号 G^p, F^p, $(FG)^p$ 如下:

$$G^p = R^p G, \quad F^p = R^p F, \quad (FG)^p = R^p(FG).$$

在证明本定理以前，我们先分析一下应怎样证明.

首先，若已有 α, β, γ 使 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 是正合偶，则应该对每一个 $q \geqslant 0$ 都有一个正合列

$$\cdots \to E_{-1,q+1} \longrightarrow D_{0,q+1} \longrightarrow D_{-1,q+2} \longrightarrow E_{0,q+1} \longrightarrow$$
$$D_{1,q+1} \longrightarrow D_{0,q+2} \longrightarrow E_{1,q+1} \longrightarrow$$
$$D_{2,q+1} \longrightarrow D_{1,q+2} \longrightarrow E_{2,q+1} \longrightarrow \cdots$$

根据E及D的定义， 利用刚刚引入的简化记号，并由于F是左正合的,从而 F^0与F 自然等价，这就是应该对于每一个 $q \geqslant 0$ 都有一个正合列

$$0 \longrightarrow F^1(Z^q) \longrightarrow (FG)^{q+1}(A) \longrightarrow F(G^{q+1}(A)) \longrightarrow$$
$$F^2(Z^q) \longrightarrow F^1(Z^{q+1}) \longrightarrow F^1(G^{q+1}(A)) \longrightarrow \cdots \quad (*)$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow F^{p+1}(Z^q) \longrightarrow F^p(Z^{q+1}) \longrightarrow F^p(G^{q+1}(A)) \longrightarrow \cdots$$

反过来,根据D及E的定义，明显知道只要对于每一个 $q \geqslant 0$ 确能得到一个正合列(*),则按正合列中出现的映射 来 定义 α, β及γ时，定理即得到证明.

为了对于每一个 $q \geqslant 0$ 得到正合列(*),我们考虑 A 的已给定的内射分解

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

由此可得复形

$$0 \longrightarrow G(E^0) \xrightarrow{G(d^0)} G(E^1) \xrightarrow{G(d^1)} G(E^2) \longrightarrow \cdots$$

于是有

$$G^q(A)=(R^qG)(A)=\ker G(d^q)/\operatorname{im}G(d^{q-1}).$$

记 $B^q=\operatorname{im}G(d^{q-1})$，则有

$$G^q(A)=Z^q/B^q,$$

因此有短正合列

$$0\to B^{q+1}\xrightarrow{\lambda_{q+1}} Z^{q+1}\xrightarrow{\rho_{q+1}} G^{q+1}(A)\to 0$$

其中 ρ_{q+1} 是自然同态映射。

由定理18.9，并由于F^0 与 F 自然等价，知有正合列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow F(B^{q+1})&\xrightarrow{F(\lambda_{q+1})}F(Z^{q+1})\xrightarrow{F(\rho_{q+1})}\\ F(G^{q+1}(A))&\longrightarrow F^1(B^{q+1})\longrightarrow F^1(Z^{q+1})\longrightarrow\\ &F^1(G^{q+1}(A))\longrightarrow\cdots\quad(\text{甲})\\ \cdots\qquad&\cdots\qquad\cdots\\ \cdots\longrightarrow F^p(B^{q+1})&\longrightarrow F^p(Z^{q+1})\longrightarrow F^p(G^{q+1}(A))\longrightarrow\cdots\end{aligned}$$

可以看到，正合列(甲)已接近于所需要的正合列(＊)。

为了得到所需要的正合列（＊），我们要将（甲）加以改造。为此，考虑短正合列

$$0\longrightarrow Z^q\xrightarrow{\mu_q}G(E^q)\xrightarrow{G(d^q)}B^{q+1}\longrightarrow 0$$

从而有正合列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow F(Z^q)&\xrightarrow{F(\mu_q)}F(G(E^q))\xrightarrow{F(G(d^q))}F(B^{q+1})\longrightarrow\\ F^1(Z^q)&\longrightarrow F^1(G(E^q))\longrightarrow F^1(B^{q+1})\longrightarrow\cdots\\ \cdots\qquad&\cdots\qquad\cdots\\ \cdots\longrightarrow F^p(Z^q)&\longrightarrow F^p(G(E^q))\longrightarrow F^p(B^{q+1})\longrightarrow\\ &F^{p+1}(Z^q)\longrightarrow F^{p+1}(G(E^q))\longrightarrow\cdots\quad(\text{乙})\end{aligned}$$

当考虑(乙)中已写出的最后四项时，因为由定理所给的条件知 $F^p(G(E^q))=F^{p+1}(G(E^q))=0,\ \forall p\geqslant 1$，故有 $F^p(B^{q+1})$

$\cong F^{p+1}(Z^q)$，$\forall p\geqslant 1$。因此由正合列(甲)得到正合列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow F(B^{q+1}) &\xrightarrow{F(\lambda_{q+1})} F(Z^{q+1}) \xrightarrow{F(\rho_{q+1})} \\ &F(G^{q+1}(A)) \longrightarrow F^2(Z^q) \longrightarrow F^1(Z^{q+1}) \\ &\longrightarrow F^1(G^{q+1}(A)) \longrightarrow \cdots\cdots \qquad\qquad (\text{甲})' \\ &\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \cdots \longrightarrow F^{p+1}(Z^q) &\longrightarrow F^p(Z^{q+1}) \longrightarrow F^p(G^{q+1}(A)) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

我们看到，正合列(甲)′与所需的正合列(＊)已经只有最前面两项不相同了。

为了由(甲)′最终得到(＊)，考虑(乙)中最前面的五项。因为由定理所给的条件知$F^1(G(E^q))=0$，故有正合列

$$F(G(E^q)) \xrightarrow{FG(d^q)} F(B^{q+1}) \xrightarrow{\xi} F^1(Z^q) \longrightarrow 0.$$

命 $h=F(\lambda_{q+1})FG(d^q)$: $F(G(E^q)) \longrightarrow F(Z^{q+1})$，则可唯一地补成交换图:

$$\begin{array}{ccc} FG(E^q) & \xrightarrow{1} & FG(E^q) \\ {\scriptstyle FG(d^q)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ F(B^{q+1}) & \xrightarrow{F(\lambda_{q+1})} & F(Z^{q+1}) \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ F^1(Z^q) & \xrightarrow{\psi} & W=F(Z^{q+1})/\mathrm{im}h \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

其中η是自然同态映射。且因 $F(\lambda_{q+1})$ 是单射，故补出的ψ是单射。

考虑 $F(Z^{q+1}) \xrightarrow{F(\rho_{q+1})} F(G^{q+1}(A))$。因为 $F(\rho_{q+1})h=F(\rho_{q+1})\cdot F(\lambda_{q+1})FG(d^q)=F(\rho_{q+1}\lambda_{q+1})FG(d^q)=0$，故 $\mathrm{im}h\subseteq \ker F(\rho_{q+1})$。因此可唯一地补成交换图:

$$\begin{array}{ccc} F(Z^{q+1}) & \xrightarrow{F(\rho_{q+1})} & F(G^{q+1}(A)); \\ & \searrow^{\eta} \quad \nearrow^{\varphi} & \\ & F(Z^{q+1})/\mathrm{im}h & \end{array}$$

于是有交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & FG(E^q) & \xrightarrow{1} & FG(E^q) & & \\ & & \downarrow FG(d^q) & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & F(B^{q+1}) & \xrightarrow{F(\lambda_{q+1})} & F(Z^{q+1}) & \xrightarrow{F(\rho_{q+1})} & \\ & & \downarrow \xi & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & F^1(Z^q) & \xrightarrow{\psi} & W & \xrightarrow{\varphi} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} F(G^{q+1}(A)) & \longrightarrow & F^2(Z^q) & \longrightarrow & \cdots\cdots\cdots \quad (甲)' \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \\ F(G^{q+1}(A)) & \longrightarrow & F^2(Z^q) & \longrightarrow & \cdots\cdots\cdots \quad (甲)'' \end{array}$$

由于上图中左、右两个竖列都是正合列，且（甲）′原是正合列，容易验证（甲）″也是正合列。

现在我们看到正合列（甲）″与所需的正合列（*）只相差一项 W。下面我们证明 $W \cong (FG)^{q+1}(A)$。由于 $W = F(Z^{q+1})/\mathrm{im}h$，$(FG)^{q+1}(A) = \ker(FG(d^{q+1}))/\mathrm{im}(FG(d^q))$，故只要证明 $F(Z^{q+1})$ 到 $\ker FG(d^{q+1})/\mathrm{im}FG(d^q)$ 有一个同态满射，且其核恰是 $\mathrm{im}h$。

因为有正合列

$$0 \longrightarrow Z^{q+1} \xrightarrow{\mu_{q+1}} G(E^{q+1}) \xrightarrow{G(d^{q+1})} G(E^{q+2})$$

而 F 是左正合的，故有正合列

$$0 \longrightarrow F(Z^{q+1}) \xrightarrow{F(\mu_{q+1})} FG(E^{q+1}) \xrightarrow{FG(d^{q+1})} FG(E^{q+2}).$$

因此$\mathrm{im}F(\mu_{q+1}) = \ker FG(d^{q+1})$.命$\delta$: $\ker FG(d^{q+1}) \longrightarrow (\ker FG(d^{q+1}))/(\mathrm{im}FG(d^q))$是自然同态映射，就得到同态满射

$$\delta F(\mu_{q+1}): F(Z^{q+1}) \twoheadrightarrow (\ker FG(d^{q+1}))/(\mathrm{im}FG(d^q)).$$

由序列

$$G(E^q) \xrightarrow{G(d^q)} G(E^{q+1}),\ \mathrm{im}G(d^q) = B^{q+1} \overset{\lambda_{q+1}}{\hookrightarrow} Z^{q+1} \overset{\mu_{q+1}}{\hookrightarrow} G(E^{q+1})$$

知 $\mu_{q+1}\lambda_{q+1}G(d^q) = G(d^q)$， 故 $F(\mu_{q+1})h = F(\mu_{q+1})F(\lambda_{q+1})FG(d^q) = FG(d^q)$， 从而 $F(\mu_{q+1})(\mathrm{im}h) = \mathrm{im}FG(d^q)$。由于$F(\mu_{q+1})$ 是单射，故 $\ker\delta F(\mu_{q+1}) = \mathrm{im}h$。这就证明了

$$W \cong (FG)^{q+1}(A).$$

这样，对于每一个 $q \geqslant 0$ 确可得到一个正合列(∗)。从而证明了定理。

§32 导来偶及谱序列

我们将在本节中给出谱序列的定义，并指出可以用正合偶的导来偶作出谱序列。

32.1 正合偶 $(D, E;\ \alpha, \beta, \gamma)$ 的导来偶

设已给一个正合偶 $(D, E;\ \alpha, \beta, \gamma)$：

$$\begin{array}{ccc} & (a,\ a') & \\ D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ (c,\ c')\ \ {\scriptstyle\gamma}\nwarrow & & \swarrow{\scriptstyle\beta}\ \ (b\ \ b') \\ & E & \end{array}$$

其中α，β，γ的双次数分别是(a, a')，(b, b')及(c, c')。

我们根据正合偶$(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$来作一个正合偶$(D^2, E^2; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$如下。

先命

$$d^1 = \beta\gamma.$$

因为$d^1{}_{p,q} = (\beta\gamma)_{p,q} = \beta_{p+c,q+c'}\gamma_{p,q}: E_{p,q} \longrightarrow E_{p+c+b,q+c'+b'}$，故$d^1: E \longrightarrow E$的双次数是$(b+c, b'+c')$。

又因为$d^1 d^1 = (\beta\gamma)(\beta\gamma) = \beta(\gamma\beta)\gamma$，而由正合偶的定义易知$\gamma\beta = 0$，即$(\gamma\beta)_{p,q} = 0$，$\forall (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$，故

$$d^1 d^1 = 0.$$

于是$(d^1 d^1)_{p,q} = 0$，即$d^1_{p+b+c,q+b'+c'} d^1_{p,q} = 0$，$\forall (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$。因此对于每一个$(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$，都有一个复形：

$$\cdots \longrightarrow E_{p-(b+c),q-(b'+c')} \xrightarrow{d^1_{p-(b+c),q-(b'+c')}} E_{p,q} \xrightarrow{d^1_{p,q}} E_{p+(b+c),q+(b'+c')} \longrightarrow \cdots$$

我们定义E^2是

$$E^2_{p,q} = \ker d^1_{p,q} / \operatorname{im} d^1_{p-(b+c),q-(b'+c')}, \quad \forall\ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

再定义D^2是

$$D^2 = \operatorname{im}\alpha.$$

于是有

$$D^2_{p,q} = (\operatorname{im}\alpha)_{p,q} = \operatorname{im}\alpha_{p-a,q-a'} \subseteq D_{p,q}.$$

接着，我们定义α^2是

$$\alpha^2_{p,q}: \quad D^2_{p,q} \longrightarrow D^2_{p+a,q+a'}$$
$$x \longmapsto \alpha_{p,q}(x),$$

因此有α^2：$D^2 \longrightarrow D^2$，其双次数是(a, a')，与α的双次数相同。

再定义β^2是

$$\beta^2_{p,q}: \quad D^2_{p,q} \longrightarrow E^2_{p-a+b,q-a'+b'}$$
$$= \ker d^1_{p-a+b,q-a'+b'} / \operatorname{im} d^1_{p-a-c,q-a'-c'}$$

$$y \longmapsto \beta_{p-a,q-a'}(x) + \mathrm{im}d^1_{p-a-c,q-a'-c'},$$

其中 $x \in D_{p-a,q-a'}$ 满足 $\alpha_{p-a,q-a'}(x) = y$。

于是有β^2: $D^2 \longrightarrow E^2$, 其双次数是 $(b-a, b'-a')$。

最后，我们定义γ^2是

$$\gamma^2_{p,q}: E^2_{p,q} = \mathrm{ker}d^1_{p,q}/\mathrm{im}d^1_{p-(b+c),q-(b'+c')} \longrightarrow D^2_{p+c,q+c'}$$

$$x + \mathrm{im}d^1_{p-(b+c),q-(b'+c')} \longmapsto \gamma_{p,q}(x),$$

于是有γ^2: $E^2 \longrightarrow D^2$, 其双次数是 (c, c'), 与γ的双次数相同。

下面证明 $(D^2, E^2; \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ 是一个正合偶。

我们先证明 $(\mathrm{im}\alpha^2)_{p,q} \subseteq (\mathrm{ker}\beta^2)_{p,q}$. 可知这就是要证明 $\mathrm{im}\alpha^2_{p-a,q-a'} \subseteq \mathrm{ker}\beta^2_{p,q}$。也即要证明

$$\beta^2_{p,q}\alpha^2_{p-a,q-a'} = 0, \quad \forall (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

为此，设$x \in D^2_{p-a,q-a'}$。 则有

$$\beta^2_{p,q}\alpha^2_{p-a,q-a'}(x) = \beta_{p-a,q-a'}(x) + \mathrm{im}d'_{p-a-c,q-a'-c'}.$$

因为 $x \in D^2_{p-a,q-a'} = \mathrm{im}\alpha_{p-2a,q-2a'}$, 故有 $w \in D_{p-2a,q-2a'}$ 使 $x = \alpha_{p-2a,q-2a'}(w)$。 由于 $\beta\alpha = 0$, 故 $(\beta\alpha)_{p-2a,q-2a'} = 0$. 即 $\beta_{p-a,q-a'}\alpha_{p-2a,q-2a'} = 0$。 因此$\beta_{p-a,q-a'}(x) = 0$。所以 $\beta^2_{p,q}\alpha^2_{p-a,q-a'} = 0$。这就证明了 $(\mathrm{im}\alpha^2)_{p,q} \subseteq (\mathrm{ker}\beta^2)_{p,q}$.

同样可以证明$(\mathrm{im}\beta^2)_{p,q} \subseteq (\mathrm{ker}\gamma^2)_{p,q}$, $(\mathrm{im}\gamma^2)_{p,q} \subseteq (\mathrm{ker}\alpha^2)_{p,q}$。

我们再证明 $(\mathrm{ker}\alpha^2)_{p,q} \subseteq (\mathrm{im}\gamma^2)_{p,q}$, 也即证明

$$\mathrm{ker}\alpha^2_{p,q} \subseteq \mathrm{im}\gamma^2_{p-c,q-c'}, \quad \forall (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

为此，设 $x \in \mathrm{ker}\alpha^2_{p,q}$, 则 $\alpha^2_{p,q}(x) = 0$。从而 $\alpha_{p,q}(x) = 0$。因此 $x \in \mathrm{ker}\,\alpha_{p,q} = (\mathrm{ker}\alpha)_{p,q} = (\mathrm{im}\gamma)_{p,q} = \mathrm{im}\gamma_{p-c,q-c'}$. 故有 $y \in E_{p-c,q-c'}$ 使 $x = \gamma_{p-c,q-c'}(y)$。

但是 $x \in D^2_{p,q} = (\mathrm{im}\alpha)_{p,q} = (\mathrm{ker}\beta)_{p,q} = \mathrm{ker}\beta_{p,q}$, 故 $\beta_{p,q}(x) = 0$。所以 $\beta_{p,q}\gamma_{p-c,q-c'}(y) = 0$。 而 $d^1_{p-c,q-c'} = \beta_{p,q}\gamma_{p-c,q-c'}$, 故 $d^1_{p-c,q-c'}(y) = 0$。因此 $y \in \mathrm{ker}d^1_{p-c,q-c'}$。

于是 $x = \gamma_{p-c,q-c'}(y) = \gamma^2_{p-c,q-c'}(y + \mathrm{im}\,d^1_{p-b-2c,q-b'-2c'}) \in$

$\operatorname{im}\gamma^2_{p-c,q-c'}$。故 $(\ker\alpha^2)_{p,q}\subseteq(\operatorname{im}\gamma^2)_{p,q}$，$\forall\,(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$。

同样可以证明 $(\ker\beta^2)_{p,q}\subseteq(\operatorname{im}\alpha^2)_{p,q}$，$(\ker\gamma^2)_{p,q}\subseteq(\operatorname{im}\beta^2)_{p,q}$。因此 $\operatorname{im}\alpha^2=\ker\beta^2$，$\operatorname{im}\beta^2=\ker\gamma^2$，$\operatorname{im}\gamma^2=\ker\alpha^2$。这就证明了 $(D^2,\ E^2;\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2)$ 是一个正合偶。

定义32.1 正合偶 $(D^2,E^2;\ \alpha^2,\beta^2,\ \gamma^2)$ 叫做正合偶 $(D,\ E;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的第 2 导来偶。

$(D^2,\ E^2;\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2)$ 的第 2 导来偶记作 $(D^3,E^3;\ \alpha^3,\ \beta^3,\ \gamma^3)$，叫做 $(D,\ E;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的第 3 导来偶，等等。

记 $D^1=D$，$E^1=E$，$\alpha^1=\alpha$，$\beta^1=\beta$，$\gamma^1=\gamma$，并称 $(D^1,\ E^1;\ \alpha^1,\ \beta^1,\ \gamma^1)$ 是 $(D,\ E;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的第 1 导来偶。这样，对于每一个正整数 r，都存在正合偶 $(D,\ E;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的第 r 导来偶，且知 $(D^{r+1},E^{r+1};\ \alpha^{r+1},\beta^{r+1},\gamma^{r+1})$ 是 $(D^r,\ E^r;\ \alpha^r,\ \beta^r,\ \gamma^r)$ 的第 2 导来偶。又，若 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 的双次数分别是 $(a,\ a')$，$(b,\ b')$ 及 $(c,\ c')$，则易知有

(i) α^r，β^r，γ^r 的双次数分别是 (a,a')，$(-(r-1)a+b,\ -(r-1)a'+b')$ 及 $(c,\ c')$；

(ii) $d^r=\beta^r\gamma^r$：$E^r\longrightarrow E^r$ 的双次数是 $(-(r-1)a+b+c,\ -(r-1)a'+b'+c')$，且 $d^rd^r=0$；

(iii) $E^{r+1}_{p,q}=\ker d^r_{p,q}/\operatorname{im}d^r_{p-(-(r-1)a+b+c),\,q-(-(r-1)a'+b'+c')}$，

$$\forall\,(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

32.2 谱 序 列

定义32.2 设对于每一个正整数 r，都已给定了一个双分次模 E^r 及一个 $(a_r,\ b_r)$ 双次映射 d^r：$E^r\longrightarrow E^r$。若满足

(i) $d^rd^r=0$；

(ii) $E^{r+1}=\ker d^r/\operatorname{im}d^r$，

则称序列 $\{(E^r,\ d^r)\,|\,r\geqslant1\}$ 是一个谱序列。

定义中的条件 (ii) 就是

$$E^{r+1}_{p,q}=\ker d^r_{p,q}/\operatorname{im}d^r_{p-a_r,\,q-b_r}\ ,\quad \forall\,(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

由此可见，从一个正合偶 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 出发，依次作其第1，第2，第3，…导来偶时，就得到一个谱序列$\{(E^r, d^r)|r\geqslant 1\}$。这个谱序列叫做正合偶 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 确定的谱序列。

当 $\{(E^r,d^r)|r\geqslant 1\}$ 是一个谱序列，d^r 的双次数是 (a_r, b_r) 时，对于给定的 $(p, q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$及正整数 r，将复形

$$\cdots\longrightarrow E^r_{p-a_r,q-b_r}\xrightarrow{d^r_{p-a_r,q-b_r}}E^r_{p,q}\xrightarrow{d^r_{p,q}}E^r_{p+a_r,q+b_r}\longrightarrow\cdots$$

的同调模 $\ker d^r_{p,q}/\operatorname{im} d^r_{p-a_r,q-b_r}$ 记成 $H_{p,q}(E^r,d^r)$，并记$H(E^r, d^r)=\{H_{p,q}(E^r,d^r)|(p, q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$，则定义中的条件 (ii) 就是

$$E^{r+1}=H(E^r, d^r).$$

为了对谱序列作进一步的讨论，我们引进模的子商，分次模的子商及双分次模的子商的概念。

设已给左R-模 M。若有子模 $M''\subseteq M'\subseteq M$，则称 M'/M'' 是M的一个子商。

设已给左R-分次模M，若有分次子模 $M''\subseteq M'\subseteq M$，则称 M'/M''是M的一个子商。

同样，设已给左R-双分次模M. 若有双分次子模 $M''\subseteq M'\subseteq M$，则称$M'/M''$ 是M的一个子商。

例32.1 设已给一个左R-复形 (C, d)：

$$\cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{d_{q+1}}C_q\xrightarrow{d_q}C_{q-1}\longrightarrow\cdots$$

由于 $\operatorname{im} d_{q+1}\subseteq\ker d_q\subseteq C_q$，故 $H_q(C)=\ker d_q/\operatorname{im} d_{q+1}$是$C_q$的一个子商. 又，$H_*(C)=\ker d/\operatorname{im} d$ 是C的一个子商。

模的子商具有“传递性”，即：若A是B的子商，B是C的子商，则可视A是C的子商. 事实上，因为B是C的子商，故有子模 $C''\subseteq C'\subseteq C$ 使 $B=C'/C''$。又因为 A 是B的子商，故有子模 $Y/C''\subseteq X/C''\subseteq B$ 使 $A=(X/C'')/(Y/C'')\cong X/Y$，其中$Y\subseteq X\subseteq C$，因此可视$A$是$C$ 的子商.

现在设已给一个谱序列 $\{(E^r, d^r) | r \geqslant 1\}$，其中 $d^r: E^r \longrightarrow E^r$ 的双次数是 (a_r, b_r)，于是有

$$E_{p,q}^{r+1} = \ker d_{p,q}^r / \operatorname{im} d_{p-a_r, q-b_r}^r, \quad \forall (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

因为 $\operatorname{im} d_{p-a_r, q-b_r}^r \subseteq \ker d_{p,q}^r \subseteq E_{p,q}^r$，故 $E_{p,q}^{r+1}$ 是 $E_{p,q}^r$ 的子商，$\forall (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$。由此，或由 $E^{r+1} = \ker d^r / \operatorname{im} d^r$，$\operatorname{im} d^r \subseteq \ker d^r \subseteq E^r$ 知 E^{r+1} 是 E^r 的子商。于是由子商具有"传递性"知 $E_{p,q}^{r+1}$ 也可看成是 $E_{p,q}^{r-1}$，…，$E_{p,q}^2$，$E_{p,q}^1$ 的子商，E^{r+1} 也可看成是 $E^{r-1}, \cdots, E^2$，E^1 的子商。

记 $Z^{r+1} = \ker d^r$，$B^{r+1} = \operatorname{im} d^r$，则

$$E^{r+1} = Z^{r+1} / B^{r+1}.$$

因为 E^{r+1} 是 E^r 的子商，故有 $Y/B^r \subseteq X/B^r \subseteq Z^r/B^r$ 使 $Z^{r+1}/B^{r+1} = E^{r+1} = (X/B^r)/(Y/B^r)$，$B^r \subseteq Y \subseteq X \subseteq Z^r$。为了简化讨论，可以认为 $Z^{r+1}/B^{r+1} = X/Y$，并进一步认为 $Z^{r+1} = X$，$B^{r+1} = Y$。这样就有 $B^r \subseteq B^{r+1} \subseteq Z^{r+1} \subseteq Z^r$，从而有

$$0 \subseteq B^2 \subseteq B^3 \subseteq \cdots \subseteq B^r \subseteq B^{r+1} \subseteq \cdots \subseteq Z^{r+1} \subseteq Z^r \subseteq \cdots \subseteq E^2$$

于是可以命

$$Z_{p,q}^\infty = \bigcap_{r=2}^{\infty} Z_{p,q}^r, \quad B_{p,q}^\infty = \bigcup_{r=2}^{\infty} B_{p,q}^r$$

并命

$$E_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty.$$

再命

$$E^\infty = \{E_{p,q}^\infty\}, \quad Z^\infty = \{Z_{p,q}^\infty\}, \quad B^\infty = \{B_{p,q}^\infty\},$$

则有

$$E^\infty = Z^\infty / B^\infty.$$

我们称双分次模 E^∞ 是谱序列 $\{(E^r, d^r) | r \geqslant 1\}$ 的极限项。容易看出，当 r 增大时，E^r 确"逼近"极限项 E^∞。

§33 滤链及谱序列的收敛性

33.1 滤链

我们先给出复形的滤链及分次模的滤链的定义。

定义33.1 设已给一个左R-复形

$$C:\qquad \cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{d_{q+1}}C_q\xrightarrow{d_q}C_{q-1}\longrightarrow\cdots$$

若$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$是$C$的一列子复形，且复形$F^mC$是复形$F^{m+1}C$的子复形

$$\cdots\subseteq F^{p-1}C\subseteq F^pC\subseteq F^{p+1}C\subseteq\cdots,$$

则称$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$是复形$C$的一个滤链。

定义33.2 设已给一个左R-分次模K，若$\{F^pK\mid p\in\mathbf{Z}\}$是$K$的一列分次子模，且分次模$F^mK$是分次模$F^{m+1}K$的分次子模

$$\cdots\subseteq F^{p-1}K\subseteq F^pK\subseteq F^{p+1}K\subseteq\cdots,$$

则称$\{F^pK\mid p\in\mathbf{Z}\}$是分次模$K$的一个滤链。

我们在本段中要完成两件事：一是证明利用一个复形及其一个滤链可以确定出一个正合偶，从而又可确定出一个谱序列；二是证明利用一个复形C及其一个滤链可以确定出复形C的同调分次模$H_*(C)=\{H_n(C)\mid n\in\mathbf{Z}\}$的一个滤链，即有下面两个定理。

定理33.1 设C是一个左R-复形

$$C:\qquad \cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{d_{q+1}}C_q\xrightarrow{d_q}C_{q-1}\longrightarrow\cdots,$$

并设$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$是$C$的一个滤链，则存在一个正合偶$(D, E;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$，其中$\alpha$，$\beta$，$\gamma$的双次数分别是$(1,-1)$，$(0,0)$及$(-1,\ 0)$，即有正合三角形

$$\begin{array}{ccc} & (1,-1) & \\ D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle (-1,0)}\ \gamma \nwarrow & & \swarrow \beta\ {\scriptstyle (0,0)} \\ & E & \end{array}$$

证　先简记

$$F^p = F^p C, \quad \forall\, p \in \mathbf{Z}$$

为了作出这样的一个正合偶，对于 $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$，我们定义 $D_{p,q}$ 是复形 F^p 的第 $p+q$ 同调模，即定义

$$D_{p,q} = H_{p+q}(F^p).$$

这样我们就得到一个左 R-双分次模 $D = \{D_{p,q} | (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$.

对于 $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$，我们定义 $E_{p,q}$ 是商复形 F^p/F^{p-1} 的第 $p+q$ 同调模，即定义

$$E_{p,q} = H_{p+q}(F^p/F^{p-1}),$$

这样就得到一个左 R-双分次模 $E = \{E_{p,q} | (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$.

接着，我们来定义 α, β, γ.

因为对于每一个 $p \in \mathbf{Z}$ 都有左 R-短正合列

$$0 \longrightarrow (F^{p-1})_n \hookrightarrow (F^p)_n \longrightarrow \frac{(F^p)_n}{(F^{p-1})_n} \longrightarrow 0, \quad \forall\, n \in \mathbf{Z}$$

因此对于每一个 $p \in \mathbf{Z}$ 都有一个左 R-链映射短正合列

$$0 \longrightarrow F^{p-1} \longrightarrow F^p \longrightarrow F^p/F^{p-1} \longrightarrow 0$$

于是有长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_n(F^{p-1}) \longrightarrow H_n(F^p) \longrightarrow H_n(F^p/F^{p-1}) \longrightarrow H_{n-1}(F^{p-1}) \longrightarrow \cdots$$

是即有长正合列

$$\cdots \longrightarrow D_{p-1,q+1} \xrightarrow{\alpha_{p-1,q+1}} D_{p,q} \xrightarrow{\beta_{p,q}} E_{p,q} \xrightarrow{\gamma_{p,q}} D_{p-1,q} \xrightarrow{\alpha_{p-1,q}} D_{p,q-1} \longrightarrow \cdots$$

其中的 $\alpha_{p-1,q+1}$，$\beta_{p,q}$，$\gamma_{p,q}\cdots$等等当然是已知的。

于是得到双次数分别是 $(1,-1)$，$(0,0)$ 及 $(-1,0)$ 的映射 α: $D\longrightarrow D$，β: $D\longrightarrow E$，γ: $E\longrightarrow D$。

由上面最后一个长正合列知 $(\mathrm{im}\,\alpha)_{p,q}=\mathrm{im}\alpha_{p-1,q+1}=\ker\beta_{p,q}=(\ker\beta)_{p,q}$；$(\mathrm{im}\beta)_{p,q}=\mathrm{im}\beta_{p,q}=\ker\gamma_{p,q}=(\ker\gamma)_{p,q}$；$(\mathrm{im}\gamma)_{p,q}=\mathrm{im}\gamma_{p+1,q}=\ker\alpha_{p,q}=(\ker\alpha)_{p,q}$。故有 $\mathrm{im}\alpha=\ker\beta$，$\mathrm{im}\beta=\ker\gamma$，$\mathrm{im}\gamma=\ker\alpha$。这样就得到了满足定理要求的正合偶 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$。

于是由此正合偶又可得到一个谱序列。

定理33.2 设已给一个左R-复形

$$C: \quad \cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{d_{q+1}} C_q \xrightarrow{d_q} C_{q-1}\longrightarrow\cdots,$$

并设已给复形C的一个滤链 $\{F^pC \mid p\in \mathbf{Z}\}$。

仍记 $F^p=F^pC$，$\forall\, p\in\mathbf{Z}$，并记 $i^{(p)}=\{i_n^{(p)}: (F^p)_n \hookrightarrow C_n \mid n\in\mathbf{Z}\}$，$\forall\, p\in\mathbf{Z}$。对于每一个$p\in\mathbf{Z}$，命

$$G^p(H_*(C))=\{\mathrm{im}H_n(i^{(p)})\mid n\in\mathbf{Z}\}.$$

则 $\{G^p(H_*(C))\mid p\in\mathbf{Z}\}$ 是分次模$H_*(C)$ 的一个滤链。

证 由交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\longrightarrow (F^p)_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^{(p)}} & (F^p)_n & \xrightarrow{d_n^{(p)}} & (F^p)_{n-1} & \longrightarrow\cdots \\
\Big\downarrow i_{n+1}^{(p)} & & \Big\downarrow i_n^{(p)} & & \Big\downarrow i_{n-1}^{(p)} & \\
\cdots\longrightarrow C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

其中 $d_k^{(p)}$是d_k在 $(F^p)_k$ 上的限制，可知 $i^{(p)}$ 是复形 F^p 到复形C的一个链映射，故有

$$H_n(i^{(p)}):\ H_n(F^p)\longrightarrow H_n(C)$$
$$x+\mathrm{im}d_{n+1}^{(p)}\longmapsto i_n^{(p)}(x)+\mathrm{im}d_{n+1}=x+\mathrm{im}d_{n+1}.$$

因为 $\mathrm{im}H_n(i^{(p)})\subseteq H_n(C)$，因此对于每一个 $p\in\mathbf{Z}$，$G^p(H_*(C))$ 是分次模 $H_*(C)$ 的分次子模。

因为 $d_n^{(p-1)}$ 也是 $d_n^{(p)}$ 在 $(F^{p-1})_n$ 上的限制，故 $\mathrm{ker}d_n^{(p-1)}\subseteq\mathrm{ker}d_n^{(p)}$。从而 $\mathrm{im}H_n(i^{(p-1)})\subseteq\mathrm{im}H_n(i^{(p)})$。所以 $G^{p-1}(H_*(C))$ 是 $G^p(H_*(C))$ 的分次子模。因此 $\{G^p(H_*(C))\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 是分次模 $H_*(C)$ 的一个滤链。

33.2 分次模的有界滤链

为了研究谱序列的收敛性，我们引进分次模的有界滤链的概念。

定义33.3 设 $K=\{K_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个左 R-分次模，$\{F^pK\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 是K的一个滤链。若对每一个 $n\in\mathbf{Z}$，恒存在整数 $s=s(n)$ 及 $t=t(n)$ 使得
$$(F^sK)_n=0,\quad (F^tK)_n=K_n,$$
则称滤链 $\{F^pK\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 是有界的。

当 $\{F^pK\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 是分次模 $K=\{K_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 的一个有界滤链时，由定义立刻看出，对于每一个 $n\in\mathbf{Z}$ 恒存在整数 $s=s(n)<t=t(n)$ 使得
$$(F^pK)_n=0,\qquad \forall\ p\leqslant s;$$
$$(F^pK)_n=K_n,\quad \forall\ p\geqslant t;$$
$$0=(F^sK)_n\subseteq(F^{s+1}K)_n\subseteq\cdots\subseteq(F^tK)_n=K_n.$$

又易知，若复形C的一个滤链 $\{F^pC\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 作为分次模 C 的滤链是有界的，则由C及 $\{F^pC\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 按定理33.2确定的分次模 $H_*(C)$ 的滤链 $\{G^p(H_*(C))\,|\,p\in\mathbf{Z}\}$ 也是有界的。

33.3 谱序列的收敛性

定义33.4 设 $\{(E^r,d^r)\,|\,r\geqslant1\}$ 是一个左 R-谱序列。若

$K=\{K_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个左R-分次模，且K有一个有界滤链 $\{\Phi^pK|p\in\mathbf{Z}\}$ 使得

$$E^\infty_{p,q}\cong(\Phi^pK)_{p+q}/(\Phi^{p-1}K)_{p+q},\quad\forall(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},$$

则称谱序列 $\{(E^r,d^r)|r\geqslant1\}$ 收敛于分次模K，记作

$$E^2_{p,q}\underset{p}{\Longrightarrow}K_n,\quad(n=p+q).$$

现在我们给出关于谱序列的收敛性的一个定理。

定理33.3 设C是一个左R-复形，$\{F^pC|p\in\mathbf{Z}\}$ 是复形C的一个有界滤链。再设 $\{(E^r,d^r)|r\geqslant1\}$ 是C及 $\{F^pC|p\in\mathbf{Z}\}$ 按定理33.1得到的正合偶所确定的谱序列。则有

(i) 对于每一个$(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，存在正整数$h=h(p,q)$使得

$$E^\infty_{p,q}=E^r_{p,q},\quad\forall r\geqslant h;$$

(ii) $E^2_{p,q}\underset{p}{\Longrightarrow}(H_*(C))_n=H_n(C),\quad(n=p+q)$

证 (i) 因为 $\{F^pC|p\in\mathbf{Z}\}$ 有界，故对每一个 $x\in\mathbf{Z}$，存在整数 $s(x)$，$t(x)$ 使得

$$(F^lC)_x=0,\quad\forall l\leqslant s(x);$$

$$(F^lC)_x=C_x,\quad\forall l\geqslant t(x).$$

根据定理33.1的证明中给出的由复形C及其滤链 $\{F^pC|p\in\mathbf{Z}\}$ 确定正合偶 $(D,E;\alpha,\beta,\gamma)$ 的过程知，对于任何 $p\in\mathbf{Z}$，有

$$E_{p,x-p}=H_{p+(x-p)}(F^pC/F^{p-1}C)=H_x((F^pC)/(F^{p-1}C)).$$

考虑复形

$$(F^pC)/(F^{p-1}C):\ \cdots\longrightarrow(F^pC)_{x+1}/(F^{p-1}C)_{x+1}\longrightarrow(F^pC)_x/(F^{p-1}C)_x\longrightarrow(F^pC)_{x-1}/(F^{p-1}C)_{x-1}\longrightarrow\cdots$$

因为当 $p>t(x)$ 时 $(F^pC)_x=C_x=(F^{p-1}C)_x$，故 $(F^pC)_x/(F^{p-1}C)_x=0$。从而 $H_x(F^pC/F^{p-1}C)=0$。同理，当 $p<s(x)$时，也有$H_x(F^pC/F^{p-1}C)=0$。因此对于任何$x\in\mathbf{Z}$，有

$$E_{p,x-p}=0,\quad\forall p>t(x);$$

$$E_{p,x-p}=0,\quad \forall\ p<s(x).$$

因为

$$E^2_{p,x-p}=\ker d^1_{p,x-p}/\operatorname{im} d^1_{p-1,x-p},\qquad \operatorname{im} d^1_{p-1,x-p}\subseteq \ker d^1_{p,x-p}\subseteq E_{p,x-p},$$

故当 $p>t(x)$ 时$E^2_{p,x-p}=0$，当$p<s(x)$ 时$E^2_{p,x-p}=0$。

再利用

$$E^3_{p,x-p}=\ker d^2_{p,x-p}/\operatorname{im} d^2_{p+2,x-p},\quad \operatorname{im} d^2_{p+2,x-p}\subseteq \ker d^2_{p,x-p}\subseteq E^2_{p,x-p}$$

即知当 $p>t(x)$ 时 $E^3_{p,x-p}=0$，当 $p<s(x)$ 时 $E^3_{p,x-p}=0$。

如此继续下去，可知当 $r\geqslant 1$ 时，对于任何 $x\in\mathbf{Z}$，有

$$E^r_{p,x-p}=0,\quad \forall\ p>t(x);$$

$$E^r_{p,x-p}=0,\quad \forall\ p<s(x).$$

对于 $(p,\ q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，记 $p'=p-r$，$x'-p'=q+r-1$，则当 $r\geqslant 1$ 时，有$E^r_{p-r,q+r-1}=E^r_{p',x'-p'}=0$，$\forall\ p'<s(x')$。是即当$r\geqslant 1$时，有

$$E^r_{p-r,q+r-1}=0,\quad \forall\ r>p+s(p+q-1).$$

同样，记 $p'=p+r$，$x'-p'=q-r+1$，则当 $r\geqslant 1$ 时，有 $E^r_{p+r,q-r+1}=E^r_{p',x'-p'}=0$，$\forall\ p'>t(x')$。是即当 $r\geqslant 1$ 时，有

$$E^r_{p+r,q-r+1}=0,\quad \forall\ r>t(p+q+1)-p.$$

因为d^r 的双次数是$(-r,r-1)$，故 $d^r_{p,q}(E^r_{p,q})\subseteq E^r_{p-r,q+r-1}$。因此当 $r\geqslant 1$ 时，有

$$E^r_{p,q}=\ker d^r_{p,q},\quad \forall\ r>p+s(p+q-1).$$

又因为 $E^{r+1}_{p,q}=\ker d^r_{p,q}/\operatorname{im} d^r_{p+r,q-r+1}$，而 $\operatorname{im} d^r_{p+r,q-r+1}=d^r_{p+r,q-r+1}(E^r_{p+r,q-r+1})$。故可认为当 $r\geqslant 1$ 时，有

$$E^{r+1}_{p,q}=\ker d^r_{p,q},\quad \forall\ r>t(p+q+1)-p$$

因此当$r\geqslant 1$时，有

$$E^{r+1}_{p,q}=E^r_{p,q},\ \forall\ r>\max(p+s(p+q-1),\ t(p+q+1)-p).$$

于是立刻知道，存在正整数 $h=h(p,q)$ 使得

$$E^\infty_{p,q}=E^r_{p,q},\quad \forall\ r\geqslant h.$$

(ii) 按定理33.2，由复形C及其滤链$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$确定谱序列$\{(E^r,d^r)\mid r\geqslant 1\}$时是先由$C$及$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$确定出正合偶$(D,\ E;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$，即正合三角形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow[\ ]{\alpha\ (1,\,-1)} & D \\ & {}_{\gamma\,(-1,\,0)}\nwarrow \quad \swarrow_{\beta\,(0,\,0)} & \\ & E & \end{array}$$

其中$D_{p,q}=H_{p+q}(F^pC)$，$E_{p,q}=H_{p+q}((F^pC)/(F^{p-1}C))$，$\alpha_{p,q}$，$\beta_{p,q}$及$\gamma_{p,q}$都是同调映射．然后作$(D,E;\ \alpha,\beta,\gamma)$的第$r$导来偶$(D^r,\ E^r;\ \alpha^r,\ \beta^r,\ \gamma^r)$，$r\geqslant 2$，就得到谱序列$\{(E^r,d^r)\mid r\geqslant 1\}$．

于是由正合偶$(D^r,\ E^r;\ \alpha^r,\ \beta^r,\ \gamma^r)$，即正合三角形

$$\begin{array}{ccc} D^r & \xrightarrow[\ ]{\alpha^r\ (1,\,-1)} & D^r \\ & {}_{\gamma^r\,(-1,\,0)}\nwarrow \quad \swarrow_{\beta^r\,(1-r,\,r-1)} & \\ & E^r & \end{array}$$

知对于每一个$(p,\ q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，有正合列

$$D^r_{p+r-2,q-r+2}\xrightarrow{\alpha^r_{p+r-2,q-r+2}}D^r_{p+r-1,q-r+1}\xrightarrow{\beta^r_{p+r-1,q-r+1}}E^r_{p,q}\xrightarrow{\gamma^r_{p,q}}D^r_{p-1,q} \qquad (甲)$$

按照定理33.2，由复形C及其滤链$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$确定了分次模$H_*(C)$的一个滤链$\{G^p(H_*(C))\mid p\in\mathbf{Z}\}$．因为$\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$有界，故$\{G^p(H_*(C))\mid p\in\mathbf{Z}\}$也有界．

参考正合列（甲），容易想到只要证明对于充分大的r，有

$$\begin{aligned} D^r_{p+r-2,q-r+2}&=(G^{p-1}(H_*(C)))_{p+q},\\ D^r_{p+r-1,q-r+1}&=(G^p(H_*(C)))_{p+q}, \qquad (乙)\\ D^r_{p-1,q}&=0 \end{aligned}$$

即可完成定理的证明。

因为 $D^2=\mathrm{im}\alpha$, 故 $D^2_{p+1,q-1}=(\mathrm{im}\alpha)_{p+1,q-1}=\mathrm{im}\alpha_{p,q}=\alpha_{p,q}(D_{p,q})$。又因为 $D^3=\mathrm{im}\alpha^2$, 故 $D^3_{p+2,q-2}=(\mathrm{im}\alpha^2)_{p+2,q-2}=\mathrm{im}\alpha^2_{p+1,q-1}=\alpha^2_{p+1,q-1}(D^2_{p+1,q-1})=\alpha^2_{p+1,q-1}\alpha_{p,q}(D_{p,q})$。如下继续下去即得

$$\begin{aligned}D^r_{p+r-1,q-r+1}&=\alpha^{r-1}_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha^2_{p+1,q-1}\alpha_{p,q}(D_{p,q})\\&=\alpha^{r-1}_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha^2_{p+1,q-1}\alpha_{p,q}(H_{p+q}(F^pC)).\end{aligned}$$

根据作导来偶的过程知 $D_{p,q}\supseteq D^2_{p,q}\supseteq D^3_{p,q}\supseteq\cdots$, 且 $\alpha^2_{p,q}$, $\alpha^3_{p,q}$, …都是 $\alpha_{p,q}$ 的限制。因此有

$$\alpha^{r-1}_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha^2_{p+1,q-1}\alpha_{p,q}=\alpha_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha_{p+1,q-1}\alpha_{p,q}:$$
$$H_{p+q}(F^pC)\longrightarrow H_{p+q}(F^{p+r-1}C),$$

从而$D^r_{p+r-1,q-r+1}=\mathrm{im}(\alpha_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha_{p+1,q-1}\alpha_{p,q})$ 又, 按照定理33.2中给出的记号可知

$$\alpha_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha_{p,q}(x+\mathrm{im}d^{(p)}_{p+q+1})=x+\mathrm{im}d^{(p+r-1)}_{p+q+1}.$$

因为 $\{F^pC|p\in\mathbf{Z}\}$ 有界, 故对充分大的 r, 有

$$(F^{p+r-1}C)_{p+q+1}=C_{p+q+1},$$
$$(F^{p+r-1}C)_{p+q}=C_{p+q},$$
$$(F^{p+r-1}C)_{p+q-1}=C_{p+q-1}.$$

于是 $H_{p+q}(F^{p+r-1}C)=H_{p+q}(C)$。从而 $\alpha_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha_{p,q}(x+\mathrm{im}\,d^{(p)}_{p+q+1})=x+\mathrm{im}\,d_{p+q+1}$。但是 $H_{p+q}(i^{(p)})(x+\mathrm{im}d^{(p)}_{p+q+1})=x+\mathrm{im}d_{p+q+1}$, 故 $\alpha_{p+r-2,q-r+2}\cdots\alpha_{p,q}=H_{p+q}(i^{(p)})$. 而$\mathrm{im}H_{p+q}(i^{(p)})=(G^p(H_*(C)))_{p+q}$, 这就证明了对于充分大的 r, 有

$$D^r_{p+r-1,q-r+1}=(G^p(H_*(C)))_{p+q}.$$

同理, 对于充分大的 r, 有

$$D^r_{p+r-2,q-r+2}=(G^{p-1}(H_*(C)))_{p+q}.$$

完全和刚才一样地进行计算, 知

$$D^r_{p-1,q}=\alpha^{r-1}_{p-2,q+1}\cdots\alpha_{p-r,q+r-1}(H_{p+q-1}(F^{p-r}C)).$$

同样，由于 $\{F^pC\mid p\in\mathbf{Z}\}$ 是有界的，可知对于充分大的 r（这时由于 p 是固定的，故 $p-r$ 充分小），有 $H_{p+q-1}(F^{p-r}C)=0$。从而 $D^r_{p-1,q}=0$。

到此我们证明了（乙）确成立。又，根据同调映射 $\alpha^r_{p+r-2,q-r+2}$ 的定义知它是包含映射，故由正合列（甲）知对于充分大的 r，有正合列

$$(G^{p-1}(H_*(C)))_{p+q}\hookrightarrow(G^p(H_*(C)))_{p+q}\longrightarrow E^r_{p,q}\longrightarrow 0$$

因此对于充分大的 r，有

$$E^r_{p,q}\cong(G^p(H_*(C)))_{p+q}/(G^{p-1}(H_*(C)))_{p+q}.$$

于是由（i）知

$$E^\infty_{p,q}\cong(G^p(H_*(C)))_{p+q}/(G^{p-1}(H_*(C)))_{p+q},\quad\forall\,(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

而 $\{G^p(H_*(C))\mid p\in\mathbf{Z}\}$ 有界，故有

$$E^2_{p,q}\underset{p}{\Longrightarrow}(H_*(C))_n=H_n(C),\quad(n=p+q).$$

§34 双 复 形

实际上有许多谱序列正是从一个复形及其一有界滤链得到的。在应用时往往又涉及一种特殊的复形，而这种特殊的复形则是从双复形得到的。

34.1 双复形及双复形的总复形的概念

定义34.1 设已给一个左 R-双分次模 $M=\{M_{p,q}\}$，并设已给

$$d':\ M \longrightarrow M,\ \text{其双次数是}\ (-1,0),$$

$$d'':\ M \longrightarrow M,\ \text{其双次数是}\ (0,-1).$$

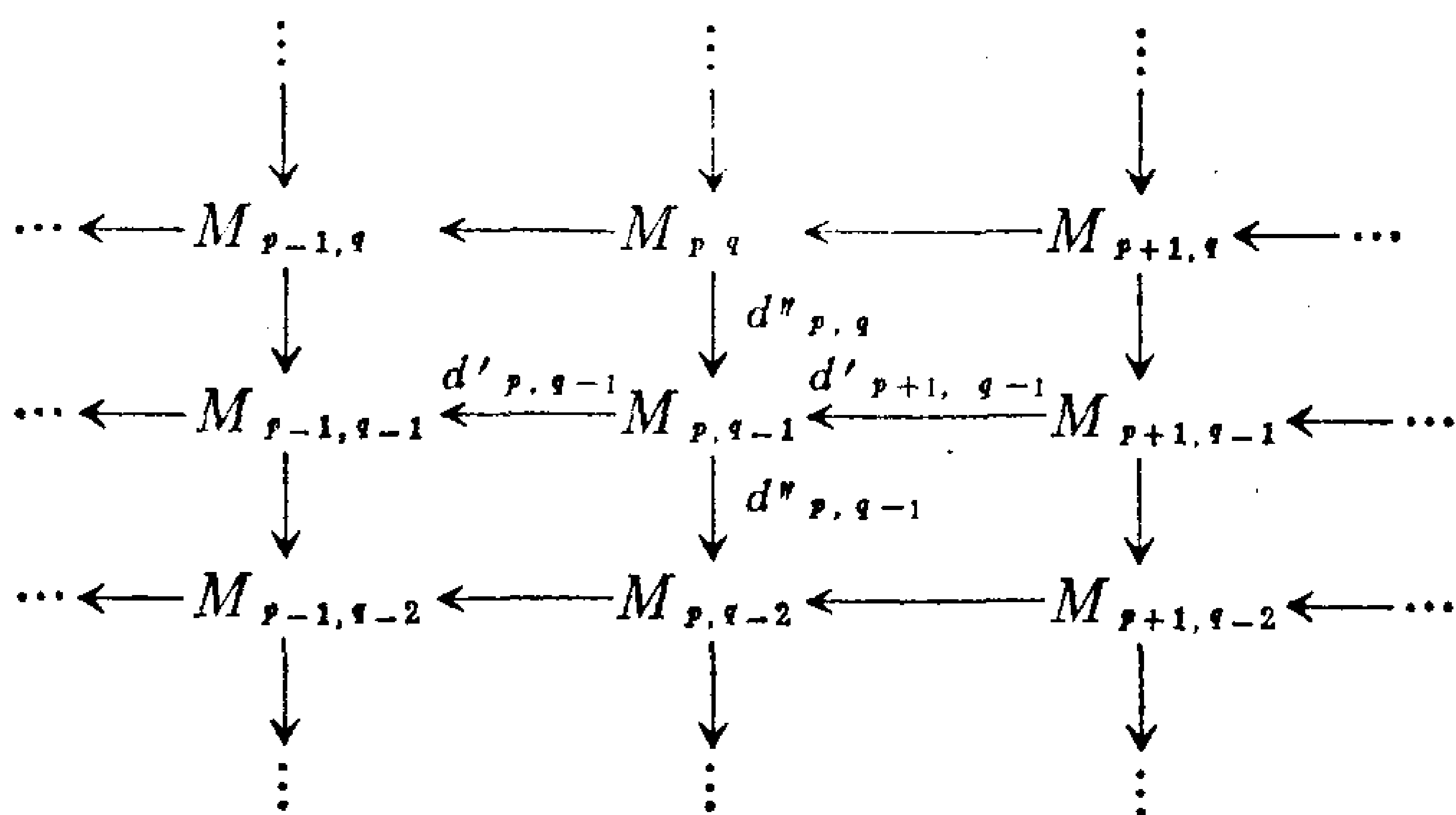
若满足：

$$d'd'=0,\quad d''d''=0,\quad d'd''+d''d'=0,$$

这里 $(d'd''+d''d')_{p,q}=(d'd'')_{p,q}+(d''d')_{p,q}$, $\forall (p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, 则称 (M,d',d'') 是一个左R-双复形。

我们对双复形定义中的条件 $d'd'=0$ 及 $d''d''=0$ 作一点解释。

首先将$M_{p,q}$放在平面上的整点 (p,q) 处，于是得到图：



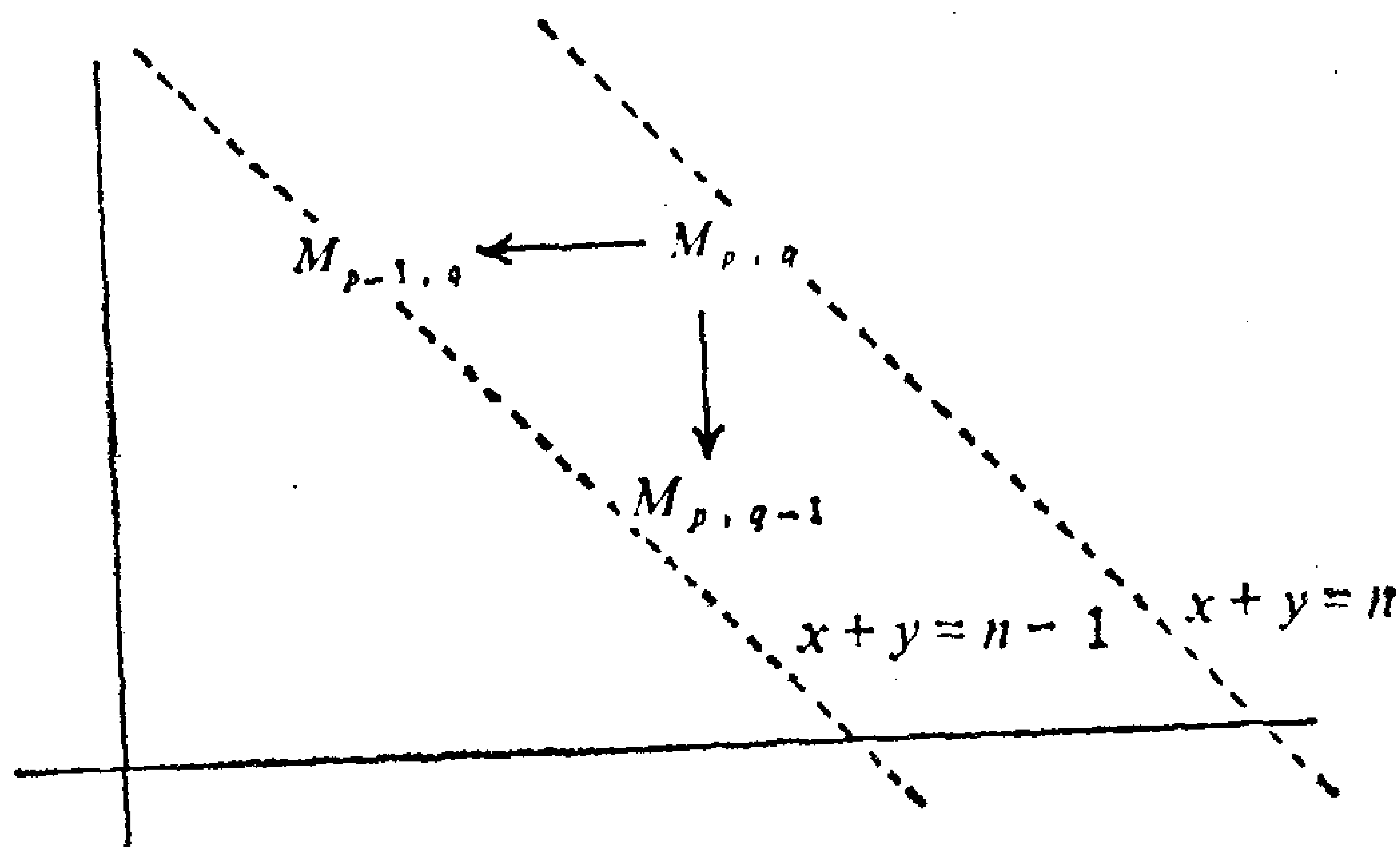
$d'd'=0$ 即 $(d'd')_{p+1,q-1}=0$, $\forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, 也即 $d'_{p,q-1}d'_{p+1,q-1}=0$, $\forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$。故 $d'd'=0$ 意即上图中每一横行都是复形。

同理，$d''d''=0$ 意即上图中每一竖列都是复形。

当已给一个左R-双复形 $(M,\ d',\ d'')$ 时，我们可以作出一个特殊的左R-复形，记作 $\mathrm{Tot}(M)$：

对于 $n\in\mathbf{Z}$，命

$$\mathrm{Tot}(M)_n=\bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$



当 $x_{p,q}\in M_{p,q}$ $(p+q=n)$时，$d'_{p,q}(x_{p,q})\in M_{p-1,q}$，$d''_{p,q}(x_{p,q})\in M_{p,q-1}$ 如上图。我们据此来作 $\operatorname{Tot}(M)_n$ 到 $\operatorname{Tot}(M)_{n-1}$ 的一个左R-映射d_n如下：

先设 $\lambda_{i,j}$ 及 $\pi_{i,j}$ 分别是 $M_{i,j}$ 到 $\bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$ 的入射及 $\bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$ 到$M_{i,j}$ 的投射，其中 $i+j=n$。然后命

$$d_n=\sum_{p+q=n}(\lambda_{p-1,q}d'_{p,q}\pi_{p,q}+\lambda_{p,q-1}d''_{p,q}\pi_{p,q})。$$

我们证明：$(\operatorname{Tot}(M),d)$ 是一个左R-复形。

为此，设 $\sum\limits_{i+j=n}\lambda_{i,j}(x_{i,j})\in\bigoplus\limits_{p+q=n}M_{p,q}$，其中 $x_{i,j}\in M_{i,j}$。则

$$\begin{aligned}d_n\Big(\sum_{i+j=n}\lambda_{i,j}(x_{i,j})\Big)&=\sum_{p+q=n}\lambda_{p-1,q}d'_{p,q}\pi_{p,q}\Big(\sum_{i+j=n}\lambda_{i,j}(x_{i,j})\Big)\\&\quad+\sum_{p+q=n}\lambda_{p,q-1}d''_{p,q}\pi_{p,q}\Big(\sum_{i+j=n}\lambda_{i,j}(x_{i,j})\Big)\\&=\sum_{p+q=n}\lambda_{p-1,q}\,d'_{p,q}(x_{p,q})\end{aligned}$$

$$+\sum_{p+q=n}\lambda_{p,q-1}d''_{p,q}(x_{p,q})\in\bigoplus_{p+q=n-1}M_{p,q},$$

因此 d_n 是 $\mathrm{Tot}(M)_n$ 到 $\mathrm{Tot}(M)_{n-1}$ 的映射。至于 d_n 是左 R-映射则是当然的。

又，由 $d_n=\sum_{p+q=n}(\lambda_{p-1,q}d'_{p,q}\pi_{p,q}+\lambda_{p,q-1}d''_{p,q}\pi_{p,q})$,

$d_{n+1}=\sum_{i+j=n+1}(\lambda_{i-1,j}d'_{i,j}\pi_{i,j}+\lambda_{i,j-1}d''_{i,j}\pi_{i,j})$, 并利用 $d'_{p,q}d'_{p+1,q}=0$, $d''_{p,q}d''_{p,q+1}=0$ 及 $d'_{p,q-1}d''_{p,q}+d''_{p-1,q}d'_{p,q}=0$, 直接将$d_n$及 d_{n+1} 相乘即得

$$d_nd_{n+1}=0.$$

因此 $(\mathrm{Tot}(M),d)$ 是一个左R-复形。

定义34.2 复形 $(\mathrm{Tot}(M),d)$ 叫做双复形 $(M,\ d',\ d'')$ 的总复形。

根据双复形的定义，容易想到有下面定理。

定理34.1（符号引理）设已给一个左 R-双分次模 M，并设已给

d': $M\longrightarrow M$，其双次数是 $(-1,0)$，

d'': $M\longrightarrow M$，其双次数是 $(0,-1)$，

若 $d'd'=0$，$d''d''=0$，且有交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longleftarrow & M_{p-1,q} & \xleftarrow{d'_{p,q}} & M_{p,q} & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d''_{p-1,q}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{p,q}} & & \\
\cdots & \longleftarrow & M_{p-1,q-1} & \xleftarrow{d'_{p,q-1}} & M_{p,q-1} & \longleftarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

则命

$$\Delta'_{p,q}=(-1)^p d'_{p,q},\quad \forall (p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$$

时，(M,d',Δ'') 是一个双复形。

证 首先当然有Δ''的双次数 $=d''$ 的双次数 $=(0,-1)$。又，由 $(\Delta''\Delta'')_{p,q}=\Delta''_{p,q-1}\ \Delta''_{p,q}=(-1)^p\ d''_{p,q-1}(-1)^p\ d''_{p,q}=(d''d'')_{p,q}=0$ 知 $\Delta''\Delta''=0$。 由 $(d'\Delta''+\Delta''d')_{p,q}=(-1)^p(d'_{p,q-1}d''_{p,q}-d''_{p-1,q}d'_{p,q})=0$ 知 $d'\Delta''+\Delta''d'=0$。故 (M,d',Δ'') 是双复形。

现在我们给出双复形及双复形的总复形的一些例子。

例34.1 设已给右 R-复形 $A=(A,\ \Delta')$ 及左 R-复形 $B=(B,\Delta'')$：

$$A:\qquad \cdots\longrightarrow A_{p+1}\xrightarrow{\Delta'_{p+1}}A_p\xrightarrow{\Delta'_p}A_{p-1}\longrightarrow\cdots$$

$$B:\qquad \cdots\longrightarrow B_{q+1}\xrightarrow{\Delta''_{q+1}}B_q\xrightarrow{\Delta''_q}B_{q-1}\longrightarrow\cdots$$

命

$$M_{p,q}=A_p\otimes_R B_q,\quad \forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

并定义 d'：$M\longrightarrow M$ 及d''：$M\longrightarrow M$是

$$d'_{p,q}=\Delta'_p\otimes 1:\ M_{p,q}\longrightarrow M_{p-1,q},$$

$$d''_{p,q}=(-1)^p 1\otimes\Delta''_q:\ M_{p,q}\longrightarrow M_{p,q-1},$$

则 d' 的双次数是 $(-1,0)$，d'' 的双次数是$(0,-1)$，且易知 $d'd'=0$，$d''d''=0$，$d'd''+d''d'=0$，故(M,d',d'')是一个双复形。从而又知 $\mathrm{Tot}(M)_n=\bigoplus_{p+q=n}A_p\otimes_R B_q$。

在这种情形，也将 $\mathrm{Tot}(M)$ 记作 $A\otimes_R B$，叫做右R-复形A与左R-复形B的张量积。

例34.2 设已给右R-模A及左R-模B，并设已给A的一个投射分解 (P,Δ')及B的一个投射分解 (Q,Δ'')。则有复形 (P_A,Δ') 及 (Q_B,Δ'')，于是按照例34.1 得到一个双复形 $(M,\ d',\ d'')$。易知有

$$M_{p,q}=0,\quad (p<0\ \text{或}\ q<0).\qquad (\mathrm{I})$$

自然地称满足(Ⅰ)的双复形是第一象限双复形。

例34.3 设已给左R-模A及B，并设已给A的一个投射分解(P,Δ')及B的一个内射分解(E,Δ'')。则有复形(p_A,Δ')及(E_B,Δ'')。我们来作一个双复形(M,d',d'')如下：

命

$$M_{p,q}=\mathrm{Hom}_R(P_{-p},E^{-q}),$$

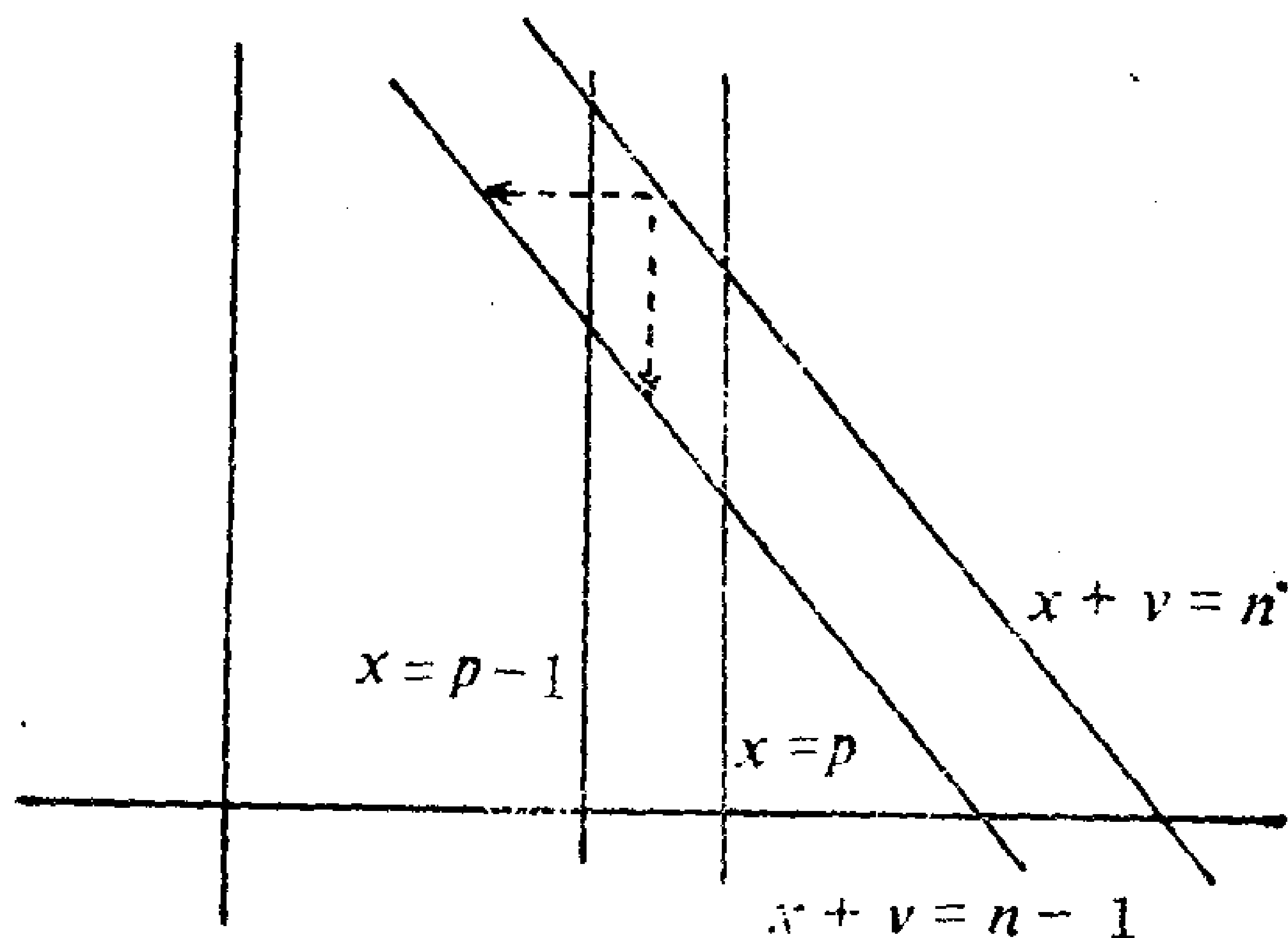
并命 $d'_{p,q}=(\Delta'_{-p+1})^*$: $M_{p,q}\longrightarrow M_{p-1,q}$, $d''_{p,q}=(-1)^{p+q+1}\cdot(\Delta''^{-q})_*$: $M_{p,q}\longrightarrow M_{p,q-1}$。则易知$(M,d',d'')$是一个双复形。又易知有

$$M_{p,q}=0 \qquad (p>0\text{或}q>0) \qquad (\text{Ⅱ})$$

自然地称满足(Ⅱ)的双复形是第三象限双复形。

34.2 总复形 Tot(M) 的第一滤链 $^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及第二滤链 $^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$

设已给一个左R-双复形(M,d',d'')，则有总复形$(\mathrm{Tot}(M),d)$。观察下图：



可知对于 $p\in\mathbf{Z}$，当 $n\in\mathbf{Z}$ 时，命

$$({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n=\bigoplus_{i\leq p}M_{i,n-i}$$

并命

$$d_n^{(p)}: ({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n \longrightarrow ({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M))_{n-1}$$

是 d_n 在 $({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n$上的限制，则 $({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M), d^{(p)})$ 是 $(\mathrm{Tot}(M), d)$ 的子复形，且 $({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M), d^{(p-1)})$ 是 $({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M), d^{(p)})$ 的子复形。因此

$${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M) = \{{}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M) \mid p \in \mathbf{Z}\}$$

是 $\mathrm{Tot}(M)$ 的一个滤链。

定义34.3 $\{{}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M) \mid p \in \mathbf{Z}\}$ 叫做双复形 M的总复形 $\mathrm{Tot}(M)$ 的第一滤链。

同样，命

$$({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n = \bigoplus_{j\leqslant p} M_{n-j,j}$$

并命 $\bar{d}_n^{(p)}: ({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n \longrightarrow ({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M))_{n-1}$ 是d_n的限制，则 $({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M)), \bar{d}^{(p)})$ 是 $(\mathrm{Tot}(M), d)$ 的子复形，且 $({}^{\mathrm{II}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M), \bar{d}^{(p-1)})$ 是 $({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M), \bar{d}^{(p)})$ 的子复形，因此

$${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M) = \{{}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M) \mid p \in \mathbf{Z}\}$$

是$\mathrm{Tot}(M)$ 的一个滤链。

定义34.4 $\{{}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M) \mid p \in \mathbf{Z}\}$ 叫做双复形 M 的总复形 $\mathrm{Tot}(M)$ 的第二滤链。

现在我们给出${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及 ${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$ 同时为有界的一些条件，即有下面两个定理。

定理34.2 ${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$同时为有界，当且仅当对于每一个 $n \in \mathbf{Z}$，$M' = \{M_{p,q} \mid p+q=n\}$ 中只有有限个 $M_{p,q} \neq 0$.

证 设 ${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及 ${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$同时为有界，则对于$n \in \mathbf{Z}$，有整数 $s' = s'(n)$ 使 $({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n = 0$，$\forall p \leqslant s'$. 因此 $\bigoplus_{i\leqslant p} M_{i,n-i} = 0$，$\forall p \leqslant s'$.特别，有 $\bigoplus_{i\leqslant s'} M_{i,n-i} = 0$. 所以 $M_{p,n-p} = 0$，$\forall p \leqslant s'$. 同样，有整数 $s'' = s''(n)$ 使 $({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n = 0$，

$\forall\, p\leqslant s''$. 因此 $\bigoplus\limits_{j<p} M_{n-j,j}=0$, $\forall\, p\leqslant s''$. 特别, 有 $\bigoplus\limits_{j<s''} M_{n-j,j}=0$. 所以 $M_{p,n-p}=0$, $\forall\, p\geqslant n-s''$。这就证明了$\{M_{p,q}\mid p+q=n\}$ 中只有有限个 $M_{p,q}\neq 0$。

反之，设对每一个 $n\in\mathbf{Z}$, $\{M_{p,q}\mid p+q=n\}$ 中只有有限个 $M_{p,q}\neq 0$。则对每一个$n\in\mathbf{Z}$，存在整数 $s'=s'(n)$及 $s''=s''(n)$使

$$M_{p,n-p}=0, \qquad (p\leqslant s' \text{或} p\geqslant s'').$$

因此有

$$({}^{\mathrm{I}}F^{s'}\mathrm{Tot}(M))_n=\bigoplus_{i<s'} M_{i,n-i}=0,$$

$$({}^{\mathrm{I}}F^{s''}\mathrm{Tot}(M))_n=\bigoplus_{i<s''} M_{i,n-i}=\mathrm{Tot}(M)_n.$$

故 ${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 有界。

同样，有

$$({}^{\mathrm{II}}F^{n-s''}\mathrm{Tot}(M))_n=\bigoplus_{j<n-s''} M_{n-j,j}=\bigoplus_{n-j\geqslant s''} M_{n-j,j}=0,$$

$$({}^{\mathrm{II}}F^{n-s'}\mathrm{Tot}(M))_n=\bigoplus_{j<n-s'} M_{n-j,j}=\bigoplus_{n-j\geqslant s'} M_{n-j,j}=\mathrm{Tot}(M)_n$$

故 ${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$ 也有界。

定理34.3 设M是第一象限双复形或第三象限双复形，则 ${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$ 都有界.

证 因为当M是第一象限双复形或第三象限双复形时，明显知道对于每一个 $n\in\mathbf{Z}$, $\{M_{p,q}\mid p+q=n\}$ 中只有有限个 $M_{p,q}\neq 0$。故由刚才的定理知 ${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及 ${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$ 都有界.

34.3 当M是第一或第三象限双复形时，由$\mathrm{Tot}(M)$和${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$确定的谱序列 $\{{}^{\mathrm{I}}E^r\}$ 及由 $\mathrm{Tot}(M)$ 和 ${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$ 确定的谱序列 $\{{}^{\mathrm{II}}E^r\}$。

在本段中，双复形 (M,d',d'') 是第一或第三象限双复形。我们要讨论谱序列 $\{{}^{\mathrm{I}}E^r\}$ 及$\{{}^{\mathrm{II}}E^r\}$ 的收敛性，并确定 ${}^{\mathrm{I}}E_{p,q}$, ${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q}$, ${}^{\mathrm{II}}E_{p,q}$及${}^{\mathrm{II}}E^2_{p,q}$.

关于$\{{}^{\mathrm{I}}E^r\}$及 $\{{}^{\mathrm{II}}E^r\}$ 的收敛性，有下面定理。

定理34.4 (i) 对于每一个 $(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，有

$$^{\mathrm{I}}E^{\infty}_{p,q}={}^{\mathrm{I}}E^{r}_{p,q},\qquad \forall \text{ 充分大的 } r;$$

$$^{\mathrm{II}}E^{\infty}_{p,q}={}^{\mathrm{II}}E^{r}_{p,q},\qquad \forall \text{ 充分大的 } r.$$

(ii) $$^{\mathrm{I}}E^{2}_{p,q}\Longrightarrow(H_{*}(\mathrm{Tot}(M)))_{n}=H_{n}(\mathrm{Tot}(M)),\ (n=p+q);$$

$$^{\mathrm{II}}E^{2}_{p,q}\Longrightarrow(H_{*}(\mathrm{Tot}(M)))_{n}=H_{n}(\mathrm{Tot}(M)),\ (n=p+q).$$

证 因为 M 是第一或第三象限双复形，故由定理34.3知 $^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 及 $^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M)$ 都是有界的。于是由定理33.3知本定理成立。

为了确定 $^{\mathrm{I}}E_{p,q}$，我们先用 $(M_{p,\cdot},d'_{\cdot})$表示由双复形 (M,d',d'') 的第 p 列所作成的复形，并将此复形的第 q 同调模 $H_q(M_{p,\cdot})$ 记作 $H'_{p,q}(M)$。

关于$^{\mathrm{I}}E_{p,q}$，有下面定理。

定理34.5 $^{\mathrm{I}}E_{p,q}\cong H'_{p,q}(M)$。

证 首先我们知道

$$^{\mathrm{I}}E_{p,q}=H_{p+q}((^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))/(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))).$$

考虑商复形

$$(^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))/(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M)):\ \cdots\longrightarrow$$
$$(^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_{p+q+1}/(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q+1}\xrightarrow{\xi}$$
$$(^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_{p+q}/(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q}\xrightarrow{\eta}$$
$$(^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_{p+q-1}/(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q-1}\longrightarrow\cdots$$

可知

$$^{\mathrm{I}}E_{p,q}=\ker\eta/\mathrm{im}\xi.$$

这里由17.3中所给出的商复形的定义知

$$\xi(a+(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q+1})$$
$$=d_{p+q+1}(a)+(^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q},$$

$$\eta(b+({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q})$$
$$=d_{p+q}(b)+({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q-1},$$

其中 $d_n=\sum\limits_{i+j=n}(\lambda_{i-1,j}d'_{i,j}\pi_{i,j}+\lambda_{i,j-1}d''_{i,j}\pi_{i,j})$

因为

$$({}^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_n=({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_n\oplus M_{p,n-p}$$

故命

$$\sigma_n:\ ({}^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_n/({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_n\longrightarrow M_{p,n-p}$$
$$u+v+({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_n\longmapsto v$$

时，知σ_n是同构映射。

容易验证有交换图：

$$\begin{array}{c}({}^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_{p+q+1}/({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q+1}\xrightarrow{\xi}\\ \sigma_{p+q+1}\downarrow\\ M_{p,q+1}\xrightarrow{d''_{p,q+1}}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{\xi}({}^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_{p+q}/({}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M))_{p+q}\xrightarrow{\eta}\\ \sigma_{p+q}\downarrow\\ \xrightarrow{d''_{p,q+1}}M_{p,q}\xrightarrow{d''_{p,q}}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{\eta}({}^{\mathrm{I}}F^{p}\mathrm{Tot}(M))_{p+q-1}/({}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M))_{p+q-1}\\ \sigma_{p+q-1}\downarrow\\ \xrightarrow{d''_{p,q}}M_{p,q-1}\end{array}$$

因此 $\ker\eta/\mathrm{im}\xi\cong\ker d''_{p,q}/\mathrm{im}d''_{p,q+1}$，所以

$${}^{\mathrm{I}}E_{p,q}\cong H''_{p,q}(M).$$

为了确定 ${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q}$，我们先命

$$\partial_{p,q}:\ H''_{p,q}(M)=\ker d''_{p,q}/\mathrm{im}d''_{p,q+1}\longrightarrow H''_{p-1,q}(M)$$

$$= \ker d''_{p-1,q}/\operatorname{im} d''_{p-1,q+1}$$

$$z + \operatorname{im} d''_{p,q+1} \longmapsto d'_{p,q}(z) + \operatorname{im} d''_{p-1,q+1}$$

则易知$\partial_{p,q}$是左R-映射，且$\partial_{p,q}\partial_{p+1,q}=0$。于是得到复形

$$H''_{\cdot q}(M):\ \cdots \longrightarrow H''_{p+1,q}(M) \xrightarrow{\partial_{p+1,q}} H''_{p,q}(M) \xrightarrow{\partial_{p,q}} H''_{p-1,q}(M) \longrightarrow \cdots$$

这就是说，当我们取双复形 (M, d', d'') 的每一列所作成的复形的第 q 同调模时，所有这些第 q 同调模连同所定义的微分 ∂ 成为复形。

关于 ${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q}$，有下面定理。

定理34.6 ${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q} \cong H_p(H''_{\cdot q}(M))$。

证 考虑复形

$$\cdots \longrightarrow {}^{\mathrm{I}}E_{p+1,q} \xrightarrow{d^1_{p+1,q}} {}^{\mathrm{I}}E_{p,q} \xrightarrow{d^1_{p,q}} {}^{\mathrm{I}}E_{p-1,q} \longrightarrow \cdots$$

这里 d^1: ${}^{\mathrm{I}}E \longrightarrow {}^{\mathrm{I}}E$ 的构成是先用复形 $(\mathrm{Tot}(M), d)$ 及其滤链 ${}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}(M)$ 作出正合偶 $({}^{\mathrm{I}}D, {}^{\mathrm{I}}E; \alpha, \beta, \gamma)$，然后命 $d^1 = \beta\gamma$。

按定义，有

$${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q} = \ker d^1_{p,q}/\operatorname{im} d^1_{p+1,q}$$

根据定理34.5，有同构映射

$$\tau_{p,q}:\ {}^{\mathrm{I}}E_{p,q} = \ker\eta/\operatorname{im}\xi \longrightarrow H''_{p,q}(M)$$

$$= \ker d''_{p,q}/\operatorname{im} d''_{p,q+1}$$

$$x + \operatorname{im}\xi \longmapsto \sigma_{p+q}(x) + \operatorname{im} d''_{p,q+1}.$$

可以验证有交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
{}^{\mathrm{I}}E_{p+1,q} & \xrightarrow{d^1_{p+1,q}} & {}^{\mathrm{I}}E_{p,q} & \xrightarrow{d^1_{p,q}} & {}^{\mathrm{I}}E_{p-1,q} \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_{p+1,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{p-1,q}} \\
H''_{p+1,q}(M) & \xrightarrow{\partial_{p+1,q}} & H''_{p,q}(M) & \xrightarrow{\partial_{p,q}} & H''_{p-1,q}(M)
\end{array}$$

因此 $\ker d^1_{p,q}/\operatorname{im} d^1_{p+1,q} \cong \ker\partial_{p,q}/\operatorname{im}\partial_{p+1,q}$，所以

$${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q} \cong H_p(H''_{\cdot q}(M)).$$

注：有时也将 $H_p(H''_{\cdot q}(M))$ 记成 $H'_p(H''_{\cdot q}(M))$。

为了确定 ${}^{\mathrm{II}}E_{p,q}$ 及 ${}^{\mathrm{II}}E^2_{p,q}$，我们先引进双复形的转置的概念。

设已给一个双复形 (M, d', d'')，作双分次模

$${}^t M = \{({}^t M)_{p,q} \mid (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\},$$

其中

$$({}^t M)_{p,q} = M_{q,p}, \quad \forall (p,q), \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

再命 $\Delta'_{p,q} = d''_{q,p}$，$\Delta''_{p,q} = d'_{q,p}$，则易知

$$({}^t M, \Delta', \Delta'')$$

是一个双复形。它叫做双复形 (M, d', d'') 的转置。

因为

$$\mathrm{Tot}({}^t M)_n = \bigoplus_{p+q=n} ({}^t M)_{p,q} = \bigoplus_{p+q=n} M_{q,p} = \mathrm{Tot}(M)_n, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

且

$$\Delta_n = \sum_{p+q=n} (\lambda_{q,p-1}\Delta'_{p,q}\pi_{q,p} + \lambda_{q-1,p}\Delta''_{p,q}\pi_{q,p})$$

$$= \sum_{q+p=n} (\lambda_{q-1,p}d'_{q,p}\pi_{q,p} + \lambda_{q,p-1}d''_{q,p}\pi_{q,p}) = d_n$$

故有

$$(\mathrm{Tot}({}^t M), \Delta) = (\mathrm{Tot}(M), d).$$

又

$$({}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M))_n = \bigoplus_{j<p} M_{n-j,j} = \bigoplus_{j<p} ({}^t M)_{j,n-j} = ({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}({}^t M))_n,$$

故有

$${}^{\mathrm{II}}F\mathrm{Tot}(M) = {}^{\mathrm{I}}F\mathrm{Tot}({}^t M).$$

于是立刻知道关于 ${}^{\mathrm{II}}E_{p,q}$ 及 ${}^{\mathrm{II}}E^2_{p,q}$ 有下面定理。

定理34.7 ${}^{\mathrm{II}}E_{p,q}$ 和双复形 ${}^t M$ 的第 p 列复形的第 q 同调模同构；${}^{\mathrm{II}}E^2_{p,q}$ 和双复形 ${}^t M$ 的各列复形的第 q 同调模作成的复形

的第 p 同调模同构。

谱序列 $\{{}^{I}E_r\}$ 或 $\{{}^{II}E_r\}$ 叫做第一或第三象限双复形 (M, d', d'') 的通常谱序列。

设 $\{E^r\}$ 是第一或第三象限双复形 (M, d', d'') 的一个通常谱序列。若

$$E^2_{p,q}=0, \quad \forall q\neq 0,$$

则称 $\{E^r\}$ 衰退。

关于衰退的通常谱序列，有下面定理。

定理34.8 设 $\{E^r\}$ 是第一或第三象限双复形 (M, d', d'') 的一个衰退的通常谱序列，则有

(i) $E^\infty_{p,q}=E^2_{p,q}, \quad \forall (p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；

(ii) $E^2_{n,0}\cong H_n(\mathrm{Tot}(M)), \quad \forall n\in\mathbf{Z}$。

证 (i) 首先有

$$d^r_{p,q}:\ E^r_{p,q}\longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}.$$

当 $r\geqslant 2$ 时，因为 q 及 $q+r-1$ 中至少有一个不为 0，故 $E^2_{p,q}$ 及 $E^2_{p-r,q+r-1}$ 中至少有一个为 0。又因为当 $r\geqslant 2$ 时可视 $E^r_{p,q}$ 是 $E^2_{p,q}$ 的子商，$E^r_{p-r,q+r-1}$ 是 $E^2_{p-r,q+r-1}$ 的子商，故 $E^r_{p,q}$及$E^r_{p-r,q+r-1}$ 中至少有一个为 0。从而当 $r\geqslant 2$ 时，有

$$d^r_{p,q}=0, \qquad \forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

因此 $\ker d^r_{p,q}=E^r_{p,q}$，$\mathrm{im}\, d^r_{p+r,q-r+1}=0$。所以 $E^{r+1}_{p,q}=\ker d^r_{p,q}/\mathrm{im}\, d^r_{p+r,q-r+1}=E^r_{p,q}$。这样就得到

$$E^\infty_{p,q}=E^2_{p,q}, \qquad \forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

(ii) 我们只对M是第一象限双复形且 $E^r={}^{I}E^r$的情形进行证明。其余情形的证明完全类似。

先记 $F\mathrm{Tot}(M)={}^{I}F\mathrm{Tot}(M)$，并命 $\{G^pH_*(\mathrm{Tot}(M))\mid p\in\mathbf{Z}\}$ 是复形 $\mathrm{Tot}(M)$ 及其滤链 $F\mathrm{Tot}(M)$ 按定理 33.2 确定的 $H_*(\mathrm{Tot}(M))$ 的滤链。则由定理33.3及定义33.4知

$$E^\infty_{p,q}\cong(G^pH_*(\mathrm{Tot}(M)))_{p+q}/(G^{p-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_{p+q},$$
$$\forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

于是由 $E^{\infty}_{p,q}=E^2_{p,q}$ 得到

$$E^2_{n,0}\cong(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n/(G^{n-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n,\quad \forall n\in\mathbf{Z}\qquad(\mathrm{I})$$

可以证明:

$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=H_n(\mathrm{Tot}(M)),\qquad \forall n\in\mathbf{Z}.$$

事实上，由交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to(F^n\mathrm{Tot}(M))_{n+1} & \xrightarrow{d^{(n)}_{n+1}} & (F^n\mathrm{Tot}(M))_n & \xrightarrow{d^{(n)}_n} & (F^n\mathrm{Tot}(M))_{n-1}\to\cdots \\
\downarrow i^{(n)}_{n+1} & & \downarrow i^{(n)}_n & & \downarrow i^{(n)}_{n-1} \\
\cdots\to(\mathrm{Tot}(M))_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & (\mathrm{Tot}(M))_n & \xrightarrow{d_n} & (\mathrm{Tot}(M))_{n-1}\to\cdots
\end{array}$$

其中 $d^{(n)}_k$ 是 d_k 的限制，可知命

$$\sigma=H_n(i^{(n)}):\ H_n(F^n\mathrm{Tot}(M))\longrightarrow H_n(\mathrm{Tot}(M))$$
$$x+\mathrm{im}d^{(n)}_{n+1}\longmapsto x+\mathrm{im}d_{n+1},$$

其中 $x\in\ker d^{(n)}_n$，则 σ 是左 R-映射，且由定义知

$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=\mathrm{im}\sigma.$$

但是 $(F^n\mathrm{Tot}(M))_n=\bigoplus\limits_{i\leqslant n}M_{i,n-i}=(\mathrm{Tot}(M))_n$,

$(F^n\mathrm{Tot}(M))_{n-1}=\bigoplus\limits_{i\leqslant n}M_{i,n-1-i}=(\mathrm{Tot}(M))_{n-1}$. 故 $d^{(n)}_n=d_n$.

从而 $\ker d^{(n)}_n=\ker d_n$. 因此 σ 是满射. 故有

$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=H_n(\mathrm{Tot}(M)),\quad \forall n\in\mathbf{Z}.\qquad(\mathrm{II})$$

又，不难证明，当 $n<0$ 时,

$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_k=0,\qquad \forall k\in\mathbf{Z}.$$

事实上，当 $n<0$ 时，$(F^n\mathrm{Tot}(M))_k=\bigoplus\limits_{i\leqslant n}M_{i,k-i}=0$, $\forall k\in\mathbf{Z}$. 故 $H_k(F^n\mathrm{Tot}(M))=0$, $\forall k\in\mathbf{Z}$. 因此根据 $G^pH_*(\mathrm{Tot}(M))$ 的定义知当 $n<0$ 时,

$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_k=0,\qquad \forall k\in\mathbf{Z}.\qquad(\mathrm{III})$$

于是由(III)及(I)知，$n<0$ 时，$E^2_{n,0}=0$. 但是明显知道

当 $n<0$ 时 $H_n(\mathrm{Tot}(M))=0$. 这样，我们先证明了当 $n<0$ 时，有

$$E^2_{n,0}\cong H_n(\mathrm{Tot}(M)).$$

又，由(Ⅲ)及(Ⅰ)知 $E^2_{0,0}\cong(G^0H_*(\mathrm{Tot}(M))_0$. 故由(Ⅱ)知

$$E^2_{0,0}\cong H_0(\mathrm{Tot}(M)).$$

最后，我们考虑 $n>0$ 的情形。先由 (iii) 知

$$(G^{-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=0.$$

又由(Ⅱ)知有

$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=H_n(\mathrm{Tot}(M)).$$

故有

$$0=(G^{-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n\subseteq(G^0H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n\subseteq\cdots\subseteq(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n.$$

从而得到一批商模:

$$(G^0H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n/(G^{-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n,$$
$$(G^1H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n/(G^0H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n,\cdots,$$
$$(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n/(G^{n-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n.$$

由于

$$E^2_{p,q}=E^\infty_{p,q}\cong(G^pH_*(\mathrm{Tot}(M)))_{p+q}/(G^{p-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_{p+q},$$

故这批商模依次同构于

$$E^2_{0,n},E^2_{1,n-1},\cdots,E^2_{n-1,1},E^2_{n,0}$$

由 $E^2_{0,n}=E^2_{1,n-1}=\cdots=E^2_{n-1,1}=0$ 及 $(G^{-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=0$，立即推出 $(G^{n-1}H_*(\mathrm{Tot}(M)))_n=0$. 故由(Ⅰ)知 $E^2_{n,0}\cong(G^nH_*(\mathrm{Tot}(M)))_n$. 从而由(Ⅱ)知

$$E^2_{n,0}\cong H_n(\mathrm{Tot}(M)).$$

34.4 应用举例

作为谱序列的应用的一个例子，我们用谱序列的理论来证明，当计算 $\mathrm{Tor}^R_n(A,B)$ 时，可以取 A 的平坦分解或 B 的平坦

分解。

设已给右R-模A及左R-模B，并设

$$P:\quad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{\Delta'_2}P_1\xrightarrow{\Delta'_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

及

$$Q:\quad \cdots\longrightarrow Q_2\xrightarrow{\Delta''_2}Q_1\xrightarrow{\Delta''_1}Q_0\xrightarrow{\eta}B\longrightarrow 0$$

分别是A及B的平坦分解。

命

$$M_{p,q}=P_p\otimes_R Q_q.$$
$$d'_{p,q}=\Delta'_p\otimes 1:\ M_{p,q}\longrightarrow M_{p-1,q}$$
$$d'_{p,q}=(-1)^p 1\otimes\Delta'_q:\ M_{p,q}\longrightarrow M_{p,q-1}.$$

则 (M,d',d'') 是第一象限双复形。

我们先来计算${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q}$。

为此，先取双复形M的第j列作成的复形

$$\cdots\longrightarrow M_{j,q+1}\xrightarrow{d''_{j,q+1}}M_{j,q}\xrightarrow{d''_{j,q}}M_{j,q-1}\longrightarrow\cdots$$

即复形

$$\cdots\longrightarrow P_j\otimes Q_{q+1}\longrightarrow P_j\otimes Q_q\longrightarrow P_j\otimes Q_{q-1}\longrightarrow\cdots$$

将此复形的第q同调模记作 $X_{j,q}$。

当$q<0$时明显知 $X_{j,q}=0$。当$q>0$时，由于Q是正合列，且 $P_j\otimes$ 正合，故也有 $X_{j,q}=0$。当$q=0$ 时， 由正合列$Q_1\to Q_0\to B\to 0$ 知有正合列 $P_j\otimes Q_1\to P_j\otimes Q_0\to P_j\otimes B\to 0$， 故 $X_{j,q}\cong P_j\otimes B$。因此

$${}^{\mathrm{I}}E_{j,q}\cong\begin{cases}0, & (q\neq 0)\\ P_j\otimes B, & (q=0)\end{cases}$$

因为可视 ${}^{\mathrm{I}}E^2_{j,q}$是${}^{\mathrm{I}}E_{j,q}$ 的子商，故先有

$${}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q}=0,\quad\forall q\neq 0.$$

所以 $\{{}^{\mathrm{I}}E^r\}$ 是M的一个衰退的通常谱序列。

现在考虑由各列复形的第 0 同调模作成的复形

$$\cdots\longrightarrow X_{p+1,0}\longrightarrow X_{p,0}\longrightarrow X_{p-1,0}\longrightarrow\cdots$$

要确定它的第 p 同调模。由 $X_{j,q}\cong P_j\otimes B$ 可知此复形的第 p 同调模与复形

$$\cdots\longrightarrow P_{p+1}\otimes B\longrightarrow P_p\otimes B\longrightarrow P_{p-1}\otimes B\longrightarrow\cdots$$

的第 p 同调模 $H_p(P_A\otimes B)$ 同构。于是我们得到

$$^{\mathrm{I}}E^2_{p,q}\cong\begin{cases}0, & (q\neq 0)\\ H_p(P_A\otimes B), & (q=0)\end{cases}$$

由定理34.8知

$$^{\mathrm{I}}E^2_{n,0}\cong H_n(\mathrm{Tot}(M)),\quad\forall n\in\mathbf{Z}.$$

因此有

$$H_n(P_A\otimes B)\cong H_n(\mathrm{Tot}(M)),\quad\forall n\in\mathbf{Z}.$$

同样可以得到

$$^{\mathrm{II}}E^2_{p,q}\cong\begin{cases}0, & (q\neq 0)\\ H_p(A\otimes Q_B), & (q=0)\end{cases}$$

因此有

$$H_n(A\otimes Q_B)\cong H_n(\mathrm{Tot}(M)),\quad\forall n\in\mathbf{Z}.$$

于是得到

$$H_n(P_A\otimes B)\cong H_n(A\otimes Q_B),$$

而这就是说，当计算 $\mathrm{Tor}^R_n(A,B)$ 时可以取 A 的平坦分解或 B 的平坦分解。

§35 Künneth 公式

由拓扑学中的 Eilenberg-Zilber 定理自然地提出一个问题，已知右 R-复形 A 的同调模及左 R-复形 C 的同调模时，求复形 $A\otimes C$ 的同调模。著名的 Künneth 公式给出了这个问题的解答（当对环 R 及复形 A 附加某些条件时）。

35.1　准备知识

设已给右R-模A及左R-映射 $X\xrightarrow{\alpha}Y$，并视 $\mathrm{Tor}_n^R(A,X)=\mathrm{Tor}_n^R(-,X)(A)$，$\mathrm{Tor}_n^R(A,Y)=\mathrm{Tor}_n^R(-,Y)(A)$。命

$$P:\quad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

是A的选定的投射分解，则

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,X)=H_n(P_A\otimes X),\ \mathrm{Tor}_n^R(A,Y)=H_n(P_A\otimes Y).$$

因为明显知有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow & P_2\otimes X & \xrightarrow{d_2\otimes 1} & P_1\otimes X & \xrightarrow{d_1\otimes 1} & P_0\otimes X & \longrightarrow 0 \\
 & {\scriptstyle 1\otimes\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle 1\otimes\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle 1\otimes\alpha}\downarrow & \\
\cdots\longrightarrow & P_2\otimes Y & \xrightarrow{d_2\otimes 1} & P_1\otimes Y & \xrightarrow{d_1\otimes 1} & P_0\otimes Y & \longrightarrow 0
\end{array}$$

故命 $(1\otimes\alpha)_n=1_{P_n}\otimes\alpha$，$\forall n\in\mathbf{Z}$时，$1\otimes\alpha$ 是复形 $P_A\otimes X$到复形$P_A\otimes Y$的一个链映射。我们记

$$\alpha_{n,A}=H_n(1\otimes\alpha)$$

有下面引理。

引理35.1　设已给右 R- 短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0,$$

并设已给左R-映射$X\xrightarrow{\alpha}Y$，则有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^R(A,X) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(-,X)(f)} & \mathrm{Tor}_1^R(B,X) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(C,X) \\
{\scriptstyle\alpha_{1,A}}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_{1,B}}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_{1,C}}\downarrow \\
\cdots\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^R(A,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(-,Y)(f)} & \mathrm{Tor}_1^R(B,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(C,Y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\longrightarrow A\otimes X\longrightarrow\cdots \\
{\scriptstyle 1\otimes\alpha}\downarrow \\
\longrightarrow A\otimes Y\longrightarrow\cdots
\end{array}$$

且其中上、下两行都是正合列。

证 先由定理 22.3′ 知图中上、下两行都是正合列。又由 $\mathrm{Tor}_n^R(-,X)(f)$，$\alpha_{n,A}$ 等的定义直接验证之即知上图是交换图。

我们引进一个概念 $\mathrm{Tor}_k^R(A,C)$ 如下，其中 A 及 C 是复形。

设已给右 R-复形

$$A:\quad \cdots\longrightarrow A_{p+1}\xrightarrow{\Delta'_{p+1}}A_p\xrightarrow{\Delta'_p}A_{p-1}\longrightarrow\cdots$$

及左 R-复形

$$C:\quad \cdots\longrightarrow C_{q+1}\xrightarrow{\Delta''_{q+1}}C_q\xrightarrow{\Delta''_q}C_{q-1}\longrightarrow\cdots$$

并设已给一个整数 $k\geqslant 0$。

命

$$M_{p,q}=\mathrm{Tor}_k^R(A_p,C_q),$$

并命

$$\rho'_{p,q}=\mathrm{Tor}_k^R(-,C_q)(\Delta'_p):\qquad M_{p,q}\longrightarrow M_{p-1,q},$$

$$\rho''_{p,q}=\Delta_{q'',k,A_p}\qquad :\qquad M_{p,q}\longrightarrow M_{p,q-1},$$

其中 Δ_{q,k,A_p}'' 的意义见引理 35.1 前面一段所述。则由引理 35.1知有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
M_{p-1,q} & \xleftarrow{\rho'_{p,q}} & M_{p,q}\\
{\scriptstyle\rho''_{p-1,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho''_{p,q}}\\
M_{p-1,q-1} & \xleftarrow{\rho'_{p,q-1}} & M_{p,q-1}
\end{array}$$

且由 $\Delta'_n\Delta'_{n+1}=0$ 及 $\Delta''_n\Delta''_{n+1}=0$ 知

$$\rho'\rho'=0,\qquad \rho''\rho''=0.$$

于是根据定理34.1（符号引理）就得到一个双复形 (M,d',d'')。这个双复形的总复形 $\mathrm{Tot}(M)$ 用 $\mathrm{Tor}_k^R(A,C)$ 来表示。

我们证明下面三个引理。

引理35.2 设已给一个右 R-链映射短正合列

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0,$$

则对任何左 R-复形 C，有链映射正合列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(A', C) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, C) \to \mathrm{Tor}_1^R(A'', C)$$
$$\to A' \otimes C \to A \otimes C \to A'' \otimes C \to 0 .$$

证 首先对于每一个$p \in \mathbf{Z}$，有右R-短正合列

$$0 \longrightarrow A'_p \longrightarrow A_p \longrightarrow A''_p \longrightarrow 0 .$$

故据引理35.1知有交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(A'_p, C_q) & \to & \mathrm{Tor}_1^R(A_p, C_q) & \to & \mathrm{Tor}_1^R(A_p, {}''C_q) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(A'_p, C_{q-1}) & \to & \mathrm{Tor}_1^R(A_p, C_{q-1}) & \to & \mathrm{Tor}_1^R(A''_p, C_{q-1}) \\
\to A'_p \otimes C_q & \to & A_p \otimes C_q & \to & A''_p \otimes C_q \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\to A'_p \otimes C_{q-1} & \to & A_p \otimes C_{q-1} & \to & A''_p \otimes C_{q-1} \to 0
\end{array}$$

且其中上、下两行都是正合列。于是又可得到交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\cdots \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_1^R(A_p, C_q) & \to & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_1^R(A''_p, C_q) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\cdots \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(A_p, C_q) & \to & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(A''_p, C_q) \\
\to \bigoplus_{p+q=n} A'_p \otimes C_q \to \cdots & & \\
\downarrow & & \\
\to \bigoplus_{p+q=n-1} A'_p \otimes C_q \to \cdots & &
\end{array}$$

其中上、下两行都是正合列。

记 $(M'_{(k)})_{p,q} = \mathrm{Tor}_k^R(A'_p, C_q)$，$(M_{(k)})_{p,q} = \mathrm{Tor}_k^R(A_p, C_q)$，$(M''_{(k)})_{p,q} = \mathrm{Tor}_k^R(A''_p, C_q)$，并记 $N'_{p,q} = A'_p \otimes C_q$，$N_{p,q} = A_p \otimes C_q$，$N''_{p,q} = A''_p \otimes C_q$，则上面的交换图就是

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to \mathrm{Tot}(M_{(1)})_n & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(M''_{(1)})_n & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(N')_n \to \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots \to \mathrm{Tot}(M_{(1)})_{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(M''_{(1)})_{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(N')_{n-1} \to \cdots
\end{array}$$

其中上、下两行都是正合列。

因此有链映射正合列

$$\cdots\to \mathrm{Tor}_1^R(A',C)\to \mathrm{Tor}_1^R(A,C)\to \mathrm{Tor}_1^R(A'',C)\to A'\otimes C\to A\otimes C\to A''\otimes C\to 0.$$

引理35.3 设已给一个右 R- 平坦复形

$$A:\quad \cdots\to A_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\to\cdots$$

(即其中每一个 A_i 都是平坦右 R- 模)，并设

$$d_n=0,\quad \forall n\in\mathbf{Z},$$

则对任何左 R- 复形

$$C:\quad \cdots\to C_{n+1}\xrightarrow{\Delta_{n+1}}C_n\xrightarrow{\Delta_n}C_{n-1}\to\cdots,$$

视分次模 $H_*(C)$ 是有 0 微分的复形时，有

$$H_n(A\otimes C)\cong(A\otimes H_*(C))_n.$$

证 命 $M_{p,q}=A_p\otimes C_q$，$d'_{p,q}=d_p\otimes 1$：$M_{p,q}\longrightarrow M_{p-1,q}$，$d''_{p,q}=(-1)^p1\otimes\Delta_q$：$M_{p,q}\longrightarrow M_{p,q-1}$，则由例 34.1知有双复形$(M,d',d'')$。从而得到复形$(\mathrm{Tot}(M),\bar d)$，其中$\bar d_n=\sum\limits_{p+q=n}(\lambda_{p-1}d'_{p,q}\pi_{p,q}+\lambda_{p,q-1}d''_{p,q}\pi_{p,q})$。因为 $d_n=0$，$\forall n\in\mathbf{Z}$，故 $d'_{p,q}=0$。因此 $\bar d_n=\sum\limits_{p+q=n}\lambda_{p,q-1}d''_{p,q}\pi_{p,q}=\sum\limits_{p+p=n}\lambda_{p,q-1}((-1)^p1\otimes\Delta_q)\pi_{p,q}$。

于是有

$$H_n(A\otimes C)=H_n(\mathrm{Tot}(M))=\ker\bar d_n/\mathrm{im}\,\bar d_{n+1}.$$

命 $N_{p,q}=A_p\otimes H_q(C)$，则

$$(A\otimes H_*(C))_n=\mathrm{Tot}(N)_n=\bigoplus_{p+q=n}N_{p,q}=\bigoplus_{p+q=n}(A_p\otimes H_q(C)).$$

因此就是要证明 $\bigoplus\limits_{p+q=n}(A_p\otimes H_q(C))\cong\ker\bar d_n/\mathrm{im}\,\bar d_{n+1}$。

为此，我们考虑短正合列

$$0\to\mathrm{im}\Delta_{q+1}\xrightarrow{\alpha_q}\ker\Delta_q\xrightarrow{\beta_n}H_q(C)\to 0$$

其中 β_q 是自然同态映射。

因为 A_p 是平坦模，故有短正合列

$$0 \longrightarrow A_p \otimes \mathrm{im}\Delta_{q+1} \xrightarrow{1_p \otimes \alpha_q} A_p \otimes \ker\Delta_q \xrightarrow{1_p \otimes \beta_q} A_p \otimes H_q(c) \longrightarrow 0$$

从而有短正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes \mathrm{im}\Delta_{q+1}) \xrightarrow{\xi_n} \bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes \ker\Delta_q) \xrightarrow{\eta_n} \bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes H_q(c)) \longrightarrow 0.$$

其中 $\xi_n = \bigoplus_{p+q=n}(1_p \otimes \alpha_q)$，$\eta_n = \bigoplus_{p+q=n}(1_p \otimes \beta_q)$。因此

$$\bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes H_q(c)) \cong (\bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes \ker\Delta_q))/\mathrm{im}\xi_n$$

由 $\xi_n = \bigoplus_{p+q=n}(1_p \otimes \alpha_q)$ 及 $\bar{d}_n = \sum_{p+q=n} \lambda_{p,q-1}((-1)^p 1 \otimes \Delta_q)\pi_{p,q}$ 立刻看出可以认为 $\bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes \ker\Delta_q) = \ker\bar{d}_n$，$\mathrm{im}\,\xi_n = \mathrm{im}\bar{d}_{n+1}$。因此 $\bigoplus_{p+q=n}(A_p \otimes H_q(C)) \cong \ker\bar{d}_n/\mathrm{im}\,\bar{d}_{n+1}$ 所以

$$H_n(A \otimes C) \cong (A \otimes H_*(C))_n.$$

引理35.4 设已给 R- 映射图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow W & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \nwarrow_{\xi} & & \swarrow_{\eta} & & \\ & & & H & & & \end{array}$$

其中上面一行是正合列；中间的三角形正合，即 $\mathrm{im}\xi = \ker g$，$\mathrm{im} g = \ker\eta$，$\mathrm{im}\eta = \ker\xi$。则存在唯一的 R-映射 α，β 使得在图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow W & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & Z & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\beta: H \to W,\quad \xi: H \to X,\quad \eta: Y \to H,\quad \alpha: Z \to H$$

中，左、右两个三角形都是交换图，且

$$0 \longleftarrow W \xleftarrow{\beta} H \xleftarrow{\alpha} Z \longleftarrow 0$$

是正合列。

证　其证明是常规的，请读者自己完成之。

35.2 Künneth 定理

定理35.1　(Künneth 定理) 设已给一个右R-复形

$$A:\quad \cdots \to A_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} A_p \xrightarrow{d_p} A_{p-1} \to \cdots$$

并设其子复形 $Z=\{Z_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 及 $B=\{B_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 都是平坦复形，其中 $Z_n=\ker d_n$，$B_n=\operatorname{im} d_{n+1}$。则对任何左$R$-复形

$$C:\quad \cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\Delta_{q+1}} C_q \xrightarrow{\Delta_q} C_{q-1} \to \cdots,$$

对于每一个整数n，恒有短正合列

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A)\otimes H_q(C)) \xrightarrow{\alpha} H_n(A\otimes C) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1}$$
$$\operatorname{Tor}_1^R(H_p(A),H_q(C)) \to 0,$$

且α及β对于A及C是自然的，即对于满足和A同样条件的右R-复形A'及任何左R-复形C'，对于任何链映射$f: A\longrightarrow A'$及$g: C\longrightarrow C'$，有交换图：

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A)\otimes H_q(C)) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(A\otimes C) & \xrightarrow{\beta} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A')\otimes H_q(C')) & \xrightarrow{\alpha'} & H_n(A'\otimes C') & \xrightarrow{\beta'} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(A), H_q(C)) \to 0$$
$$\downarrow$$
$$\xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(A'), H_q(C')) \to 0 .$$

证　首先有短正合列

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{i_n} A_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

其中$\pi_n(x) = d_n(x)$，$\forall x \in A_n$.

由子复形的定义知A的子复形Z及B的微分是0．因此有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z_n & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{\pi_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow d_n & & \downarrow 0 & & \\
0 & \longrightarrow & Z_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & A_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & B_{n-2} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

调整下标，　命　$B^+ = \{(B^+)_n | n \in \mathbf{Z}\}$，　$d^+ = \{(d^+)_n | n \in \mathbf{Z}\}$，其中$(B^+)_n = B_{n-1}$，$(d^+)_n = 0$．则 (B^+, d^+) 是有0微分的平坦复形，且有链映射短正合列

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} B^+ \longrightarrow 0,$$

故据引理35.2知有链映射正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(B^+, C) \to Z \otimes C \to A \otimes C \to B^+ \otimes C \to 0 .$$

因为 $(\mathrm{Tor}_1^R(B^+, C))_m = \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{Tor}_1^R((B^+)_p, C_q)$，而$(B^+)_p$是平坦模，故 $(\mathrm{Tor}_1^R(B^+, C))_m = 0$，　$\forall m \in \mathbf{Z}$．因此有链映射短正合列

$$0 \longrightarrow Z \otimes C \longrightarrow A \otimes C \longrightarrow B^+ \otimes C \longrightarrow 0$$

所以又得到长正合列

$$\cdots\to H_p(Z\otimes C)\to H_p(A\otimes C)\to H_p(B^+\otimes C)\to H_{p-1}(Z\otimes C)\to\cdots$$

它可以写成分次模的正合三角形的形式：

$$\begin{array}{ccc} H_*(B^+\otimes C) & \longrightarrow & H_*(Z\otimes C) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H_*(A\otimes C) & \end{array}$$

因为B^+及Z都是有0微分的平坦复形，故据引理35.3知

$$(H_*(B^+\otimes C))_p\cong(B^+\otimes H_*(C))_p,$$

$$(H_*(Z\otimes C))_p\cong(Z\otimes H_*(C))_p,$$

于是再根据B^+与B的关系，就得到分次模正合三角形

$$\begin{array}{ccc} B\otimes H_*(C) & \longrightarrow & Z\otimes H_*(C) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H_*(A\otimes C) & \end{array}$$

又，由链映射短正合列

$$0\longrightarrow B\longrightarrow Z\longrightarrow H_*(A)\longrightarrow 0$$

据引理35.2知有链映射正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(Z,H_*(C))\to\mathrm{Tor}_1^R(H_*(A),H^*(C))\to B\otimes H_*(C)\to Z\otimes H_*(C)\to H_*(A)\otimes H_*(C)\to 0,$$

因为 Z 是平坦复形， 故 $(\mathrm{Tor}_1^R(Z,H_*(C)))_m = \bigoplus_{p+q=m}\mathrm{Tor}_1^R(Z_p,H_q(C))=0$。于是有链映射图：

$$0\to\mathrm{Tor}_1^R(H_*(A),\ H_*(C))\longrightarrow$$

（接下）

$$\begin{array}{ccccc} B\otimes H_*(C) & \longrightarrow & Z\otimes H_*(C) \longrightarrow H_*(A)\otimes H_*(C) \longrightarrow 0 \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H_*(A\otimes C) & \end{array}$$

其中上面一行是正合列，中间的三角形是正合的。这样，由引理35.4知有正合列

$$0\longrightarrow H_*(A)\otimes H_*(C)\longrightarrow H_*(A\otimes C)\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_*(A),H_*(C))\longrightarrow 0.$$

因此对于每一个整数 n，有短正合列

$$0\to \bigoplus_{p+q=n}(H_p(A)\otimes H_q(C))\xrightarrow{\alpha} H_n(A\otimes C)\xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p(A),H_q(C))\to 0.$$

其中 α,β 可由以上步骤定出，由此可以证明 α 及 β 对于 A 及 C 是自然的。

推论35.1　设已给一个右 R-复形 $(A,\ d)$，且每一个 $Z_n=\ker d_n$ 及 $H_n(A)$ 都是投射模，则对任何左 R-复形 C，对于每一个整数 n，有

$$\bigoplus_{p+q=n}(H_p(A)\otimes H_q(C))\simeq H_n(A\otimes C).$$

证　因为 $H_n(A)$ 是投射模，故短正合列

$$0\longrightarrow B_n \hookrightarrow Z_n\longrightarrow H_n(A)\longrightarrow 0$$

可裂。从而 B_n 是 Z_n 的一个直和项。这里 $B_n=\mathrm{im}\,d_{n+1}$。因此 B_n 是投射模。

这样，Z 及 B 都是平坦复形。故由 Künneth 定理知有正合列

$$0\to \bigoplus_{p+q=n}(H_p(A)\otimes H_q(C))\longrightarrow H_n(A\otimes C)\longrightarrow$$

$$\bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p(A), H_q(C)) \to 0.$$

因为 $H_p(A)$ 是投射模，故 $\bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p(A), H_q(C)) = 0$. 因此有

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p(A) \otimes H_q(C)) \simeq H_n(A \otimes C).$$

35.3 Künneth 公式

为了证明 Künneth 公式，我们先证明下面引理。

引理35.5 设R是右遗传环。若 (A, Δ) 是一个右R-复形，则存在一个投射右R-复形P及一个链映射 $\rho: P \to A$，使得对于每一个整数 n，同调映射

$$H_n(\rho): \quad H_n(P) \longrightarrow H_n(A)$$

是同构映射。

证　先命 $Z_n = \ker\Delta_n$，$B_n = \operatorname{im}\Delta_{n+1}$.

对于每一个Z_n，有一个投射右R-模V_n及一个右R-满射

$$\varphi_n: \quad V_n \twoheadrightarrow Z_n$$

命 $W_n = \varphi_n^{-1}(B_n)$ 是B_n的逆象，则由R是右遗传环知W_n是投射右R-模。于是命 $j_n: W_n \hookrightarrow V_n$，就有右$R$-映射 $\varphi_n': W_n \longrightarrow A_{n+1}$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} W_n & \xrightarrow{\quad j_n \quad} & V_n \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} \\ A_{n+1} & \xrightarrow{\quad \Delta_{n+1} \quad} & A_n. \end{array}$$

作右 R-复形

$$X^{(n)}: \quad \cdots \longrightarrow X_{p+1}^{(n)} \xrightarrow{d_{p+1}^{(n)}} X_p^{(n)} \xrightarrow{d_p^{(n)}} X_{p-1}^{(n)} \longrightarrow \cdots,$$

其中

$$X_p^{(n)}=\begin{cases}W_n, & (p=n+1)\\ V_n, & (p=n)\\ 0, & (\text{其余 } p)\end{cases},\quad d_p^{(n)}=\begin{cases}j_n, & (p=n+1)\\ 0, & (\text{其余 } p)\end{cases}$$

利用交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} X^{(n)}: \cdots \to & 0 & \to & 0 & \longrightarrow & X_{n+1}^{(n)} & \xrightarrow{d_{n+1}^{(n)}} & X_n^{(n)} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_n' & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow & & \downarrow & \\ A\ : \cdots \to & A_{n+3} & \to & A_{n+2} & \to & A_{n+1} & \xrightarrow{\Delta_{n+1}} & A_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \to & A_{n-2} & \to \cdots \end{array}$$

就得到一个链映射

$$f^{(n)}:\ X^{(n)}\longrightarrow A,$$

其中

$$f_p^{(n)}=\begin{cases}\varphi_n', & (p=n+1)\\ \varphi_n, & (p=n)\\ 0, & (\text{其余 } p)\end{cases}$$

由复形 $X^{(n)}$ 的定义知

$$H_p(X^{(n)})=\begin{cases}X_n^{(n)}/\mathrm{im}d_{n+1}^{(n)}=V_n/W_n, & (p=n)\\ 0, & (p\neq n)\end{cases}$$

考虑同调映射

$$H_n(f^{(n)}):\quad H_n(X^{(n)})=V_n/W_n\longrightarrow H_n(A)=Z_n/B_n$$
$$x+W_n\longmapsto f_n^{(n)}(x)+B_n=\varphi_n(x)+B_n$$

由 φ_n 是满射知 $H_n(f^{(n)})$ 是满射，由 $W_n=\varphi^{-1}(B_n)$ 知 $H_n(f^{(n)})$ 是单射。故 $H_n(f^{(n)})$ 是同构映射。

我们再作右 R- 复形

$$P:\quad \cdots\to P_{p+1}\xrightarrow{g_{p+1}}P_p\xrightarrow{g_p}P_{p-1}\to\cdots$$

其中

$$P_p=\bigoplus_{n\in Z}X_p^{(n)},$$

$$g_p:\quad P_p=\bigoplus_{n\in Z}X_p^{(n)}\longrightarrow P_{p-1}=\bigoplus_{n\in Z}X_{p-1}^{(n)}$$

$$(\cdots, x_p^{(i)}, x_p^{(i+1)}, \cdots) \longmapsto (\cdots, d_p^{(i)}(x_p^{(i)}), d_p^{(i+1)}(x_p^{(i+1)}), \cdots),$$

这里 $x_p^{(i)} \in X_p^{(i)}$。

因为每一个 $X_p^{(n)}$ 都是投射模，故每一个 P_p 都是投射模。因此 P 是一个投射复形。

容易验证有交换图：

$$\begin{array}{cccccccc}
P: & \cdots \longrightarrow & P_{p+1} & \xrightarrow{g_{p+1}} & P_p & \xrightarrow{g_p} & P_{p-1} & \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow t_{p+1}^{(p)} & & \downarrow t_p^{(p)} & & \downarrow t_{p-1}^{(p)} & \\
X^{(p)}: & \cdots \longrightarrow & X_{p+1}^{(p)} & \xrightarrow{d_{p+1}^{(p)}} & X_p^{(p)} & \xrightarrow{d_p^{(p)}} & X_{p-1}^{(p)} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

其中 $t_k^{(p)}(\cdots, x_p^{(i)}, x_p^{(i+1)}, \cdots) = x_p^{(k)}$。

于是得到链映射

$$t^{(p)}: \quad P \longrightarrow X^{(p)}$$

从而得到同调映射

$$H_p(t^{(p)}): H_p(P) \longrightarrow H_p(X^{(p)}) = X_p^{(p)}/\mathrm{im}d_{p+1}^{(p)}$$
$$(\cdots, x_p^{(i)}, x_p^{(i+1)}, \cdots) + \mathrm{im}g_{p+1} \longmapsto x_p^{(p)} + \mathrm{im}\, d_{p+1}^{(p)}.$$

其中 $(\cdots, x_p^{(i)}, x_p^{(i+1)}, \cdots) \in \ker g_p$。

由 $X_p^{(n)}$ 的定义知当 $i \neq p-1$ 且 $i \neq p$ 时 $X_p^{(i)} = 0$。因此当 $i \neq p-1$ 且 $i \neq p$ 时 $x_p^{(i)} = 0$。所以 $(\cdots, x_p^{(i)}, x_p^{(i+1)}, \cdots) = (\cdots, 0, x_p^{(p-1)}, x_p^{(p)}, 0, \cdots)$。又，当 $(\cdots, 0, x_p^{(p-1)}, x_p^{(p)}, 0, \cdots) \in \ker g_p$ 时，$(\cdots, 0, d_p^{(p-1)}(x_p^{(p-1)}), d_p^{(p)}(x_p^{(p)}), 0, \cdots) = 0$。由于 $d_p^{(p-1)} = j_{p-1}$ 是单射，故 $x_p^{(p-1)} = 0$。因此实际上是

$$H_p(t^{(p)}): \quad H_p(P) \longrightarrow H_p(X^{(p)}) = X_p^{(p)}/\mathrm{im}\, d_{p+1}^{(p)}$$
$$(\cdots, 0, x_p^{(p)}, 0, \cdots) + \mathrm{im}g_{p+1} \longmapsto x_p^{(p)} + \mathrm{im}d_{p+1}^{(p)}.$$

当 $x_p^{(p)} \in \mathrm{im}d_{p+1}^{(p)}$ 时，有 $y_{p+1}^{(p)} \in X_{p+1}^{(p)}$ 使 $x_p^{(p)} = d_{p+1}^{(p)}(y_{p+1}^{(p)})$。故 $(\cdots, 0, x_p^{(p)}, 0, \cdots) = (\cdots, 0, d_{p+1}^{(p)}(y_{p+1}^{(p)}), 0, \cdots) = g_{p+1}(\cdots, 0, y_{p+1}^{(p)}, 0, \cdots) \in \mathrm{im}g_{p+1}$。因此 $H_p(t^{(p)})$ 是单射。而明显知 $H_p(t^{(p)})$ 是满射，所以 $H_p(t^{(p)})$ 是同构映射。

现在命 $\rho = f^{(p)} t^{(p)}$，则得到链映射

$$\rho: P \longrightarrow A.$$

从而得到同调映射

$$H_p(\rho): \quad H_p(P) \longrightarrow H_p(A).$$

因为 $H_p(\rho) = H_p(f^{(p)}) H_p(t^{(p)})$，而$H_p(f^{(p)})$及 $H_p(t^{(p)})$都是同构映射，故 $H_p(\rho)$是同构映射。

现在我们来证明 Künneth 公式。

定理35.2 （Künneth 公式）设R是右遗传环。若A是平坦右R-复形，则对任何左R-复形C，对于每一个整数n，恒有可裂的短正合列

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A) \otimes H_q(C)) \longrightarrow H_n(A \otimes C) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(A), H_q(C)) \to 0.$$

证 因为R是右遗传环，故由定理 25.6 知 $rD(R) \leqslant 1$。从而由定理25.16知 $wD(R) \leqslant 1$。于是由定理25.15知平坦右 R-模的子模是平坦右R-模。这样，我们首先知道 A的子复形Z及B都是平坦复形。故据 Künneth 定理知有短正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+p=n} (H_p(A) \otimes H_q(C)) \xrightarrow{\alpha} H_n(A \otimes C) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(A), H_q(C)) \longrightarrow 0. \quad (甲)$$

因此剩下的只要证明(甲)可裂。

（i）我们先考虑A及C都是投射复形的情形。

首先对于每一个 $p \in \mathbf{Z}$，有短正合列

$$0 \longrightarrow Z_p \hookrightarrow A_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0$$

因为R是右遗传环，A_p是投射右R-模，故其子模 B_{p-1} 是投射模，因此有

$$A_p = Z_p \oplus Y_p, \qquad Y_p \cong B_{p-1}.$$

命 φ'_p：$Z_p \longrightarrow H_p(A) = Z_p/B_p$ 是自然同态映射，并命φ''_p：

$A_p = Z_p \oplus Y_p \longrightarrow Z_p$是 $z+y \longmapsto z$，其中 $z \in Z_p$，$y \in Y_p$，则命 $\varphi_p = \varphi'_p \varphi''_p$ 时就得到

$$\varphi_p:\quad A_p \longrightarrow H_p(A),$$

同理可得

$$\psi_q:\quad C_q \longrightarrow H_q(C).$$

于是有唯一的同态映射

$$\xi_n:\quad (A \otimes C)_n = \bigoplus_{p+q=n} (A_p \otimes C_q) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A) \otimes H_q(C))$$

满足 $\xi_n(\cdots, a_p \otimes c_q, \cdots) = (\cdots, \varphi_p(a_p) \otimes \psi_q(c_q) \cdots,)$.

设原来的复形 A，C是 (A, Δ')，(C, Δ'')，并记

$$H_n(C) = \bar{Z}_n / \bar{B}_n,\quad H_n(A \otimes C) = \tilde{Z}_n / \tilde{B}_n.$$

因为$\tilde{Z}_n \subseteq (A \otimes C)_n$，故可认为

$$\xi_n:\quad \tilde{Z}_n \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} (H_p(A) \otimes H_q(C)),$$

可知 $\tilde{B}_n \subseteq \ker \xi_n$，故有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_n & \xrightarrow{\ \xi_n\ } & \bigoplus_{p+q=n}(H_p(A) \otimes H_q(C)) \\ & \searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \tau_n} & \\ & H_n(A \otimes C) & \end{array}$$

可以验证 $\tau_n \alpha = 1$，故(甲)可裂。

(ii) 现在考虑一般情形，即仅设 A 是平坦复形，C 是任意复形。

首先据引理35.5知有投射复形 P，Q 及链映射 $f: P \longrightarrow A$，$g: Q \longrightarrow C$使同调映射

$$H_p(f):\ H_p(P) \longrightarrow H_p(A),\quad H_q(g):\ H_q(Q) \longrightarrow H_q(C)$$

都是同构映射。

因为 α, β对 A及C是自然的，故有交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n}(H_p(P)\otimes H_q(Q)) & \xrightarrow{\alpha'} & H_n(P\otimes Q) & \xrightarrow{\beta'} \\
\eta\downarrow & & \zeta\downarrow & \\
0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n}(H_p(A)\otimes H_q(C)) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(A\otimes C) & \xrightarrow{\beta}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p(P),H_q(Q)) \to 0 \\
\delta\downarrow \\
\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p(A),H_q(C)) \to 0
\end{array}$$

其中上、下两行都是短正合列，η, ζ, δ 是 $H(f)$, $H(g)$ 及 f,g 导出的同构映射。

由(i)知上面一行可裂，故下面一行也可裂，即(甲)可裂。

当 (X,Δ') 及 (Y,Δ'') 是两个左 R-复形时，命

$$\mathrm{Hom}(X,Y)_n = \prod_{p+q=n}\mathrm{Hom}_R(X_{-p},Y_q),$$

并对 $f_{p,q}\in\mathrm{Hom}_R(X_{-p},Y_q)$，命

$$D_n: \mathrm{Hom}(X,Y)_n \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y)_{n-1}$$
$$(\cdots,f_{p,q},\cdots)\longmapsto(\cdots,g_{p,q}\cdots)$$

其中

$$g_{p,q}=(-1)^{p+q}f_{p+1,q}\Delta'_{-p}+\Delta''_{q+1}f_{p,q+1}\in\mathrm{Hom}_R(X_{-p},Y_q),$$

$p+q+1=n$ (即 $p+q=n-1$)。则 $(\mathrm{Hom}\,(X,Y),\,D)$ 是一个复形。又记 $H^n(\mathrm{Hom}(X,Y))=H_{-n}(\mathrm{Hom}(X,Y))$。我们写出定理35.2的对偶：

定理35.3(Künneth公式) 设R是左遗传环。若 A是投射左R-复形，则对任何左 R-复形C，对于每一个整数 n，恒有可裂的短正合列

$$0\longrightarrow\prod_{q-p=n+1}\mathrm{Ext}_R^1(H_p(A),H_q(C))\longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(A,C))\longrightarrow$$

$$\prod_{q-p=n}\mathrm{Hom}_R(H_p(A),H_q(C))\longrightarrow 0.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝同调代数
作者＝林子炳编著
页数＝４８６
ＳＳ号＝１０８３３３０７
出版日期＝１９９１年０５月第１版

前言
目录